



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Recd  
NOV 18 1903



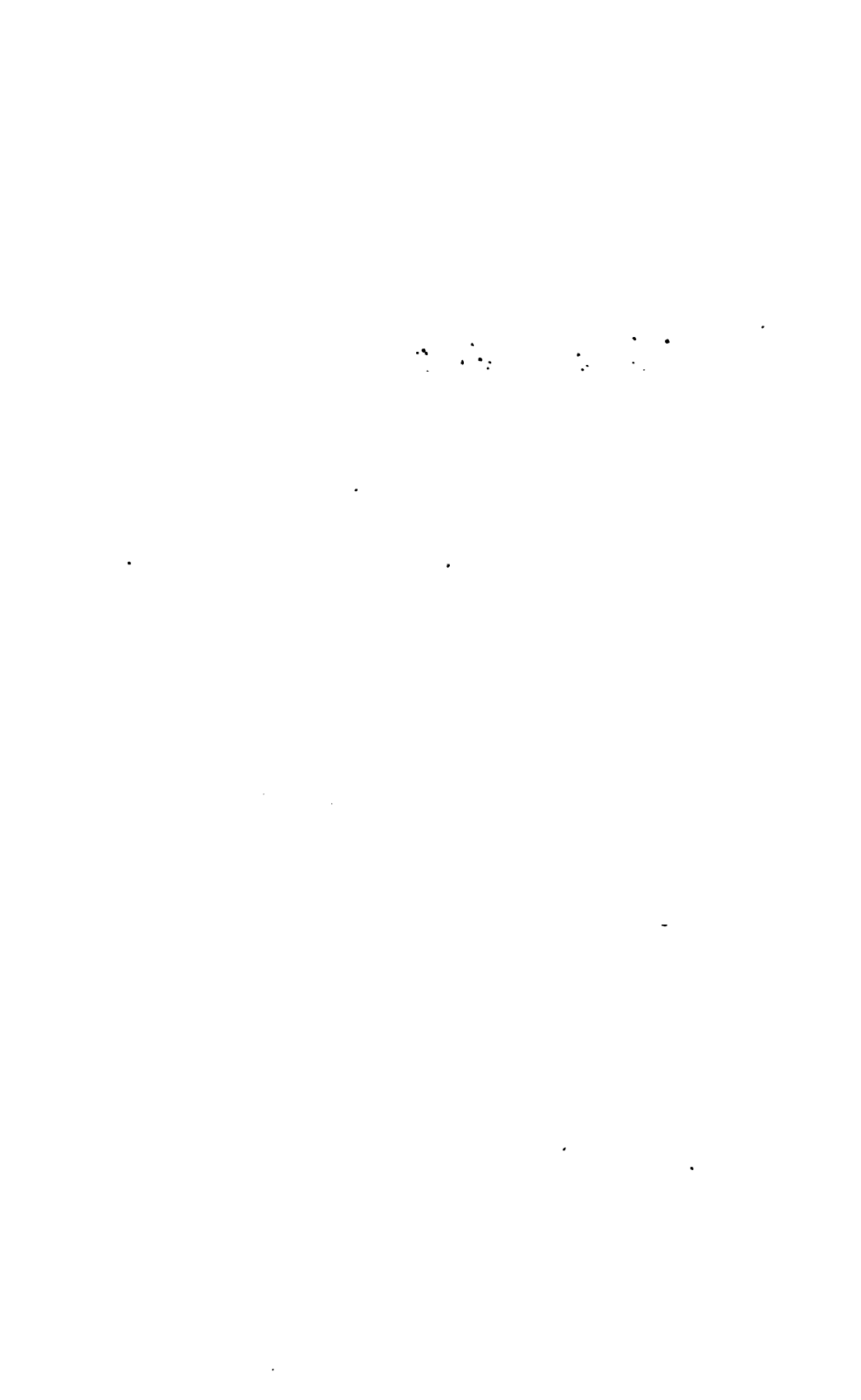
Harvard College Library

FROM

*Annals of Math.*

SCIENCE CENTER LIBRARY



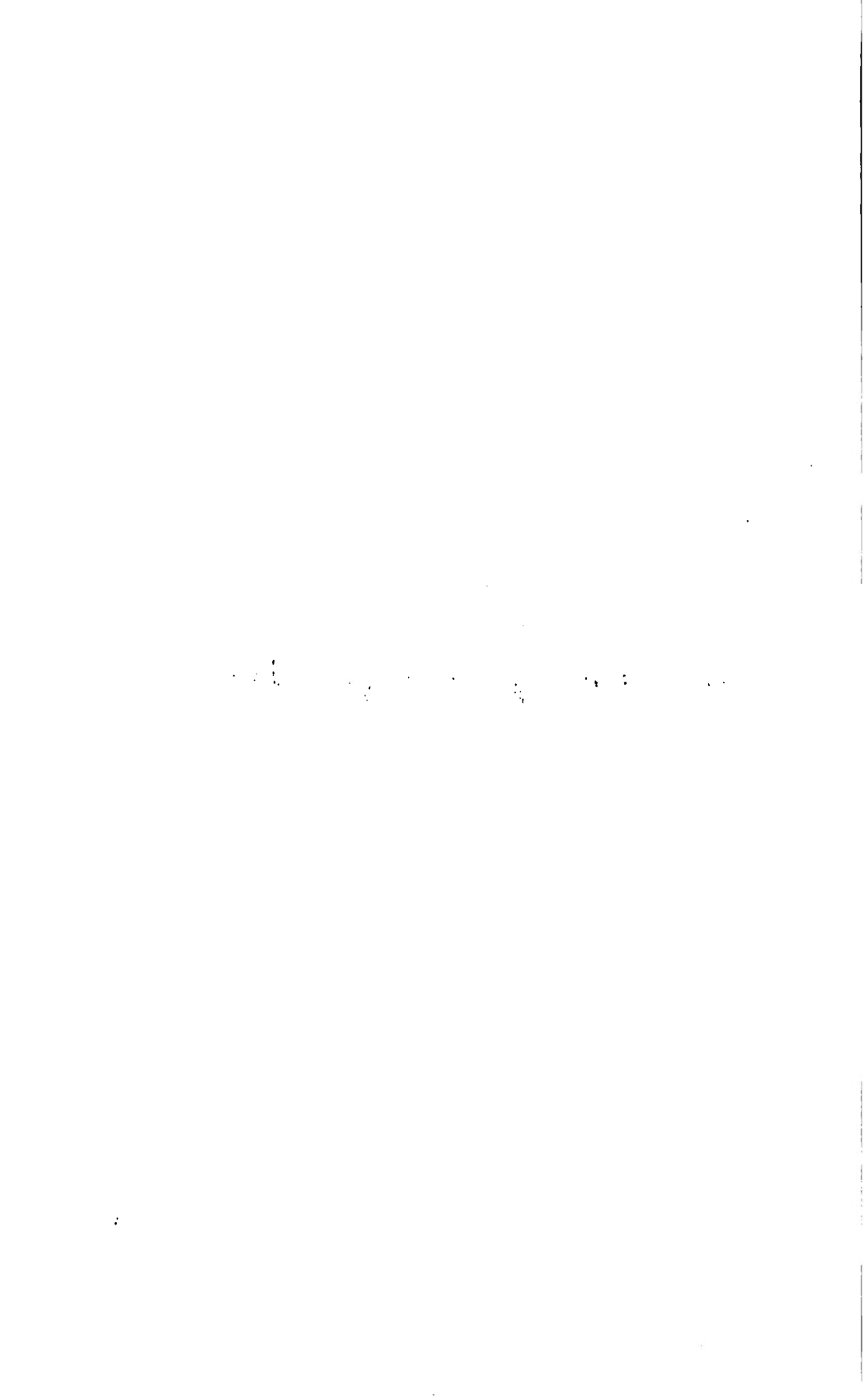








**NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE.**



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEEDE REEKS

DEEL IV

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1900



Sci 9cc. 30

Annals of Math.

# INHOUD.

---

	Blz
K 22 v. Dr. P. H. SCHOUTE. Een vraagstuk van beschrijvende meetkunde . . . . .	1
R 8 e d. A. G. WUTHOFF. On the dynamical stability of a system of four particles . . . . .	7
X 4 b y, 12. J. VAN DEN GRIEND Jr. Graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen . . . . .	22
X 4 b y. F. J. VAES. Graphische oplossing van $n$ lineaire vergelijkingen met $n$ onbekenden . . . . .	42
A 3 j, B 2 c a. Dr. D. J. KORTEWEG. Sur un théorème remarquable, qui se rapporte à la théorie des équations algébriques à paramètres réels, dont toutes les racines restent constamment réelles . . . . .	46
V 6, 7, 11. N. L. W. A. GRAVELAAR. De notatie der decimalen breuken	54
D 1 b. Dr. J. C. KLUYVER. Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks . . . . .	74
Q 2. G. MANNOURY. Sphères de seconde espèce . . . . .	83
P 4 g. Dr. P. H. SCHOUTÉ. On a cubic transformation in space . .	90
M 2 a a, M 5 a, b, c, l. Dr. J. DE VRIES. Kubische Involutionen erster und zweiter Stufe auf kubischen Raumcurven . . . . .	101
K 14 g. F. J. VAES. De regelmatige ruimteverdeeling door veertien-vlakkige lichamen . . . . .	107
C 2 d, F 2 h. Dr. J. C. KLUYVER. De omkeering der elliptische integralen van de eerste soort . . . . .	109
Q 2. G. MANNOURY. Surfaces-images. . . . .	112
N 8 a, c y, e $\beta$ . Dr. D. J. KORTEWEG. Ueber eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung, und ins besondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage . . . . .	130

<b>Q 2, B 10 a.</b>	<b>Dr. W. A. WYTHOFF.</b> The classification of quadrics in $n$ -dimensional space . . . . .	162
<b>L'16 a.</b>	<b>J. NEUBERG.</b> Barycentre podaire et barycentre symétrique .	192
<b>R 8 a, c <math>\gamma</math>, e <math>\beta</math>.</b>	<b>Dr. D. J. KORTEWEG.</b> Note sur le mouvement de roulement d'un corps pesant de révolution sur le plan horizontal	204
<b>R 8 e <math>\beta</math>.</b>	<b>Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.</b> On a case of small oscillations of a system about a position of equilibrium . .	205
<b>O 2 e, 5 d, f.</b>	<b>Dr. A. D. VAN DER HARST.</b> Formeln für die Krümmung eines Systems von ebenen Curven in krummlinigen Coordinaten. Erweiterung der erhaltenen Resultate auf den Raum	226
<b>E 5.</b>	<b>Dr. W. KAPTEYN.</b> Sur la transformation d'une intégrale définie	243
<b>C 2 i.</b>	<b>Dr. W. KAPTEYN.</b> Sur la différentiation sous le signe d'intégration	245
<b>M'1 d a.</b>	<b>Dr. W. BOUWMAN.</b> Ueber den Ort der Berührungspunkte von Strahlenbüscheln und Curvenbüscheln . . . . .	258
<b>K 1 c.</b>	<b>J. W. TESCH.</b> Sur la question 1044 de L'Intermédiaire des Mathématiciens . . . . .	269
<b>L'3 a.</b>	<b>C. VAN ALLER.</b> De herleiding van een kegelsnede op de assen als hare vergelijking op een scheefhoekig coördinatenstelsel gegeven is . . . . .	278
<b>D 6 i.</b>	<b>Dr. J. C. KLUYVER.</b> Verallgemeinerung einer bekannten Formel	284
<b>Q 2.</b>	<b>F. J. VAES.</b> Voorstelling van een $n$ -dimensionaal oppervlak door een $n - 1$ -dimensionale ruimte . . . . .	292
<b>N'1 a, 07 a.</b>	<b>Dr. P. ZEEMAN Gz.</b> Eigenschappen van eenige bijzondere stralenstelsels . . . . .	298
<b>M'5.</b>	<b>Dr. P. ZEEMAN Gz.</b> De reciproke poolkromme eener kubische ruimtekromme . . . . .	318
<b>B 12 h, V 1.</b>	<b>G. MANNOURY.</b> Analoga zu den Begriffen „positiv" und „negativ" . . . . .	325
<b>V 9.</b>	<b>Dr. P. H. SCHOUTE.</b> A. N. Godefroy. 1822—1899. Met portret en naschrift. . . . .	353

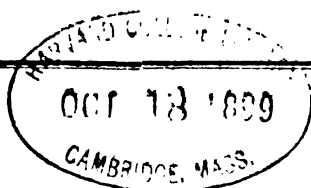
# Bibliographie.

<b>L, M'1.<sup>2</sup></b>	<b>G. DE LONGCHAMPS.</b> Cours de problèmes de géométrie analytique. Paris, Ch. Delagrave, 1898—1899 . . . . .	156
<b>C.</b>	<b>P. APPELL.</b> Éléments d'analyse mathématique. Paris, Carré et Naud, 1898 . . . . .	158
<b>C 5.</b>	<b>G. OLTRAMARE.</b> Calcul de généralisation. Paris, A. Herman, 1899 . . . . .	160
<b>B 12 d, Q 4 c, V 9.</b>	<b>P. G. TAIT.</b> Scientific Papers, I. Cambridge, University press, 1898 . . . . .	161
<b>T 5, 6, 7.</b>	<b>H. POINCARÉ.</b> La théorie de Maxwell et les oscillations Hertiennes, Édition Scientia. Paris, Carré et Naud. . .	161

<b>F. F. DE BOER.</b> Beknopte elementaire theorie der elliptische functiën. Groningen, J. B. Wolters, 1890 . . . . .	248
<b>A 3 g. H. PINET.</b> Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques. Paris, Nony et Co., 1899 .	253
<b>A 1, 2, 3, B 1, 3, D 2, 6 b. A. E. RAHUSEN.</b> Lobatto's Lessen over de hoogere Algebra. Sneek, J. F. van Druten, 1899 . . . . .	253
<b>K 6 a, L<sup>1</sup>. P. VAN GEER.</b> Leerboek der analytische meetkunde. Eerste deel. Leiden, A. W. Sythoff, 1898 . . . . .	255
<b>K 1, 2. A. J. VAN BREEN.</b> Merkwaardige punten en lijnen van den vlakken driehoek. Amsterdam, W. Versluys, 1898 . . . . .	256
<b>K 6 a, L. C. VAN ALLER.</b> Beginselen der hoogere meetkunde. Breda, Gebrs. Oukoop, 1899 . . . . .	339
<b>L<sup>2</sup>, O. P. VAN GEER.</b> Leerboek der analytische meetkunde. Tweede deel. Leiden, A. W. Sythoff, 1900 . . . . .	340
<b>K 14 c. F. J. VAES.</b> Het onderlinge verband der regelmatige licha- men en twee der half-regelmatige lichamen. Leiden, A. W. Sythoff, 1899 . . . . .	345
<b>B 3, 12 d, D 2 b, J 1 a, 2 f, K 14 g, L<sup>1</sup> 15 f, O 2 e, k <math>\beta</math>, Q 3, R 9 d, S 4 b, V 9.</b> <b>P. G. TAIT.</b> Scientific Papers II. Cambridge, University press, 1900 . . . . .	346
<b>X 3. M. D'OCAGNE.</b> Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques. Paris, Gauthier-Villars, 1899 . . . . .	347
<b>O 3. J. W. LEM.</b> Analytische Theorie der Ruimtekrommen. Leiden, E. Ydo, 1899 . . . . .	350
<b>D 4 a. É. BOREL.</b> Leçons sur les fonctions entières. Paris, Gauthier- Villars, 1900 . . . . .	350
<b>E. H. MOORE, E. W. BROWN, Th. S. FISKE.</b> Transactions of the American Mathematical Society. Vol. I. New York, Macmillan, 1900 . . . . .	352



Oct 18 1899  
30



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

—  
UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLEYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

—  
TWEDE REEKS  
DEEL IV  
EERSTE STUK

— • • • —  
AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1899

# I N H O U D.

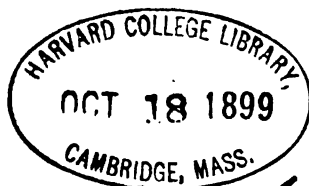
---

	Blz.
<b>K 22 b.</b> Dr. P. H. SCHOUTE. Een vraagstuk van beschrijvende meetkunde . . . . .	1.
<b>R 8 e d.</b> A. G. WIJTHOFF. On the dynamical stability of a system of four particles . . . . .	7.
<b>X 4 b <math>\gamma</math>, Q 2.</b> J. VAN DER GRIEND Jr. Graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen . . . . .	22.
<b>X 4 b <math>\gamma</math>.</b> F. J. VAES. Graphische oplossing van $n$ lineaire vergelijkingen met $n$ onbekenden . . . . .	42.
<b>A 3 j, B 2 c a.</b> Dr. D. J. KORTEWEG. Sur un théorème remarquable, qui se rapporte à la théorie des équations algébriques à paramètres réels, dont toutes les racines restent constamment réelles. . . . .	46.
<b>V 6, 7, 11.</b> N. L. W. A. GRAVELAAR. De notatie der decimale breuken	54.
<b>D 1 b.</b> Dr. J. C. KLUYVER. Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks . . . . .	74.

---

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie Dr. J. C. KLUYVER te Leiden.



K 22 b*Annals of Mathematics*

## EEN VRAAGSTUK VAN BESCHIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

DR. P. H. SCHOUTE.

In de uitstekende verzameling „*Questions de géométrie descriptive*” van E. JURISCH komt het volgende vraagstuk voor:

„Gevraagd de doorsnee van een bol en een omwentelingskegel, als de eerste (fig. 1) op het horizontale vlak rust, de as van den tweeden met het middelpunt van den bol in een vlak „evenwijdig aan het vertikale vlak ligt en de beschrijvende „lijnen van den kegel in dit vlak uit een raaklijn  $a$  in het „hoogste punt A van den bol en een door het uiteinde B eener „horizontale middellijn gaande rechte bestaan.”

We onderzoeken in de volgende bladzijden, welke vormverandering de horizontale projectie der doorsnee ondergaat, als de door B gaande beschrijvende van den kegel om B draait.

Tot goed begrip hiervan moge het volgende voorafgaan:

Men beschouwt den bol als omwentelingslichaam om de vertikale middellijn OA en beschrijft ter bepaling van een willekeurig punt der doorsnee een hulpbol uit het snijpunt M der omwentelingsassen als middelpunt. De vertikale projectie van het punt wordt dan gevonden als het snijpunt der lijnen volgens welke de parallelcirkels zich projecteeren, terwijl de horizontale projectie daarna uit den parallelcirkel des bols wordt afgeleid. De raaklijn wordt op eenvoudige wijs met behulp van de methode der normalen verkregen.

Een andere methode bestaat hierin, dat men gebruik maakt van hulpbollen, die den kegel volgens een parallelcirkel aanraken. De vertikale projectie van den parallelcirkel des bols doet dan de vertikale projectie der raaklijn kennen; daar tegenover staat, dat de bepaling der horizontale projectie hierbij minder eenvoudig wordt.

De aan beide stelsels van hulpbollen gemeenschappelijke bol, die M tot middelpunt en MA tot straal heeft, levert in horizontale projectie in de uit T aan den schijnbaren omtrek getrokken raaklijnen TR', TR" de grens van projectie des kegels op.

De vertikale projectie der doorsnee is een parabool, waarvan de as loodrecht staat op de omwentelingsas des kegels. Zij is bepaald door de richting van de as, de punten A, B, C op de in het vertikale symmetrievlak gelegen beschrijvende en de raaklijn  $\alpha$  in A.

De horizontale projectie der doorsnee is, wijl de gegeven kwadratische oppervlakken elkaar in A aanraken, een *rationale* kromme van den vierden graad met een symmetrieas XX' evenwijdig aan de as van projectie. We wijzen met een enkel woord aan, hoe men de dubbelpunten D', D", de dubbelraaklijn E'E", de raakpunten F', F" met den schijnbaren omtrek van den bol en de paren raakpunten G', H' en G", H" met den schijnbaren omtrek van den kegel bepaalt.

De gegeven oppervlakken bepalen op elk der beide loodlijnen in D' en D" op het horizontale vlak opgericht een gemeenschappelijke koorde. Stellen D'\_m, D''\_m de middens dier koorden voor, dan is de vertikale projectie van D'\_m D''\_m het punt D, waar de doorgang OB van het horizontale middelvlak des bols den doorgang TR ontmoet van het bij vertikale koorden behoorende middelvlak des kegels, welke lijn TR tevens de vertikale projectie is van den schijnbaren omtrek des kegels in horizontale projectie. Door nu de punten der doorsnee te bepalen, die gelegen zijn in het vlak door D loodrecht op de as van projectie, laat ons zeggen in het „frontvlak” van D, worden D' en D" gevonden en wel met behulp van den bol, die N tot middelpunt heeft en door den in het aangewezen frontvlak gelegen kleinen cirkel des gegeven bols gaat.

De punten E', E" worden verkregen met behulp van den bol, die N tot middelpunt en den straal van den gegeven bol tot straal heeft. Zij liggen in het frontvlak, dat ON loodrecht middendoordeelt, en hebben het punt E, waar de vertikale projectie van den raakcirkel des in den kegel beschreven hulpbols, den vertikalen doorgang van dit frontvlak snijdt, hun vertikale projectie, enz.

De punten F', F" worden door middel van den hulpbol met het middelpunt M en den straal MB bepaald. Evenzoo de

puntenparen  $G'$ ,  $H'$  en  $G''$ ,  $H''$  door middel van een hulpbol, die I tot middelpunt heeft en door den zich volgens TR op het vertikale vlak projecteerenden kleinen cirkel van den gegeven bol gaat.

Ten slotte merken we nog op, dat AM de kromtestraal is van de doorsnee des kegels met het frontvlak van A in dit punt en in verband met den regel van EULER hieruit de betrekking  $r \sin^2 \varphi = r_1$  volgt, waarin  $r$  de straal van den gegeven bol,  $r_1$  de kromtestraal AM en  $\varphi$  de hoek is tusschen XX' en elk der beide dubbelpuntstraaklijnen in A.

We vergelijken nu eerst de drie gevallen, waarin de rechte BC de drie standen  $BC_1$ ,  $BC_2$ ,  $BC_3$  (fig. 2) heeft, met elkaar. Voor den stand  $BC_1$  is de vorm der horizontale projectie reeds in fig. 1 aangegeven; zooals daar blijkt, bestaat deze kromme uit drie lissen, die een gedeelte AD'CD'A gemeen hebben. Gaat nu door draaiing van BC om B de stand  $BC_1$  in den stand  $BC_2$  over, dan bewegen de punten C en D op XX' zich naar links, tot ze in A samenvallen; daarbij verkleint zich het aan de drie lissen gemeenschappelijke gedeelte hoe langer zoo meer tot het in den eindstand (fig. 3) geheel verdwenen is. De kromme heeft dan in plaats van drie dubbelpunten een driedubvoudig punt. Wjl hier de betrekking  $r_1 = 2r \operatorname{Tg} \frac{\pi}{8}$  geldt, vindt men  $\varphi = 24^\circ 28' 49''$ .

Zet men de draaiende beweging van BC om B een weinig voort, dan neemt de horizontale projectie den vorm fig. 4 aan. En is BC evenwijdig aan  $\alpha$  en de kegel dus een cylinder geworden, dan heeft men met het bekende geval van het koepeldak van VIVIANI (vergelijk BRIOT et BOUQUET, *Leçons de géométrie analytique*, 13<sup>e</sup> druk, blz. 550, vraagstuk 12) te doen en gelijk de horizontale projectie (fig. 5) op de lemniscaat van BERNOULLI. De vraag is nu — en de beantwoording hiervan vormt meer in het bijzonder het doel van dit opstel — hoe de vorm van fig. 4 geleidelijk in die van fig. 5 overgaat en welke merkwaardige tusschenstanden zich daarbij voordoen.

Beweegt het punt C van fig. 4 zich naar links, dan worden de beide kleine symmetrisch ten opzichte van XX' gelegen

lissen kleiner tot ze zich (fig. 6) in twee keerpunten samen-trekken. In dezen stand vallen de loodrecht op  $XX'$  staande lijnen  $D'D''$ ,  $E'E''$ ,  $F'F''$ ,  $G'G''$  samen, m. a. w. de keerpunten liggen zoowel op de grens van projectie van den bol als op die van den kegel en in vertikale projectie staat  $OB$  in het van  $B$  verschillende tweede snijpunt met de parabool loodrecht op deze. Wyl het midden van  $ON$  (fig. 7) dan tevens het door den hulpbol met het middelpunt  $N$  en den straal  $NJ$  geleverde punt  $E$  der parabool is, moet  $JE$  loodrecht staan op de as des kegels. Wordt  $OE$  door  $x$  aangewezen, dan vindt men onmiddellijk

$$Tg ATN = \frac{x}{r}, Tg ATB = \frac{rx}{r^2 - rx - 2x^2}$$

en dus, wyl de tweede hoek het dubbel is van den eersten,

$$3x^2 + 2rx - r^2 = 0$$

of

$$x = \frac{1}{3} r, x = -r,$$

waarvan de eerste waarde de gevraagde uitkomst behelst. We bevestigen deze uitkomst door de vergelijking der parabool met betrekking tot  $AT$  en  $AK$  als  $x$ - en  $y$ -as op te maken. De vergelijking eener willekeurige kegelsnee door  $A$  en  $B$ , die in  $A$  de  $x$ -as aanraakt, is dan

$$y[(y-r) - \lambda(x-r)] + \mu[x^2 + y^2 - 2ry] = 0,$$

waarin  $\lambda$  en  $\mu$  willekeurige parameters zijn. Tusschen deze bestaan de betrekkingen

$$\lambda^2 = 4\mu(\mu + 1), \lambda(\lambda - \mu) = \mu(\lambda + 1),$$

waarvan de eerste uitdrukt, dat de kegelsnee een parabool is, en de tweede, dat deze parabool in het tweede snijpunt met  $BO$  door deze lijn loodrecht gesneden wordt. Hieruit volgt  $\lambda = -\frac{2}{3}$ ,  $\mu = -\frac{3}{8}$  en dus voor de  $x$  van het tweede snijpunt met  $BO$  werkelijk  $-\frac{1}{3}r$ .

Wordt de draaiende beweging van  $BC$  nog verder voortgezet, dan ontstaat er eerst een kromme met twee lissen (fig. 8), waarvan de linksche vier bestaanbare buigpunten vertoont. Bij den overgang tot de lemniscaatvormige kromme van fig. 5 zakken de aan de zijde van  $A$  gelegen buigpunten naar  $A$  af,

terwijl de aan de zijde van C gelegen buigpunten zich naar C bewegen en reeds voor het bereiken van den stand van fig. 5 verdwenen zijn. Dit samenvallen dier buigpunten in C (fig. 9) vindt plaats als het raakpunt van de vertikale raaklijn der parabool op den schijnbaren omtrek des bols ligt. Zooals gemakkelijk blijkt, gebeurt dit, zoodra N het diametraal tegenover B gelegen punt diens cirkels wordt. De tophoek des kegels is dan  $30^\circ$ .

Als de beschrijvende lijn BC om B draait, omhult de as TM des kegels de parabool, die  $a$  tot richtlijn en B tot brandpunt heeft. Wil men achtereenvolgens al deze raaklijnen doorloopen, dan moet BC een *volle* omwenteling maken, want de hoekbeweging van de as is de helft van die der beschrijvende BC; trouwens met de twee samenvallende lijnen BC, die  $180^\circ$  in draaiingshoek verschillen, komen twee loodrecht op elkaar staande omwentelingsassen overeen. Denken we nu, dat de draaiing van BC (fig. 2) begonnen is bij den stand, waarin ze in B den schijnbaren omtrek des bols op het vertikale vlak aanraakt, — in welk geval de kegel den bol volgens een cirkel *aanraakt* en de horizontale projectie (fig. 10) dus een dubbel te tellen ellips is —, dan is in het voorgaande dus nog slechts een vierde gedeelte der gestelde taak afgemaakt. Daar het zeer leerzaam is de figuur bij de beweging van BC over een hoek van  $360^\circ$  geheel te volgen, doch ruimte en tijd verbiedt het overige zoo uitvoerig te behandelen als het voorgaande, besluiten we met een tabellarisch overzicht van alle merkwaardige standen, die dan door den van den aangewezen beginstand af getelden hoek van draaiing  $\psi$  van BC worden gekenmerkt.

$\psi = 0$	Dubbel te tellen ellips (kleine as $AB = a$ , groote as $= a\sqrt{2}$ ).
$\psi = \frac{\pi}{4}$	Kromme met drievoudig punt in A.
$\text{Tg}\psi = \frac{4}{3}$	Kromme met twee keerpunten.
$\psi = \frac{\pi}{3}$	Kromme met twee samengevallen buigpunten (buigtop in C).

$\psi = \frac{\pi}{2}$	Kromme met een buigknoop.
$\psi = \frac{3\pi}{4}$	Kromme in den vorm van een „racket” met een keerpunt in A (de kromme van doorsnee heeft zelf een keerpunt in A).
$\psi = \pi$	Twee afgezonderde punten (A en B) zonder eigenlijke kromme.
$\psi = \frac{5\pi}{4}$	Kromme met drievoudig punt in A; van de drie takken is er echter slechts een bestaanbaar.
$\psi = \frac{3\pi}{2}$	Een puntcirkel A en de schijnbare omtrek des bols op het horizontale vlak.
$\psi = \frac{7\pi}{4}$	Kromme in den vorm van een „cardioïde” met een keerpunt in A (de kromme van doorsnee heeft zelf een keerpunt in A).

We merken hierbij alleen nog op, dat beide uit de aanraking der oppervlakken in A voortspruitende takken bestaanbaar zijn als  $\psi$  tusschen  $-\frac{\pi}{4}$  en  $\frac{3\pi}{4}$  inligt en onbestaanbaar als  $\psi$  tusschen  $\frac{3\pi}{4}$  en  $\frac{7\pi}{4}$  inligt. Bovendien wijzen we op den eigenaardigen bij  $\psi = \frac{3\pi}{2}$  voorkomenden omwentelingskegel, die uit twee evenwijdige vlakken bestaat.

---

ON THE DYNAMICAL STABILITY OF A SYSTEM OF FOUR PARTICLES.  
SOLUTION OF PRIZE-QUESTION N<sup>o</sup>. 6 FOR THE YEAR 1897.

BY

A. G. WYTHOFF.

---

§ 1. Mr. C. KREDIET has discussed the configuration and the motion of a system of four particles, mutually attracting each other in proportion to their masses and to the  $n^{\text{th}}$  power of their distances and so projected that these distances remain the same throughout the motion. (*Nieuw Archief* XIX, 1, p 66—79). It is shown in his essay that these particles cannot be in equilibrium unless placed in one straight line, at the corners of a deltoid, the masses of the particles not lying in the axis of symmetry being equal, or so that three of the particles with equal masses are at the corners of an equilateral triangle and the fourth at the centre.

I have in my article *on the dynamical stability of a system of particles* (*Nieuw Archief*, 2<sup>nd</sup> series, III, 2, p. 95—110) written down the general equations for the disturbed motion of a system of  $q$  particles and proved that an arbitrary number of particles, lying in one straight line, cannot be in stable equilibrium if the forces acting between them be inversely proportional to some power of the distance. We shall now proceed to deduce the conditions for the stability of the motion of four particles forming a deltoid or placed at the corners and at the centre of an equilateral triangle. The co-ordinates and the notation used will be the same as in the article last mentioned and the equations therein deduced will be designated by numbers in square brackets.

§ 2. *Four particles are placed each at one corner of a deltoid.* The line joining the first and the third particle is the axis of symmetry, the second and the fourth particle have equal masses:  $m_4 = m_2$ .



We have:

$$\phi_3 - \phi_1 = 180^\circ$$

$$\text{and } \phi_2 - \phi_1 = -(\phi_4 - \phi_1).$$

In the following we shall write  $\phi_2$  for  $\phi_2 - \phi_1$ ,  $\phi_2$  having a constant value.

For the undisturbed motion we have by substitution in [7]:

$$m_1 \rho_1 c^2 = \mu m_1 \{2m_2 (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2) r_{13}^{n-1} + m_3 r_{13}^n\}, \dots \dots \dots (1)$$

$$m_2 \rho_2 c^2 = \mu m_2 \{m_1 (\rho_2 - \rho_1 \cos \phi_2) r_{13}^{n-1} + 2m_2 \rho_2 \sin^2 \phi_2 r_{24}^{n-1} + m_3 (\rho_2 + \rho_3 \cos \phi_2) r_{23}^{n-1}\}, \dots \dots \dots (2)$$

$$m_3 \rho_3 c^2 = \mu m_3 \{m_1 r_{13}^n + 2m_2 (\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2) r_{23}^{n-1}\}, \dots \dots \dots (3)$$

while  $n = 4$  gives again equation (2).

Substitution of  $n = 1$  and  $n = 3$  in [8] gives an identity, while both  $n = 2$  and  $n = 4$  lead to

$$m_1 \rho_1 \sin \phi_2 r_{13}^{n-1} + m_2 \rho_2 \sin 2\phi_2 r_{24}^{n-1} - m_3 \rho_3 \sin \phi_2 r_{23}^{n-1} = 0.$$

This equation may be split up into:

$$\sin \phi_2 = 0$$

and

$$m_1 \rho_1 r_{13}^{n-1} + 2m_2 \rho_2 \cos \phi_2 r_{24}^{n-1} - m_3 \rho_3 r_{23}^{n-1} = 0. \dots \dots (4)$$

As  $\sin \phi_2 = 0$  makes the second and fourth particles coincide, equation (4) is a necessary condition for the proper deltoid.

From (1)....(4) we deduce:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{2m_2 (\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2) (r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1})}{r_{13} (r_{13}^{n-1} - r_{13}^{n-1})}, \\ m_3 &= \frac{2m_2 (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2) (r_{13}^{n-1} - r_{24}^{n-1})}{r_{13} (r_{23}^{n-1} - r_{13}^{n-1})}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

and

$$c^2 = \mu \{m_1 r_{13}^{n-1} + 2m_2 r_{24}^{n-1} + m_3 r_{23}^{n-1}\} \dots \dots \dots (6)$$

If the form of the deltoid be given, the ratio of the masses is determined by set (5),  $\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2$  and  $\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2$  being the parts into which the line  $r_{13}$  is divided by the line  $r_{24}$ . This ratio known, equation (6) gives us  $c^2$  as a function of one of the masses, the form and the dimensions of

the deltoid. As the masses are positive quantities we cannot take a deltoid of arbitrary form, the angles have to be greater than  $60^\circ$ .

§ 3. The equations for the disturbed motion, when  $\rho_v$  is changed to  $\rho_v + p_v$ ,  $\phi_v$  to  $\phi_v + \psi_v$  and  $z$  is no longer equal to zero, are obtained by substituting in [9], [10] and [6].

Substitution in [6] gives us the equations which determine the stability of the motion for disturbances perpendicular to the plane of the undisturbed motion. As Prof. KORTWEG has shown in his criticism of this article, it is not necessary to write down the determinantal equation from which the conditions for the stability are deduced, the motion of a system of an arbitrary number of particles being always stable for disturbances perpendicular to the plane of the motion. The equations [6] namely are the same as would give us the oscillations of the system in the same configuration but without any rotation, every particle having but one possible motion: along the perpendicular on the plane. It is evident that the potential energy is then a minimum for the state of equilibrium and, as this equilibrium is statcal, it is stable.

By substituting in [9] and [10] we get the eight differential equations which determine  $p_1 \dots p_4$  and  $\psi_1 \dots \psi_4$ . From these equations may be derived the determinantal equation in  $m^2$ , the roots of which have to be negative and real in order that the motion be stable for disturbances in the plane of motion.

It is not necessary however to make use of all of these equations; we may take four of them, namely those relating to the first and those relating to the third particle, and, instead of the remaining equations the integrals [13], [14], [15] and [16], written out for a simple case of disturbed motion.

By this our determinantal equation in  $m^2$  is reduced to one of the fourth degree, while it would have been of the eighth, if we had made use of the eight differential equations, and at the same time this proceeding does not make our results less general.

The four integrals used are:

$$\sum_1^4 m_v \rho_v p_v = 0,$$

$$\sum_1^4 m_\nu \rho_\nu^2 \psi_\nu = 0,$$

$$\sum_1^4 m_\nu \{ \rho_\nu \cos \phi_\nu \psi_\nu + p_\nu \sin \psi_\nu \} = 0$$

and

$$\sum_1^4 m_\nu \{ -\rho_\nu \sin \phi_\nu \psi_\nu + p_\nu \cos \phi_\nu \} = 0.$$

The differential equations are:

$$m_1 \ddot{p}_1 - 2m_1 c \rho_1 \ddot{\psi}_1 - m_1 c^2 p_1 + \sum_1^4 p_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_1 \partial \rho_\nu} + \sum_1^4 \psi_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_1 \partial \phi_\nu} = 0,$$

$$m_3 \ddot{p}_3 - 2m_3 c \rho_3 \ddot{\psi}_3 - m_3 c^2 p_3 + \sum_1^4 p_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_3 \partial \rho_\nu} + \sum_1^4 \psi_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_3 \partial \phi_\nu} = 0,$$

$$m_1 \rho_1^2 \ddot{\psi}_1 + 2m_1 c \rho_1 \dot{p}_1 + \sum_1^4 p_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_\nu \partial \phi_1} + \sum_1^4 \psi_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_\nu} = 0,$$

and

$$m_3 \rho_3^2 \ddot{\psi}_3 + 2m_3 c \rho_3 \dot{p}_3 + \sum_1^4 p_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_\nu \partial \phi_3} + \sum_1^4 \psi_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_3 \partial \phi_\nu} = 0.$$

Putting  $p_\nu = M_\nu e^{m^2 t}$  and  $\psi_\nu = M_{4+\nu} e^{m^2 t}$ ,  $m^2$  is determined by a determinantal equation, the first member of which is a determinant of eight rows and eight columns and of the fourth degree in  $m^2$ . We shall not write down the determinant in that form; it may be transformed to the following:

$m^2 - c^2 + \mu \{ m_1 r_{13}^{n-1} + 2m_2 r_{13}^{n-1} + 2m_2(n-1)(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{13}^{n-3} + m_3 m_{13}^{n-1} \}$	$m_1 \mu \{ m r_{13}^{n-1} - r_{13}^{n-1} - (n-1) r_{13} \times (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2) r_{13}^{n-1} \}$	$-2cm$	$0$
$m_2 \mu \{ m r_{13}^{n-1} - r_{13}^{n-1} - (n-1) r_{13} \times (\rho_2 + \rho_2 \cos \phi_2) r_{13}^{n-3} \}$	$m^2 - c^2 + \mu \{ m_3 r_{33}^{n-1} + 2m_2 r_{33}^{n-1} + 2m_2(n-1)(\rho_2 + \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{33}^{n-3} + m_1 m r_{13}^{n-1} \}$	$0$	$m^2 - c^2 + \mu \{ 2m_2 m r_{13}^{n-1} - 2m_2(n-1) \times (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{13}^{n-3} + m_3 r_{13}^{n-1} + m_1 m r_{13}^{n-1} \}$
$2cm$	$0$	$-2cm$	$\mu m_3 \{ r_{13}^{n-1} - m r_{33}^{n-1} + (n-1) r_{13} \times (\rho_2 + \rho_2 \cos \phi_2) r_{33}^{n-3} \}$
$0$	$2cm$	$-2cm$	$m^2 - c^2 + \mu \{ 2m_2 m r_{33}^{n-1} - 2m_2(n-1) \times (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{13}^{n-3} + m_3 r_{13}^{n-1} + m_1 m r_{13}^{n-1} \}$
		$0$	$-2cm$

I have not succeeded in so transforming the equation in  $m^2$  for arbitrary masses  $m_1$ ,  $m_2$  and  $m_3$  that the nature of the roots might be easily ascertained

§ 4. Let us write the determinantal equation in this way:

$$\begin{vmatrix} A & B & -2cm & 0 \\ C & D & 0 & -2cm \\ 2cm & 0 & E & F \\ 0 & 2cm & G & H \end{vmatrix} = 0.$$

It may be transformed to:

$$\begin{vmatrix} 4c^2m^2 + AE + CF & BE + DF \\ AG + CH & 4c^2m^2 + BG + DH \end{vmatrix} = 0.$$

For the particular case that the deltoïd is a rhomb we have:

$$m_3 = m_1, \quad D = A, \quad C = B, \quad H = E \text{ and } G = F.$$

Substitution of these values in the above equation gives:

$$\begin{vmatrix} 4c^2m^2 + AE + BF & BE + AF \\ AF + BE & 4c^2m^2 + BF + AE \end{vmatrix} = 0,$$

or

$$(4c^2m^2 + AE + BF)^2 - (AF + BE)^2 = 0,$$

which may be split up into:

$$4c^2m^2 + (A + B)(E + F) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

and

$$4c^2m^2 + (A - B)(E - F) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

For this case we have:

$$c^2 = 2\mu(m_1r_{13}^{n-1} + m_2r_{13}^{n-1}) = 2\mu(m_1r_{13}^{n-1} + m_2r_{24}^{n-1}).$$

Equation (7) gives when worked out:

$$m^4 + (n+3)c^2m^2 + 4\mu^2(n-1)^2r_{13}^{n-2}(m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2)\{m_1r_{13}^{n-1} + (m_2 - m_1)\rho_1^2r_{13}^{n-3}\} = 0 \dots (9).$$

The absolute term is positive, which may be shown as follows:

The equation

$$m_1r_{13}^{n-1} + m_2r_{13}^{n-1} = m_1r_{13}^{n-1} + m_2r_{24}^{n-1}$$

may be written

$$(m_2 - m_1) r_{13}^{n-1} = m_2 r_{24}^{n-1} - m_1 r_{13}^{n-1}$$

or

$$(m_2 - m_1) \rho_1^2 r_{13}^{n-3} = m_2 r_{24}^{n-1} \frac{\rho_1^2}{r_{12}^2} - m_1 r_{13}^{n-1} \frac{\rho_1^2}{r_{12}^2},$$

giving

$$m_1 r_{13}^{n-1} + (m_2 - m_1) \rho_1^2 r_{13}^{n-3} = m_1 r_{13}^{n-1} \frac{\rho_1^2}{r_{12}^2} + m_2 r_{24}^{n-1} \frac{\rho_1^2}{r_{12}^2},$$

being a positive quantity.

If we had called the greatest mass  $m_2$ , the above would not have needed any demonstration.

Putting  $2m_1 \rho_1^2 + 2m_2 \rho_2^2 = T$ , equation (9) becomes

$$m^4 + (n+3)c^2 m^2 + \mu^2 (n-1)^2 r_{13}^{n-3} T (c^2 - T r_{13}^{n-3}) = 0,$$

having real roots for

$$(n+3)^2 c^4 > 4(n-1)^2 r_{13}^{n-3} T (c^2 - T r_{13}^{n-3}),$$

or

$$(n+3)^2 c^4 - 4(n-1)^2 r_{13}^{n-3} T c^2 + 4(n-1)^2 r_{13}^{2n-6} T^2 > 0,$$

or

$$\frac{1}{(n+3)^2} [(n+3)^2 c^2 - 2(n-1)^2 T r_{13}^{n-3}]^2 + 32(n+1)(n-1)^2 T^2 r_{13}^{2n-6} > 0.$$

For  $n+1 > 0$  this equation is certainly satisfied. The roots of equation (9) are real and negative for this case.

If the difference between the diameters be as great as possible  $r_{24}$  differs but slightly from  $r_{12}$  and  $m_1$  is a small quantity.

We have approximately:

$$\rho_2^2 = \frac{1}{4} r_{24}^2 = \frac{1}{4} r_{12}^2,$$

$$\rho_1^2 = \frac{3}{4} r_{12}^2$$

and

$$c^2 = 2m_2 r_{13}^{n-1}.$$

For these values equation (9) becomes:

$$m^4 + 2\mu(n+3)m_2 r_{13}^{n-1} m^2 + 4\mu^2(n-1)^2 r_{13}^{n-3} \cdot m_2 \cdot \frac{1}{4} r_{12}^2 \cdot m_2 \cdot \frac{3}{4} r_{13}^{n-1} = 0,$$

the condition for the reality of the roots being:

$$4(n+3)^2 > 3(n-1)^2$$

or

$$n^2 + 30n + 33 > 0$$

or

$$(n + 15 + 8\sqrt{3})(n + 15 - 8\sqrt{3}) > 0.$$

$$n + 15 - 8\sqrt{3} > 0 \text{ gives } n > -1.144\dots$$

Let us now make  $m_2 = m_1$ ; our rhomb is then a square.

Equation (9) becomes for this case

$$m^4 + 2\mu m_1 (n + 3) (r_{13}^{n-1} + r_{13}^{n-1}) + 4\mu^2 m_1^2 (n - 1)^2 r_{13}^{n-1} r_{13}^{n-1} = 0,$$

of which equation the roots are real for

$$(n + 3)^2 (r_{13}^{n-1} + r_{13}^{n-1})^2 > 4(n - 1)^2 r_{13}^{n-1} r_{13}^{n-1}.$$

This inequality is not satisfied by  $n = -1.144$ , thus the square represents as to this condition a less stable motion than does the rhomb that differs as much as possible from a square.

Equation (8) worked out gives:

$$m^4 + 2\{c^2 + \mu(n+1)(m_1 + m_2)r_{13}^{n-1}\}m^2 + c^4 - 2\mu c^2(n+1)(m_1 + m_2)r_{13}^{n-1} + 4\mu^2(m_1 + m_2)^2(n\rho_1^2 + \rho_2^2)(\rho_1^2 + n\rho_2^2)r_{13}^{2n-6} = 0 \quad (10),$$

having its roots real for:

$$\mu(m_1 + m_2)(n - 1)^2(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 r_{13}^{n-6} > -4(n + 1)c^2.$$

This condition is satisfied if  $n + 1 > 0$  and, if the rhomb becomes a square, the roots are not real unless  $n > -1$  as for that case  $\rho_1 = \rho_2$ .

This shows that the condition for the stability of the motion of four particles with equal masses forming a square is the same as that for the stability of the motion of three particles with equal masses placed at the corners of an equilateral triangle, this last condition being (ROUTH, *Advanced Rigid Dynamics*, § 109)

$$(n + 3)^2 (\Sigma m_i)^2 > 3(n - 1)^2 \Sigma m_i m_j,$$

which by putting  $m_1 = m_2 = m_3$  may be transformed to

$$8(n + 1) > 0.$$

If we make  $m_1$  very small, the condition for the reality of the roots of (10) is the same as for equation (9) namely:

$$n^2 + 30n + 33 > 0.$$



We conclude from this that *in general* the stability of the motion is greater for the rhomb that differs as much as possible from a square than it is for a square.

§ 5. Nothing is changed in the foregoing if  $n + 1 = 0$ ; the forcefunction changes form but not the differential coefficients and only these enter into our equations. The determinantal equation is for the deltoid in its most general form

$$16c^4m^4 + (AE + CF + BG + DH) 4c^2m^2 + (AD - BC)(EH - FG) = 0.$$

Putting  $n + 1 = 0$ , we have:

$$F = -B, G = -C, E = -2(m^2 - c^2) - A \text{ and } H = 2(m^2 - c^2) - D.$$

Substituting these values in the above equation, we see that it may be split up into the following equations:

$$4c^4 + 2c^2(A + D) + AD - BC = 0$$

and

$$4m^4 - 2m^2(A + D) + AD - BC = 0,$$

or, putting:

$$A = m^2 - c^2 + \alpha,$$

$$D = m^2 - c^2 + \vartheta,$$

into the following:

$$m^4 + (2c^2 + \alpha + \vartheta)m^2 + (c^2 + \alpha)(c^2 + \vartheta) - BC = 0,$$

and

$$m^4 + (2c^2 - \alpha - \vartheta)m^2 + (c^2 - \alpha)(c^2 - \vartheta) - BC = 0.$$

Both these equations have their roots real for

$$(\alpha - \vartheta)^2 + 4BC > 0$$

further conditions for the stability being:

$$2c^2 + \alpha + \vartheta > 0,$$

$$2c^2 - \alpha - \vartheta > 0,$$

$$(c^2 + \alpha)(c^2 + \vartheta) - BC > 0,$$

and

$$(c^2 - \alpha)(c^2 - \vartheta) - BC > 0,$$

while we have:

$$c^2 = \mu \{m_1 r_{13}^{-2} + 2m_2 r_{24}^{-2} + m_3 r_{23}^{-2}\},$$

$$m_1 = \frac{2m_2(\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2)(r_{23}^{-2} - r_{24}^{-2})}{r_{13}(r_{12}^{-2} - r_{13}^{-2})},$$

$$m_3 = \frac{2m_2(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)(r_{12}^{-2} - r_{24}^{-2})}{r_{13}(r_{23}^{-2} - r_{13}^{-2})},$$

$$\alpha = \mu \{ m_1 r_{12}^{-2} + 2m_2 r_{12}^{-2} - 4m_2(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{12}^{-4} - m_3 r_{12}^{-2} \},$$

$$\partial = \mu \{ m_3 r_{23}^{-2} + 2m_2 r_{23}^{-2} - 4m_2(\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{23}^{-4} - m_1 r_{12}^{-2} \},$$

$$\begin{aligned} B &= \mu m_1 \{ -r_{12}^{-2} - r_{13}^{-2} + 2r_{13}(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2) r_{12}^{-4} \} = \\ &= \mu m_1 \{ -r_{12}^{-2} + r_{13}^2 r_{12}^{-4} - r_{23}^2 r_{12}^{-4} \} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} C &= \mu m_3 \{ -r_{12}^{-2} - r_{23}^{-2} + 2r_{13}(\rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2) r_{23}^{-4} \} = \\ &= \mu m_3 \{ -r_{12}^{-2} + r_{13}^2 r_{23}^{-4} - r_{12}^2 r_{23}^{-4} \}. \end{aligned}$$

We may prove that the motion is stable of  $r_{23}$  and  $r_{12}$  form a right angle.

For this case we have:

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2, \quad \rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2 = r_{12}^2 r_{13}^{-1}, \quad \rho_3 + \rho_2 \cos \phi_2 = r_{23}^2 r_{13}^{-1}.$$

Substituting this and putting  $\mu = 1$ :

$$c^2 = \frac{6m_2}{r_{24}^2},$$

$$m_1 = -\frac{2r_{12}^2(3r_{12}^2 - r_{23}^2)}{r_{13}^2 r_{24}^2} m_2,$$

$$m_3 = \frac{2r_{23}^2(3r_{23}^2 - r_{12}^2)}{r_{13}^2 r_{24}^2} m_2,$$

$$\alpha = \frac{2m_2 r_{12}^2(3r_{12}^2 - r_{23}^2)}{r_{13}^4 r_{12}^2},$$

$$\partial = \frac{2m_2 r_{23}^2(3r_{23}^2 - r_{12}^2)}{r_{13}^4 r_{12}^2},$$

$$B = \frac{m_1 r_{23}^2}{r_{12}^2 r_{13}^2} = \frac{2m_2 r_{23}^2(3r_{12}^2 - r_{23}^2)}{r_{13}^4 r_{24}^2},$$

and

$$C = \frac{2m_2 r_{12}^2(3r_{23}^2 - r_{12}^2)}{r_{13}^4 r_{24}^2}.$$

B and C are positives, as  $\angle 2, 1, 3 > 90^\circ$ , therefore  $(\alpha - \delta)^2 + 4BC$  is positive and both equations have real roots.

We have further:

$$c^2 + \alpha = \frac{2m_2}{r_{13}^4 r_{24}^2} (6r_{12}^4 + 5r_{12}^2 r_{23}^2 + 3r_{23}^4),$$

$$c^2 + \delta = \frac{2m_2}{r_{13}^4 r_{24}^2} (6r_{23}^4 + 5r_{12}^2 r_{23}^2 + 3r_{12}^4),$$

$$c^2 - \alpha = \frac{2m_2 r_{23}^2}{r_{13}^2 r_{24}^2} (7r_{12}^2 + 3r_{23}^2),$$

and

$$c^2 - \delta = \frac{2m_2 r_{12}^2}{r_{13}^2 r_{24}^2} (7r_{23}^2 + 3r_{12}^2),$$

giving:

$$2c^2 + \alpha + \delta > 0$$

and

$$2c^2 - \alpha - \delta > 0.$$

As  $c^2 + \delta$  and  $c^2 - \delta$  are both greater than B and  $c^2 + \alpha$  and  $c^2 - \alpha$  both greater than C, we have:

$$(c^2 + \alpha)(c^2 + \delta) > BC$$

and

$$(c^2 - \alpha)(c^2 - \delta) > BC.$$

The roots of both equations are real and negative and the motion is stable.

I have not succeeded in proving that the motion is always stable for  $n + 1 = 0$ , even if  $r_{12}$  and  $r_{23}$  are not at right angles, but the cases I worked out, taking numbers for the lengths of the sides were all cases of stable motion.

Neither have I been able to demonstrate that the determinantal equation in  $m^2$  of page 11 always has imaginary roots for  $n = -2$ , it has four imaginary roots for  $r_{12} = 3$ ,  $r_{13} = 5$  and  $r_{23} = 4$ .

§ 6. *Three particles with equal masses are placed at the corners of an equilateral triangle, a fourth particle with mass  $m_4$  is placed at the centre. In deducing the equation in  $m^2$  of*

page 11 nothing has been specified about the form of the deltoïd. By making  $\rho_3 = 0$ ,  $\phi_2 = 120^\circ$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $m_2 = m_1$  and calling  $m_4$  what has been called  $m_3$  we reduce this case to that of a deltoïd. Substitution of the particular values gives :

$$A = m^2 + \frac{3}{2}\mu(n-1)m_1r^{n-1} + \mu(n-1)m_4\rho^{n-1},$$

$$B = \mu m_1 \{ n\rho^{n-1} - \frac{1}{2}(n+1)r^{n-1} \},$$

$$C = \frac{3}{2}(n-1)\mu m_4\rho^{n-1},$$

$$D = m^2 - c^2 + \frac{3}{2}(n+1)\mu m_1\rho^{n-1} + \mu m_4\rho^{n-1},$$

$$E = m^2 + \frac{3}{2}\mu m_1(n-1)r^{n-1},$$

$$F = \mu m_1 \{ \rho^{n-1} - \frac{1}{2}(n+1)r^{n-1} \},$$

$$G = -\frac{3}{2}(n-1)\mu m_4\rho^{n-1},$$

and

$$H = m^2 - c^2 + \frac{3}{2}(n+1)\mu m_1\rho^{n-1} + \mu m_4n\rho^{n-1},$$

while  $c^2 = \mu \{ 3m_1r^{n-1} + m_4\rho^{n-1} \}$ .

Putting :

$$\frac{3}{2}\mu m_1r^{n-1} = a,$$

$$\mu m_4\rho^{n-1} = b,$$

$$\mu m_1(\rho^{n-1} - r^{n-1}) = p$$

and

$$(n-1) \{ (n-1)a^2 + \frac{3}{2}(n+1)ap + \frac{1}{2}(n-1)ab + \frac{3}{2}bp \} = t,$$

the determinantal equation may be transformed to

$$\begin{aligned} \phi(m^2) &= [m^4 + \{ (n+3)c^2 + \frac{3}{2}(n+1)p \} m^2 + t]^2 + 9(n+1)^2 c^2 p^2 m^2 = \\ &= (m^4 + qm^2 + t)^2 + sm^2 = 0. \end{aligned}$$

Neither the discriminant of  $\phi(m^2)$  nor the other functions the sign of which indicates the nature of the roots of  $\phi(m^2) = 0$  have a simple form. By constructing the line  $y + \phi(m^2)$

however, we may easily for every value of  $n$  and of  $\frac{m_4}{m_1}$  ascertain the nature of the roots.

The motion is stable for  $n = 1$  as for that case three of the particles attract the fourth as if their masses were united at the centre of gravity.

We have, for  $n = 1$ ,  $p = 0$  and  $t = 0$ , and the equation becomes :

$$\{m^4 + (n + 3)c^2m^2\}^2 = 0.$$

That the equal roots do not indicate instability follows from the foregoing.

The motion of three particles with equal masses, at the corners of an equilateral triangle is rendered more stable by placing a fourth particle with equal or smaller mass at the centre.

The condition for the stability of the three particles was  $n + 1 > 0$ , but, if a fourth particle be placed at the centre, the motion is not unstable if  $n + 1$  has a small negative value, which may be demonstrated as follows.

For  $n + 1 = 0$  equation  $y = \phi(m^2)$  becomes:

$$y = (m^4 + 9m^2 + t)^2 = \{m^4 + 6\mu(m_1 + m_4)r^{-2}m^2 + 9(\mu r^{-2})^2m_1(m_1 + m_4)\}^2,$$

representing a curve that touches the  $m^2$ -axis in two real points, for which  $m^2$  is negative if  $m_4 < m_1$ .

If we give a small negative value to  $n + 1$ , the roots of  $m^4 + qm^2 + t = 0$  change slightly and so do the points in which the line  $y = (m^4 + qm^2 + t)^2$  touches the  $m^2$ -axis. As  $s$  has a small positive value,  $sm^2$  is negative for those two points and the line  $y = (m^4 + qm^2 + t)^2 + sm^2$  cuts the  $m^2$ -axis in four points on the negative side of the  $m^2$ -axis. The roots of  $\phi(m^2) = 0$  are thus real and negative for  $n$  somewhat smaller than  $-1$ .

For  $n = -2$  however the motion is unstable; we can show namely that for no value of  $\frac{m_1}{m_4}$  the conditions that the roots of  $\phi(m^2) = 0$  are real and negative are satisfied simultaneously.

§ 7. If one of the four particles, say the first, has but a small mass, we have approximately  $m_1 = 0$ . In the determinantal equation of page 11 B, F and consequently DE + DF are equal to zero, and the equation may be split up into

$$4c^2m^2 + AE = 0 \dots\dots\dots (11)$$

and

$$4c^2m^2 + DH = 0 \dots\dots\dots (12).$$

The three other particles have to be in equilibrium among themselves, hence they are placed at the corners of an equilateral triangle or in a straight line.

If they are placed at the corners of an equilateral triangle equation (12) becomes:

$$m^4 + (n+3)c^2m^2 + (n-1)^2 \frac{3}{4}m_2\mu^2 (\frac{1}{2}m_2 + m_3)r^{2n-3} = 0,$$

being the equation from which are derived the conditions for the stability of the motion of three particles with finite mass.

We have:

$$A = m^2 - c^2 + \mu \{ 2m_2 r_{12}^{n-1} + 2m_2 (n-1)(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{12}^{n-3} + m_3 n r_{13}^{n-1} \},$$

$$E = m^2 - c^2 + \mu \{ 2m_2 n r_{12}^{n-1} - 2m_2 (n-1)(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{12}^{n-3} + m_3 r_{13}^{n-1} \},$$

$$A + E = 2m^2 - 2c^2 + (n+1)(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1}),$$

$$A - E = (n-1) \{ 4m_2 (\rho_1 - \rho_2 \cos \phi_2)^2 r_{12}^{n-3} + m_3 r_{13}^{n-1} - 2m_2 r_{12}^{n-1} \} = (n-1)P,$$

$$4c^2m^2 + AE = 4c^2m^2 + \{ m^2 - c^2 + \frac{1}{2}(n+1)(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1}) \}^2 - \frac{1}{4}(n-1)^2 P^2.$$

Equation (11) becomes:

$$\begin{aligned} m^4 + \{ 2c^2 + (n+1)(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1}) \} m^2 + \\ + c^4 - (n+1)c^2(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1}) + \\ + \frac{1}{4}(n+1)^2(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1})^2 - \frac{1}{4}(n-1)^2 P^2 = 0, \end{aligned}$$

having its roots real for

$$8c^2(n+1)(2m_2 r_{12}^{n-1} + m_3 r_{13}^{n-1}) + (n-1)^2 P^2 > 0.$$

If the three particles at the corners of the equilateral triangle have equal mass and the fourth particle be placed at the centre,  $P=0$  and  $n+1 > 0$  is then a necessary condition for the stability.

If the three particles with finite mass be placed in a straight line:

$$D = m^2 + 2m_2(r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}),$$

$$H = m^2 + (n-1)m_3 r_{23}^{n-1} + 2m_2(nr_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}).$$

Equation (12) is for this case identical with that given in § 8 of my former article for three particles placed in one straight line.

We have

$$A = m^2 + (n - 1) \{ m_3 r_{13}^{n-1} + 2m_2 r_{13}^2 r_{12}^{n-3} \},$$

$$E = m^2 + (n - 1) \{ 2m_2 r_{12}^{n-1} - 2m_2 r_{13}^2 r_{12}^{n-3} \},$$

giving for equation (11):

$$m^4 + (n + 3) c^2 m^2 +$$

$$+ (n - 1)^2 (m_3 r_{13}^{n-1} + 2m_2 r_{13}^2 r_{12}^{n-3}) 2m_2 (r_{12}^{n-1} - r_{13}^2 r_{12}^{n-3}) = 0,$$

from which no new conditions for the stability can be derived, but the motion of the three particles with finite mass is not stable for  $n < 0$ .

§ 8. If two of the particles have small mass the figure must be rhomb; this case has been discussed in § 4.

If we have approximately  $m_1 = 0$  and  $m_2 = 0$ , that is to say if three particles have small mass we find that these particles are all placed at the same distance ( $r$ ) from the particle with finite mass. Both equation (11) and (12) become

$$4c^2 m^2 + m^2 \{ m^2 + (n - 1) \mu m_3 r^{n-1} \} = 0,$$

giving:

$$m^2 = 0 \text{ and } m^2 + (n + 3) \mu m_3 r^{n-1} = 0.$$

From these equations no new conditions for the stability are to be derived. As however the distance between the particles with small mass have to remain the same,  $n = 1$  is a necessary condition for the stability, for if  $n$  be different from 1 small disturbances change the time of revolution for the particles with small mass and therefore their mutual distances.

GRAPHISCHE OPLOSSING VAN EEN STELSEL LINEAIRE  
VERGELIJKINGEN

DOOR

J. v. D. GRIEND JR.

---

De navolgende beschouwingen zijn het gevolg van het zoeken naar een graphische oplossing van lineaire vergelijkingen ten behoeve van enkele problemen der Graphostatica. Onder het zoeken naar deze oplossing bleken mij daartoe allengs zooveel voorbeschouwingen noodig, dat het probleem zelf daardoor langzamerhand in mijn oogen tot nevenzaak is afgedaald. Ook bleek mij spoedig, dat de ingewikkeldheid der gevorderde constructies de oplossing een meer theoretisch dan practisch belang zou geven, en ik heb dan ook onder het zoeken zelf allengs de oorspronkelijke graphostatische toepassing uit het oog laten gaan om mij tot het zuiver wiskundige probleem te wenden.

Deze onderzoekingen hebben plaats gehad onafhankelijk van de oplossingen van VAN DEN BERG, van welker bestaan ik toen onkundig was. Toen mij na gevonden oplossing door den hoogleeraar dr. C. A. SCHELTEMA op dezen bestaanden arbeid gewezen was, meende ik toch, dat het zijn nut kon hebben mijn oplossing te publiceeren, omdat de uitvoering eenigszins, maar vooral de grondslagen tamelijk veel van die van VAN DEN BERG verschilden, en er van deze grondslagen ook in andere richting nog gebruik te maken zou kunnen zijn, -- zooals mij reeds voor enkele gevallen bleek. Het is ook daarom, dat ik het noodig meende, de beginselen, waarop de methode berust, zoo scherp als het mij mogelijk was te formuleeren, alvorens tot de behandeling van het eigenlijke probleem over te gaan, die daardoor tamelijk eenvoudig kon verlopen.

---

1. Wij verstaan door geometrische additie in een ruimte, waarin een willekeurige oneindigheid van punten voorkomt,



hetzelfde als doordoor verstaan wordt in de vlakke en ruimte-meetkunde. Een begrensde rechte CD wordt geometrisch gesommeerd bij een andere begrensde rechte AB, door een vlak te leggen door CD en B, in dit vlak van B uit BD' gelijk en evenwijdig aan CD te trekken en A met D' te verbinden; AD' is de meetkundige som:

$$[AD'] = [AB] + [CD].$$

De operatiën, waardoor een begrensde rechte bij een andere gesommeerd wordt, geschieden voor iedere twee rechten in het bijzonder in het platte vlak en kunnen dus toegepast worden in een ruimte van een willekeurige oneindigheid van punten.

2. Wij noemen een ruimte „van  $m$  afmetingen”, wanneer er door een punt O dezer ruimte  $m$  en niet meer rechten getrokken kunnen worden, waarvan de richting van geen door geometrische additie van stukken op de andere kan worden afgeleid. Door de punten van een ruimte van  $m$  afmetingen verstaan wij alle punten, te verkrijgen door geometrische additie van willekeurige stukken op de  $m$  door O getrokken rechten. Deze  $m$  rechten  $OX_1, OX_2, \dots OX_m$  worden dan „de assen van de ruimte van  $m$  afmetingen”; de stukken, wier geometrische som het punt geleverd, „de coördinaten van dit punt” ( $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ ); het punt O „de oorsprong”.

a) De volgorde der coördinaten is zonder invloed op het resulteerende punt. Dit is af te leiden uit de verwisselbaarheid van 2 opeenvolgende termen in de geometrische som.

b) Twee punten P en P', waarvan 1 of meer coördinaten verschillen, kunnen niet samenvallen. Want onderstelde men, dat zij samenvielen, dan moest men hebben, als  $x_1, x_2 \dots x_m$  de coördinaten van P,  $x'_1, x'_2 \dots x'_m$  die van P' zijn:

$$[OP] = [OP'] = [x_1] + [x_2] + \dots + [x_{m-1}] + [x_m] = [x'_1] + [x'_2] + \dots + [x'_{m-1}] + [x'_m].$$

Voegt men bij ieder der gelijke begrensde rechten [OP] en [OP'] de rechten  $[-x'_m], [-x'_{m-1}], [-x'_{m-2}], \dots [-x_2], [-x_1]$ , dan blijven de resulteerende eindpunten steeds in elkander vallen, en de bovenstaande gelijkheid van sommen neemt onder toepassing van a) den volgende vorm aan:

$$[x_m - x'_m] = [x'_1 - x_1] + [x'_2 - x_2] + \dots + [x'_{m-1} - x_{m-1}]$$

Alzoo zou, tegen de onderstelling, de as  $OX_m$  door geometrische additie van de stukken  $x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots, x'_{m-1} - x_{m-1}$  op de overige assen van deze af te leiden, dus niet onafhankelijk zijn.

Daar alzoo verschillende coördinaten verschillende punten opleveren, is de oneindigheid van punten in een ruimte van  $m$  afmetingen een  $m$ -voudige.

c). Omgekeerd, als twee punten samenvallen, moeten zij op een onafhankelijk assensysteem dezelfde coördinaten hebben, m. a. w. uit

$$[x_1] + [x_2] + [x_3] + \dots + [x_m] = [x'_1] + [x'_2] + [x'_3] + \dots + [x'_m]$$

volgt

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3, \dots, x_m = x'_m.$$

Want als een der coördinaten verschilde, konden de beide punten niet samenvallen (b).

3. Door combinatie van de  $m$  assen van een ruimte van  $m$  afmetingen  $p$  aan  $p$  ontstaan in die ruimte  $\binom{m}{p}$  ruimten van  $p$  afmetingen. Wij noemen ze de „ $p$ -coördinaatruimten.” De uno-coördinaatruimten ten getale van  $m$  zijn de coördinaatassen; de bicoördinaatruimten ten getale van  $\binom{m}{2}$  zijn de coördinaatvlakken; de tricoördinaatruimten ten getale van  $\binom{m}{3}$  zijn de coördinaatruimten met 3 afmetingen, enz.

#### 4. *Transformatie van coördinaten.*

a). Bij de evenwijdige verplaatsing van alle  $m$  assen naar een ander punt  $O'$  van de ruimte van  $m$  afmetingen worden de coördinaten van alle punten met de overeenkomstige coördinaten ( $a_1, a_2 \dots a_m$ ) van den nieuwen oorsprong ten opzichte van het oorspronkelijke systeem verminderd. Want de geometrische som

$$[a_1] + [a_2] + \dots + [a_m] + [x'_1] + [x'_2] + \dots + [x'_m]$$

is gelijk aan

$$[x_1] + [x_2] + \dots + [x_m]$$



paald. Zal echter het assensysteem  $OX'_1, OX'_2, \dots OX'_m$  het systeem  $OX_1, OX_2, \dots OX_m$  geheel kunnen vervangen, dan moet ook het omgekeerde mogelijk zijn, nl. dan moet ieder punt in de oorspronkelijke coördinaatruimte door zijn coördinaten in  $OX'_1, OX'_2, \dots OX'_m$  te bepalen zijn. Daartoe is noodig, dat de vergelijkingen (b) oplossing naar  $x'_1, x'_2, \dots x'_m$  toelaten, of dat de determinante

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,m} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

van 0 verschilt. Als echter de determinante 0 was, zou dit de beteekenis hebben, dat er van 0 verschillende waarden van  $x'_1, x'_2, \dots x'_m$  waren, die voldoen zouden aan de vergelijkingen (b), waarin  $x_1, x_2, \dots x_m = 0$  gesteld zijn:

$$\begin{aligned} A_{1,1}x'_1 + A_{2,1}x'_2 + \dots + A_{m,1}x'_m &= 0 \\ \vdots & \\ A_{1,m}x'_1 + A_{2,m}x'_2 + \dots + A_{m,m}x'_m &= 0. \end{aligned}$$

Kiest men deze waarden van  $x'_1, x'_2, \dots x'_m$  tot nieuwe coördinaten van een punt, dan zou dit punt blijken de oorsprong te zijn, omdat al zijn oorspronkelijke coördinaten 0 zijn. D.i., een der nieuwe assen zou door geometrische additie van stukken op de andere zijn af te leiden, de nieuwe assen zouden tot een ruimte van  $m - 1$  afmetingen behooren.

De voorwaarde dus, dat beide systemen volkomen æquivalent zijn, is, dat geen der assen in ieder systeem afhankelijk zij van de overige, en dat iedere as van het eene systeem afhankelijk zij van de  $m$  assen van het andere.

5. Wij noemen een figuur „van  $n$  afmetingen”, wanneer tot de bepaling van haar punten een ruimte van  $n$  afmetingen noodig en voldoende is. Een figuur van  $n$  afmetingen kan voorkomen in een ruimte, waarvan het aantal afmetingen gelijk aan of grooter is dan  $n$ .

Een figuur van  $n$  afmetingen kan een  $p$ -voudige oneindigheid van punten hebben. Daarbij zijn de getallen  $p$  en  $n$  onafhankelijk van elkaar, alleen is  $p \leq n$ .

Een figuur van een  $p$ -voudige oneindigheid is in de ruimte van  $m$  afmetingen bepaald door  $m - p$  vergelijkingen tusschen





Ter bekorting stellen wij de coëfficiënten van de coördina-  
ten  $x''$

$$C_{1,1}A_{1,1} + \dots + C_{1,m}A_{1,m} = \alpha_{1,1} \dots$$

$$C_{1,1}A_{m-n,1} + \dots + C_{1,m}A_{m-n,m} = \alpha_{1,m-n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{m-n,1}A_{1,1} + \dots + C_{m-n,m}A_{1,m} = \alpha_{m-n,1} \dots$$

$$C_{m-n,1}A_{m-n,1} + \dots + C_{m-n,m}A_{m-n,m} = \alpha_{m-n,m-n}$$

Dan kan de determinante van dit systeem

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-n,1} & \dots & \alpha_{m-n,m-n} \end{vmatrix}$$

bij onafhankelijkheid der nieuwe assen en onafhankelijkheid  
der oorspronkelijke vergelijkingen (I) niet 0 zijn. Want vormt  
men het product der twee determinanten

$$\begin{vmatrix} C_{1,1} \dots & C_{1,m} \\ \dots & \dots \\ C_{m-n,1} \dots & C_{m-n,m} \\ f_{1,1} \dots & f_{1,m} \\ \dots & \dots \\ f_{n,1} \dots & f_{n,m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{1,1} \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ A_{m,1} \dots & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

waarin de elementen  $f$  geheel willekeurig zijn, dan vindt men,  
met het oog op (2), voor dit product (als men voor de elemen-  
ten, die uit de vermenigvuldiging van de elementen  $f$  met de  
elementen  $A$  ontstaan, en die ons onverschillig zijn, schrijft  
 $g_{1,1}$  enz.)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \dots & \alpha_{1,m-n} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-n,1} \dots & \alpha_{m-n,m-n} & 0 \dots 0 \\ \hline g_{1,1} \dots & g_{1,m-n} & g_{1,m-n+1} \dots g_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n,1} \dots & g_{n,m-n} & g_{n,m-n+1} \dots g_{n,m} \end{vmatrix} = D_g \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} \dots & \alpha_{1,m-n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{m-n,1} \dots & \alpha_{m-n,m-n} \end{vmatrix}$$

waarin

$$D_g = \begin{vmatrix} g_{1,m-n+1} & \dots & g_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n,m-n+1} & \dots & g_{n,m} \end{vmatrix}.$$

Alzoo is identisch naar alle elementen  $f$

$$\begin{vmatrix} C_{1,n} & \dots & C_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m-n,1} & \dots & C_{m-n,m} \\ f_{1,1} & \dots & f_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n,1} & \dots & f_{n,m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix} = D_g \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-n,1} & \dots & \alpha_{m-n,m-n} \end{vmatrix}.$$

Wanneer dus

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-n,1} & \dots & \alpha_{m-n,m-n} \end{vmatrix} = 0$$

zou zijn, dan moest òf

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix} = 0$$

òf identisch naar alle elementen  $f$

$$\begin{vmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m-n,1} & \dots & C_{m-n,m} \\ f_{1,1} & \dots & f_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n,1} & \dots & f_{n,m} \end{vmatrix} = 0$$

zijn. De eerste voorwaarde spreekt de afhankelijkheid der nieuwe assen uit (4b); de tweede zou wegens de identiteit naar alle elementen  $f$  eischen, dat alle subdeterminanten van den graad  $m - n$  uit de eerste  $m - n$  rijen te vormen 0 waren; maar daaruit zou volgen, dat de oorspronkelijke vergelijkingen van de beschouwde figuur niet onafhankelijk van elkaar waren.



Want verstaat men onder  $\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \dots \gamma_{m-n,i}$  de toegevoegden van de elementen  $C$  van een willekeurige colonne in een willekeurige dezer subdeterminanten, dan heeft men in de eerste plaats door de ontwikkeling dezer subdeterminante naar die elementen  $C$

$$C_{1,i}\gamma_{1,i} + C_{2,i}\gamma_{2,i} + \dots + C_{m,i}\gamma_{m,i} = 0.$$

Voorts voor de elementen  $C_{1,k}, \dots C_{m,k}$  eener andere colonne van dezelfde subdeterminante:

$$C_{1,k}\gamma_{1,i} + C_{2,k}\gamma_{2,i} + \dots + C_{m,k}\gamma_{m,i} = 0,$$

omdat het eerste lid dezer vergelijking de ontwikkeling vormt van een determinante met 2 gelijke colonnes,

en eindelijk voor de elementen  $C_{1,r}, \dots C_{m,r}$  eener colonne niet in dezelfde subdeterminante voorkomend:

$$C_{1,r}\gamma_{1,i} + C_{2,r}\gamma_{2,i} + \dots + C_{m,r}\gamma_{m,i} = 0,$$

omdat het eerste lid de ontwikkeling is eener andere subdeterminante, die ook 0 zou moeten zijn.

Alzoo voor alle colonnes der elementen  $C$ :

$$C_{1,s}\gamma_{1,i} + C_{2,s}\gamma_{2,i} + \dots + C_{m,s}\gamma_{m,i} = 0,$$

d. i. de voorwaarde, dat 1 der vergelijkingen (I) van de andere afhangt.

Heeft men dus met geen dezer beide bijzonderheden te doen, die van te voren zijn uit te sluiten, dan kan ook de determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-n,1} & \dots & \alpha_{m-n,m-n} \end{vmatrix}$$

niet 0 zijn. Maar dan is aan het systeem (II) niet anders te voldoen dan door

$$x_1'' = 0, x_2'' = 0, \dots x_{m-n}'' = 0. \quad (\text{III}).$$

Dit zijn de vergelijkingen van een ruimte van  $n$  afmetingen in het nieuwe coördinatensysteem (2).

Wij noemen in het volgende een zoodanige figuur van den eersten graad, identisch met een ruimte van  $n$  afmetingen, een  $n$ -dimensor.

7. Wij kunnen een vlakke voorstelling van een ruimte van  $m$  afmetingen verkrijgen door de assen zoo te bewegen, dat zij

alle in een enkel vlak komen te liggen, en daarbij ieder punt steeds door dezelfde coördinaten op de veranderde assen te blijven bepalen. Voor de voorstelling van wat bij den oorspronkelijken stand der assen in ieder afzonderlijk coördinaatvlak (combinatie der assen twee aan twee) geschiedde ten opzichte van snijdingen van lijnen enz., kan het in de vlakke teekening ontstaande overeenkomstige coördinaatvlak dienen; want dit kan slechts van het oorspronkelijke verschillen door de grootte van den hoek der assen; en deze grootte is van geen invloed, zoolang wij niet grootten van hoeken, of lengten van lijnen niet evenwijdig met een der twee betrokken assen beschouwen.

Dit is dus de wijze, waarop men in het platte vlak een voorstelling geeft van de puntbepaling in een ruimte van  $m$  afmetingen: Wij trekken  $m$  willekeurige assen  $OX_1, \dots OX_m$  door eenzelfde punt  $O$  en bepalen het punt  $(x_1, x_2, \dots x_m)$ , gelijk opgemerkt, door de geometrische som van de coördinaten  $x_1, x_2, \dots x_m$ , ieder gemeten langs hun as met willekeurigen maatstaf. Aldus is in de ruimte van 4 afmetingen het punt  $P$  bepaald door zijn coördinaten  $x, y, z, u$  (fig. 1). — Daar het vlak van teekening slechts 2 afmetingen bezit, is ieder punt van dit vlak de afteekening van een  $(m - 2)$ -voudige oneindigheid van punten der beschouwde ruimte. Intusschen is ieder punt dezer ruimte door zijn afteekening in het vlak volkomen bepaald, zoodra de geometrische som bekend is, die het opgeleverd heeft.

Voor  $m = 3$  valt de voorstelling met de gewone axonometrie samen.

8. Een  $(m - 1)$ -dimensor (6) in een ruimte van  $m$  afmetingen snijdt iedere coördinaatas in één punt. Want uit de gelijk-tijdige vergelijkingen van den  $(m - 1)$ -dimensor

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_{m-1} x_{m-1} + C_m x_m = S$$

en de  $m - 1$  vergelijkingen van de as  $OX_1$ :

$$x_2 = x_3 = \dots = x_{m-1} = x_m = 0$$

volgt voor de coördinaat van het snijpunt  $x'_1$ :

$$C_1 x'_1 = S, \quad x'_1 = \frac{S}{C_1}$$

een enkele bepaalde waarde. Noemen wij de snijpunten van den

$(m-1)$ -dimensor met de assen  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ , dan gaat de vergelijking van den  $(m-1)$ -dimensor over in

$$\frac{x_1}{x'_1} + \frac{x_2}{x'_2} + \dots + \frac{x_m}{x'_m} = 1.$$

De  $(m-1)$ -dimensor is dus door deze  $m$  snijpunten volkomen bepaald.

9. Een  $(m-1)$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen snijdt de bicoördinaatruimten volgens rechte lijnen. Uit de combinatie der vergelijkingen

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_mx_m = 8$$

en

$$x_3 = x_4 = \dots = x_{m-1} = x_m = 0.$$

Deze rechte lijnen gaan door de snijpunten van den  $(m-1)$ -dimensor met de assen (8).

10. Wij stellen den  $(m-1)$ -dimensor voor door deze snijlijnen, waardoor hij geheel bepaald is; zoo bijv. (fig. 2) een tridimensor in een ruimte van 4 afmetingen door ABCD:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{u}{d} = 1$$

en stellen ons dan de

OPGAVE. In een ruimte van  $m$  afmetingen een punt in den  $(m-1)$ -dimensor aan te nemen.

CONSTRUCTIE (voor 4 afmetingen). Neem 3 coördinaten  $x, y, z$  aan en bepaal respectievelijk de geometrische som van 1, 2, 3 hunner:  $OP_xP_yP_z$ ; trek  $OP_y$  tot waar zij AB snijdt (in  $Q_y$ ),  $OP_z$  tot waar zij  $Q_yC$  snijdt (in  $Q_z$ ); voorts  $u$  door  $P_z \parallel OU$  en  $DQ_z$  tot waar zij deze  $u$  snijdt (in P); dan is P met de coördinaten  $x, y, z, u$  het in den tridimensor gelegen punt.

BEWIJS.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{ON}{OQ_y} + \frac{NP_y}{OQ_y} = \frac{OP_y}{OQ_y};$$

eveneens

$$\frac{OP_y}{OQ_y} + \frac{z}{c} = \frac{OP_z}{OQ_z}; \quad \frac{OP_z}{OQ_z} + \frac{u}{d} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

11. Een  $(m-2)$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen is bepaald door de gemeenschappelijke punten van twee  $(m-1)$ -densors:



van het gegeven punt de coördinaten, die in de projectieruimte niet voorkomen,  $= 0$  te stellen. De eenvoudigste projectiën van een punt zijn die op de  $m$  assen ( $p = 1$ ): zijn coördinaten.

Door de projectie van een  $n$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen op een  $p$ -coördinaatruimte verstaat men het complex van projectiën zijner punten op die  $p$ -coördinaatruimte. Wanneer de  $n$ -dimensor gegeven is door de vergelijkingen van  $m - n$  ( $m - 1$ )-dimensors (11), kan de projectie blijkbaar geschieden door in de coördinaten van de aan deze  $m - n$  ( $m - 1$ )-dimensors gemeene punten  $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_m = 0$  te stellen.

Wanneer daarbij  $n < p$ , kan men dit verkrijgen door uit de  $m - n$  vergelijkingen (IV)  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_m$  te elimineeren, want dan houdt men  $m - n - (m - p) = p - n$  vergelijkingen over, waaraan de coördinaten der gemeenschappelijke punten (IV) (punten van den  $n$ -dimensor) voldoen onverschillig wat  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_m$  zijn, m. a. w. ook voor  $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_m = 0$ . Aangezien men  $p - n$  vergelijkingen krijgt in een ruimte van  $p$  afmetingen, zijn dit de vergelijkingen van een  $n$ -dimensor, en in dit geval is dus de projectie van een  $n$ -dimensor weder een  $n$ -dimensor. Van deze projectiën op  $p$ -coördinaatruimten zijn er  $\binom{m}{p}$  mogelijk, die niet alle onafhankelijk van elkaar zijn.

De eenvoudigste dezer projectiën zijn die op de  $\binom{m}{n+1} (n+1)$ -coördinaatruimten, omdat zij als  $n$ -dimensors graphisch door hun doorgangen voorgesteld kunnen worden (11). Een voldoende aantal dezer projectiën ( $m - n$ , mits daarin alle coördinaten voorkomen) van deze of de meer algemeene soort kunnen de oorspronkelijke vergelijkingen van den  $n$ -dimensor geheel vervangen.

Wanneer  $n \geq p$ , is de eliminatie van de  $m - p$  veranderlijken  $x_{p+1}, \dots, x_m$  niet mogelijk ( $m - n \leq m - p$ ). Er kunnen slechts  $m - n - 1$  veranderlijken geëlimineerd worden; daarna houdt men 1 vergelijking met, behalve de coördinaten  $x_1, \dots, x_p$ , die men wenschte te behouden, nog  $n + 1 - p$  coördinaten  $x_{p+1}, \dots, x_{n+1}$  over. In deze vergelijking kunnen natuurlijk voor  $x_1, \dots, x_p$  alle mogelijke stelsels van waarden aangenomen worden. Stelt men daarna in de aan deze stelsels beantwoordende punten de coördinaten  $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_{n+1} = 0$  (voor de projectie), dan krijgt men alle mogelijke punten der

$p$ -coördinaatruimte als resultaat der projectie. Een resultaat dus, dat niets bepaalt, dan alleen dit, dat de  $n$ -dimensor  $p$  of meer afmetingen bezit. Een complex van projectiën van deze soort is dus niet in staat het oorspronkelijk systeem te vervangen: Van een  $n$ -dimensor bestaan geen bepalende projectiën met evenveel of minder afmetingen dan hij zelf bezit.

Een  $(m - 2)$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen heeft enkel  $m$  eenvoudigste bepalende projectiën op  $(m - 1)$ -coördinaatruimten, waarvan er slechts 2 onafhankelijk van elkaar zijn.

14. Als een gevolg van de definitie van projectiën hebben wij nog de volgende stellingen (alle voor een ruimte van  $m$  afmetingen):

De snijding  $((m - 3)$ -dimensor (12)) van een  $(m - 2)$ -dimensor met een  $(m - 1)$ -coördinaatruimte valt in haar geheel in de projectie van dien  $(m - 2)$ -dimensor op die  $(m - 1)$ -coördinaatruimte. Eveneens valt de snijding  $((q - 2)$ -dimensor) met een  $q$ -coördinaatruimte in de projectie op een  $(m - 1)$ -coördinaatruimte, waarin al deze  $q$  coördinaten voorkomen.

Algemeener voor een  $n$ -dimensor: de snijding  $((n - 1)$ -dimensor) van een  $n$ -dimensor met een  $(m - 1)$ -coördinaatruimte valt in haar geheel in de projectie van dien  $n$ -dimensor op die  $(m - 1)$ -coördinaatruimte. Eveneens valt de snijding  $((n + q - m)$ -dimensor) van den  $n$ -dimensor met een  $q$ -coördinaatruimte geheel in de projectie van den  $n$ -dimensor op een  $p$ -coördinaatruimte,  $p \geq q$ , waarin al die  $p$  coördinaten voorkomen. In het bijzonder ( $p = n + 1$ ) vallen alle snijdingen van den  $n$ -dimensor met  $q$ -coördinaatruimten,  $m - n \leq q \leq n + 1$  (verg. 12 en hierboven), tot de snijpunten met de  $(m - n)$ -coördinaatruimten toe, in de door haar doorgangen gegeven eenvoudigste projectiën (13) van den  $n$ -dimensor. Is dus  $m - n > n + 1$  of  $n < \frac{m - 1}{2}$ , dan bevatten deze eenvoudigste projectiën geen der snijdingen.

15. Als bijzondere gevallen van het voorgaande heeft men bijv. in de ruimte van 4 afmetingen:

Een vlak snijdt de 4 coördinaatassen niet. Met ieder coördinaatvlak heeft het een punt, met iedere tricoördinaatruimte een rechte gemeen. Het heeft 4 projectiën (eenvoudigste projec-

tiën, ieder voorgesteld door 3 doorgangen) op de  $yzu$ ,  $zux$ ,  $uxy$  en  $xyz$ -ruimten. De 4 snijrechten met de tricoördinaatruimten en de 6 snijpunten met de coördinaatvlakken vallen respectievelijk in de 4 overeenkomstige projectiën.

Een rechte snijdt de coördinaatassen of -vlakken niet. Met iedere tricoördinaatruimte heeft zij een punt gemeen. Zij heeft 4 projectiën (rechten) op de  $yzu$ ,  $zux$ ,  $uxy$  en  $xyz$  ruimten; 6 projectiën (eenvoudigste projectiën, ook rechten) op de 6 coördinaatvlakken. De 4 snijpunten met de tricoördinaatruimten vallen in de overeenkomstige projectiën. Daar  $n < \frac{m-1}{2}$

is, bevatten de eenvoudigste projectiën deze snijpunten niet.

Twee ruimten (tridimensoren) snijden elkaar in een vlak. Een ruimte snijdt een vlak in een rechte. Twee vlakken, of een ruimte en een rechte, snijden elkaar in een punt. Een vlak en een rechte, of twee rechten, snijden elkaar in het algemeen niet.

16. OPGAVE. Als een  $(m-2)$ -dimensor gegeven is door twee  $(m-1)$ -dimensoren, nl. door de doorgangen daarvan (11), de doorgangen van een aangewezen projectie van den  $(m-2)$ -dimensor te construeeren.

Zijn (fig. 8, voor  $m=4$ )  $ABCD$  en  $A'B'C'D'$  de beide gegeven  $(m-1)$ -dimensoren, en laat gevraagd zijn de projectie van den  $(m-2)$ -dimensor op de  $(m-1)$ -coördinaatruimte  $x_m$  (d. i.  $u$ ) = 0.

De snijding van den  $(m-2)$ -dimensor met de coördinaatruimte  $x_m = 0$  moet in haar geheel in de gezochte projectie liggen (14). Maar van deze snijding zijn de snijpunten der  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$ ,  $\dots$   $x_{m-2}x_{m-1}$  doorgangen der  $(m-1)$ -dimensoren onderling, nl.  $S_{1,2}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $\dots$   $S_{m-2, m-1}$  (in de fig.  $S_{2,3}$ ), punten; en wel  $S_{1,2}$  in het coördinaatvlak  $x_1x_2$ ,  $S_{2,3}$  in  $x_2x_3$  enz. Alzoo moeten de  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$ ,  $\dots$   $x_{m-2}x_{m-1}$  doorgangen der gezochte projectie ook resp. door  $S_{1,2}$ ,  $S_{2,3}$ ,  $\dots$   $S_{m-2, m-1}$  gaan. De beide overige snijpunten der doorgangen  $S_{m-1, m}$  en  $S_{m, 1}$  (in de fig.  $S_{3,4}$  en  $S_{4,1}$ ) zijn geen punten van de verlangde projectie, omdat zij beide de coördinaat  $x_m$  bevatten; maar het zijn wel punten van den  $(m-2)$ -dimensor, en wel punten respectievelijk in de coördinaatvlakken  $x_{m-1}x_m$  en  $x_mx_1$ . Hun projectie geschiedt dus in die genoemde coördinaatvlakken en levert de punten  $C''$  en  $A''$  op de assen  $x_{m-1}$  en  $x_1$ . Daar-

door is nu de projectie volkomen bepaald. Haar doorgangen zijn  $A''B''C''$ .

17. OPGAVE. De eenvoudigste projectiën (13) op aangewezen coördinaatruimten te vinden van een  $n$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen, gegeven door  $m - n$  ( $m - 1$ )-dimensors.

Zij gevraagd de projectie te vinden op de  $(n + 1)$ -coördinaatruimte  $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = x_m = 0$ . Combineer de  $m - n$  ( $m - 1$ )-dimensors tot  $m - n - 1$  groepen van 2, waarin zij alle voorkomen, en bepaal van den ( $m - 2$ )-dimensor, door iedere groep voorgesteld, de projectie op de ( $m - 1$ )-coördinaatruimte  $x_m = 0$  (16). Voor het gemak kan men voor deze  $m - n - 1$  ( $m - 2$ )-dimensors nemen de snijding van één standvastigen der oorspronkelijke ( $m - 1$ )-dimensors met alle overige. Alsdan heeft men een ruimte met één der te elimineeren afmetingen minder en een dimensor minder gekregen. Met dit complex gaat men op dezelfde wijze met reductie voort, achtereenvolgens de coördinaten  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_{n+2}$  elimineerende, totdat men een enkelen  $n$ -dimensor in de  $(n + 1)$ -coördinaatruimte  $x_m = x_{m-1} = \dots = x_{n+2} = 0$  verkregen heeft. Het is de gevraagde projectie van den gegeven  $n$ -dimensor. Zij kan als  $n$ -dimensor in een  $(n + 1)$ -coördinaatruimte graphisch door haar doorgangen voorgesteld worden.

18. OPGAVE. Een punt aan te nemen op een  $n$ -dimensor in een ruimte van  $m$  afmetingen, bepaald door  $m - n$  ( $m - 1$ )-dimensors.

Men bepaalt een der eenvoudigste projectiën van den  $n$ -dimensor (17). In deze projectie neemt men  $n$  coördinaten willekeurig aan en bepaalt daardoor de  $(n + 1)$ ste (10). De beschouwde projectie is verkregen door projectie van de gemeenschappelijke punten van twee  $(n + 1)$ -dimensors. Wij kiezen een dezer twee en bepalen door de nu gevonden  $n + 1$  coördinaten de  $(n + 2)$ -de (10). De beschouwde  $(n + 1)$ -dimensor is verkregen door projectie van de gemeenschappelijke punten van twee  $(n + 1)$ -dimensors. Enz. Totdat men de laatste coördinaat uit een der oorspronkelijke ( $m - 1$ )-dimensors gevonden heeft.

Wanneer  $n = 0$ , d. i. wanneer men te doen heeft met een punt, bepaald door  $m$  ( $m - 1$ )-dimensors in een ruimte van  $m$



afmetingen, is het eenvoudig de vraag, de  $m$  coördinaten van het punt te vinden.

De gang is dezelfde als boven. De eerste coördinaat  $x_1$  is bepaald door de laatste projectie van het snijpunt van 2 rechten in een coördinaatvlak  $x_1x_2$  op de  $x_1$ -as. Wij kiezen een dezer rechten en bepalen uit haar de coördinaat  $x_2$ . Deze rechte is opgeleverd door de projectie van de snijding van twee vlakken in één tricoördinaatruimte  $x_1x_2x_3$  op het coördinaatvlak  $x_1x_2$ . Wij kiezen een dezer vlakken en bepalen er de derde coördinaat  $x_3$  door. Enz.

19. *Graphische oplossing van een stelsel vergelijkingen van den eersten graad met  $m$  onbekenden. Graphische eliminatie van  $n - 1$  onbekenden tusschen  $n$  vergelijkingen van den eersten graad met  $m$  onbekenden.*

Breng de vergelijkingen in den vorm

$$\frac{x_1}{a_{1,1}} + \frac{x_2}{a_{1,2}} + \dots + \frac{x_m}{a_{1,m}} = 1$$

. . . . .

$$\frac{x_1}{a_{n,1}} + \frac{x_2}{a_{n,2}} + \dots + \frac{x_m}{a_{n,m}} = 1$$

Neem op  $m$  willekeurige assen, die elkaar in 1 punt snijden, op willekeurige schalen voor alle assen (mits de bijbehorende coördinaten altijd met de passende schaal gemeten worden), de punten  $a_{1,1}, a_{2,1}, \dots a_{n,1}$  op  $OX_1$ ;  $a_{1,2}, a_{2,2}, \dots a_{n,2}$  op  $OX_2$  enz. en construeer de doorgangen van de  $n$  ( $m - 1$ )-dimensoren voor deze assen.

Bepaal, als  $n < m$ , de projectie van den door deze ( $m - 1$ )-dimensoren voorgestelden ( $m - n$ )-dimensor op de coördinaatruimte  $x_{m-n+2} = x_{m-n+3} = \dots = x_m = 0$  (de te elimineeren onbekenden) (17). Als de resulteerende ( $m - n$ )-dimensor de  $x_1, x_2, \dots x_{m-n+1}$  assen in de punten  $a_1, a_2, \dots a_{m-n+1}$  snijdt, is

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_{m-n+1}}{a_{m-n+1}} = 1$$

de eliminatievergelijking.

Bepaal, als  $n = m$ , de coördinaten van het door deze vergelijkingen voorgestelde punt (18); deze coördinaten zijn de gezochte onbekenden.

De constructie is uitgevoerd voor  $n = m = 4$  in fig. 4 voor de vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z + u &= 3 \\ -4x + 2y + z + 2u &= 11 \\ 3x + y + 2z - 2u &= 3 \\ x - 4y + 2z + u &= 3 \end{aligned}$$

waarvan te voren bekend was, dat daaraan voldeden de waarden  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$ ,  $u = 4$ .

Volgens het opgemerkte in N<sup>o</sup>. 19 zijn de vergelijkingen gebracht in den vorm

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} - \frac{z}{1} + \frac{u}{3} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

$$-\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} + \frac{z}{11} + \frac{u}{\frac{1}{4}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (II).$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{\frac{1}{2}} - \frac{u}{\frac{1}{2}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} + \frac{u}{3} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (IV).$$

Met de stukken  $\frac{1}{2}$ , 1,  $-1$  en 3 op de assen OX, OY, OZ, OU naar verschillenden maatstaf zijn de doorgangen van den tridimensor (I):  $I_x I_y I_z I_u$  geconstrueerd. Eveneens voor (II), (III), (IV). Daarna zijn volgens 16 de snijpunten gezocht van de overeenkomstige doorgangen van (II) met die van de drie overige tridimensors, bijv. van (II) met (I):  $I_{xy}II$ ,  $I_{yz}II$ ,  $I_{zu}II$  en  $I_{ux}II$ ; eveneens met (III) en (IV); en de beide snijpunten  $I_{yz}II$  en  $I_{zu}II$  ter eliminatie van  $z$  parallel aan OZ op OY en OU geprojecteerd in  $I'_y$  en  $I'_u$ . Daardoor en door de beide andere snijpunten  $I_{xy}II$  en  $I_{ux}II$  zijn de doorgangen  $I'_x I'_y I'_u$  van de projectie van het vlak (I), (II) op de tricoördinaatruimte  $xyu$  bepaald. Eveneens met (III) en (IV), die de vlakken  $III'_x III'_y III'_u$  en  $IV'_x IV'_y IV'_u$  leveren. Daarmee is de eliminatie van  $z$  volbracht. Van de 3 verkregen vlakken zoekt men de snijding van de doorgangen van (III') met de beide andere evenals boven en elimineert  $y$ ; daardoor krijgt men de beide rechten  $I''_x I''_u$  en  $IV''_x IV''_u$ , die ten slotte in hun snijding  $P_u$  de projectie van het gezochte punt op het vlak OXU leveren, met de coördinaten  $x$  en  $u$  (gevonden als 0,99 en 3,98, d. i. met

1 % en  $\frac{1}{2}$  % fout). Om door terugwerken de coördinaat  $y$  te vinden, kiest men het vlak (III') en bepaalt volgens 10 de 3e coördinaat  $y$  van een punt in dat vlak met de bekende coördinaten  $x$  en  $u$ : trek  $OP_u$  tot haar snijding met  $III'_x III'_u$  en verbind dit snijpunt met  $III'_y$ ; deze verbindingslijn snijdt de gezochte coördinaat  $y$  af. Eindelijk bepaalt men  $z$  uit (II) volgens hetzelfde N<sup>o</sup>: de rechte  $OP_u$  snijdt  $II_x II_u$  in een punt  $Q_u$  buiten de teekening; dit punt is met  $II_y$  verbonden en de snijding  $Q_y$  van deze verbindingslijn met  $OP_y$  met  $II_z$  vereenigd; de laatste rechte snijdt de gezochte coördinaat  $z$  af. Voor  $y$  is gevonden langs dezen weg 1,98 (1 % fout) en voor  $z$  3,10 (3 %).

---

# GRAPHISCHE OPOSSING VAN $n$ LINEAIRE VERGELIJKINGEN MET $n$ ONBEKENDEN

DOOR

F. J. V A E S.

De volgende graphische oplossing is uiterst eenvoudig, en blijft voor alle waarden van  $n$  dezelfde.

Zij gevraagd de oplossing van het stelsel:

$a_1x - b_1y + c_1z = d_1$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ,  $a_3x + b_3y - c_3z = -d_3$ ,  
dan neme men (fig. 1)  $AB = a_1$ ,  $BE = 1$ , trekke door E en A loodlijnen op AB, passe op de lijn door A van af A stukken af  $= b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ , daarbij lettend op het teeken van die getallen, verbind de eindpunten met B, zoodat op de lijn door E stukken  $\frac{b_1}{a_1}$ ,  $\frac{c_1}{a_1}$ ,  $\frac{d_1}{a_1}$  worden bepaald, en handele evenzoo voor  $a_2$  en  $a_3$ , zoodat men ook stukken  $\frac{b_2}{a_2}$ , enz.,  $\frac{b_3}{a_3}$ , enz. verkrijgt op de in fig. 1 aangegeven, of op eenige andere manier.

Uit de vergelijkingen volgt:

$$\frac{d_1}{a_1} = x - \frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}z, \text{ enz.},$$

dus:

$$\frac{d_2}{a_2} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}\right)z,$$

en

$$-\frac{d_3}{a_3} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_1}{a_1}\right)y - \left(\frac{c_3}{a_3} + \frac{c_1}{a_1}\right)z,$$

waarin  $x$  niet meer voorkomt.

Schrijft men deze:  $r_1 = p_1y + q_1z$ ,  $-r_2 = p_2y - q_2z$ , dan kan men  $r_1$ ,  $p_1$ , enz. onmiddellijk opmeten uit fig. 1.

Maakt men (fig. 2)  $A'B' = p_1$ ,  $A'q_1(\perp A'B') = q_1$ ,  $A'r_1 = r_1$ ,  $B'D' = 1$ , dan verkrijgt men op de loodlijn in D' op B'D' stukken  $\frac{r_1}{p_1}$  en  $\frac{q_1}{p_1}$ .

Door  $B'C' = p_2$ ,  $C'E' = 1$  te nemen kan men stukken  $\frac{r_2}{p_2}$  en  $\frac{q_2}{p_2}$  verkrijgen.

Daar  $\frac{r_1}{p_1} = y + \frac{q_1}{p_1} z$ , en  $-\frac{r_2}{p_2} = y - \frac{q_2}{p_2} z$ , is  $\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1} = \left(\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}\right) \times z$ , zoodat  $z$  op te lossen is op de in fig. 3 aangegeven wijze ( $A'B'' = \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}$ ,  $B''C'' = 1$ ).

Is  $z$  gevonden, dan kan men die waarde in fig. 2 afmeten, bijv. op  $B'A'$ , en door het eindpunt een loodlijn op  $B'A'$  trekken. Rechts van  $B'A'$  vindt men dan een stuk  $z \times \frac{q_1}{p_1}$ , dat men dadelijk van het stuk  $\frac{r_1}{p_1}$  kan aftrekken, waarmede dan  $y$  bekend is.

Ter contrôle kan men  $y$  ook vinden in het onderste gedeelte van fig. 2, waar  $y = -\left(\frac{r_2}{p_2} - z \times \frac{q_2}{p_2}\right)$ .

Meet men  $y$  en  $z$  af in fig. 1, bijv. langs BA dan heeft men op de loodlijn door het uiteinde van  $z$  een stuk naar rechts  $z \times \frac{c_1}{a_1}$ , en op de loodlijn door het uiteinde van  $y$  een stuk naar

links  $y \times \frac{b_1}{a_1}$ , terwijl men naar rechts een stuk  $\frac{d_1}{a_1}$  kan nemen,

zoodat men  $x = \frac{d_1}{a_1} + y \times \frac{b_1}{a_1} - z \times \frac{c_1}{a_1}$  kan construeeren. Ter contrôle kan men  $x$  ook teekenen in een of in de beide andere gedeelten van fig. 1.

Blijkbaar volgt men bij het voorgaande de gewone eliminatiemethode door optellen en aftrekken. De figuren en de deelen er van zijn onder elkaar geplaatst juist zooals men met de vergelijkingen doet. Er is echter geen bezwaar de deelen der figuren in elkander te schuiven, wanneer de duidelijkheid niet daaronder lijdt.

In fig. 1 werden de verhoudingen  $\frac{b_1}{a_1}$  enz. naar een enkele

lijn verschoven, evenzoo  $\frac{r_1}{a_1}$  enz. Door de lijn A'C' te plaatsen als op de teekening aangegeven, kan men dadelijk  $r_1$  en  $r_2$  bepalen. Evenzoo is in fig. 3 door juiste plaatsing van A"B" dadelijk de waarde  $\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1}$  aan te geven.

Bij  $n$  vergelijkingen heeft men  $n$  figuren. Elk der onbekenden vindt men steeds in de figuur, die gediend heeft om haar te elimineeren. Het spreekt van zelf, dat men  $BE = CH =$  enz. niet juist gelijk 1 behoeft te nemen, doch een willekeurige lengte  $l$  er voor kan kiezen. Alleen in de laatste figuur, waaruit men dus het eerst een onbekende oplost, is men genoodzaakt de lengte 1 te gebruiken.

De graphische oplossing kan belangrijke diensten bewijzen bij technische vraagstukken, welke enkele malen tot stelsels vergelijkingen leiden, waarvan de coëfficiënten als lijnen aan een constructiefiguur ontleend worden.

## L I T E R A T U U R O P G A A F.

F. J. v. D. BERG. Over de grafische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Versl. en Med. v. d. Kon. Akad. v. Wet. 3e reeks IV, 1888 met 1 plaat.

F. J. v. D. BERG. De constructiefiguur voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen beschouwd als configuratie.

Versl. en Med. v. d. Kon. Akad. v. Wet. 3e reeks V, 1889. In de eerste verhandeling verwijst Prof. v. D. BERG naar:

A. FAVARO. Leçons de statique graphique, traduites par P. FERRIER, 2e partie: Calcul graphique, 1885; en wel naar: Appendice du Traducteur au Chapitre VI, — B. Résolution graphique des équations, blz. 224—250;

en ook naar:

J. C. DIJXHOORN. Het bepalen der indicateurdiagrammen van een compoundmachine.

Tijdschrift v. h. Kon. Instituut v. Ingenieurs 1885—86, 2e Afl. 2e ged. plaat 11.

In deze verhandeling is  $n = 4$ .

Prof. v. D. BERG toont aan, dat de methode ook toe te passen is voor een willekeurige waarde van  $n$ .

— Een andere methode, waarbij men de coëfficiënten beschouwt als krachten, die volgens evenwijdige lijnen in het platte vlak werken, is van:

A. KLINGATSCH. Über die geometrische Lösung eines Systems linearer Gleichungen.

Monatshefte für Mathematik und Physik, 1892. III Jahrgang.

Een toepassing hiervan vindt men in:

J. HERZOG. Die Stromverteilung in Leitungsnetze. Electro-technische Zeitschr., 6 Jan. 1893. Heft 1.

Een opstel van:

V. LASKA over Graphische oplossing van vergelijkingen met 2 en 3 onbekenden komt voor in het Oostenrijksch tijdschrift voor wis- en natuurkunde: Casopis enz. deel XXIV, 1895.

— Een bijzondere methode van oplossen — niet graphisch — van:

LUDWIG SEIDEL. Über ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadraten führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen. Abhdlg. d. math.-phys. Klasse der Bayer. Akad. II Bd. 1874.

Een toepassing hiervan komt voor in:

J. TEICHMÜLLER. Über die Stromverteilung in elektrischen Leitungsnetzen.

Elektrotechnische Zeitschr. 15 Sept. 1893 Heft 37.

De methode is uitgebreid in brieven van R. MEHMKE, en P. A. NEKRASSOF in het Recueil mathématique de Moscou, deel XVI, 1892, waarin ook de methode van Prof. v. D. BERG besproken wordt.

---

**SUR UN THÉORÈME REMARQUABLE, QUI SE RAPPORTE À LA THÉORIE  
DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES À PARAMÈTRES RÉELS, DONT  
TOUTES LES RACINES RESTENT CONSTAMMENT RÉELLES.**

PAR

D. J. KORTEWEG.

1. THÉORÈME I<sup>1)</sup>. Soit :

(1) . . . . .  $\phi(a, b, c \dots x) = 0$ ,  
une équation algébrique qui, pour des valeurs réelles quelconques des paramètres  $a, b, c \dots$ , possède des racines exclusivement réelles. Soient  $a = a_1, b = b_1, \dots$  etc. des valeurs de ces paramètres pour lesquelles  $m$  racines de l'équation deviennent égales. Il faut alors que toutes les dérivées de  $\phi$ , telles que  $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial a}, \frac{\partial \phi}{\partial b}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial a}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b}, \dots$  jusqu' à celles de l'ordre  $(m-1)^{\text{ième}}$  incluses, s'annulent pour les valeurs :

(2) . . . . .  $x = x_1, a = a_1, b = b_1, \dots$   
où  $x_1$  représente la valeur des racines égales.

2. Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, nous voulons en montrer l'utilité et la portée en l'appliquant à l'équation séculaire bien connue :

$$\begin{vmatrix} {}_1a_1 - x & {}_1a_2 & \dots & {}_1a_n \\ {}_2a_1 & {}_2a_2 - x & \dots & {}_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}_na_1 & \dots & \dots & {}_na_n - x \end{vmatrix} = 0.$$

où . . . . .  ${}_pa_q = {}_qap$ .

On rencontre cette équation, par exemple, dans la théorie des substitutions linéaires orthogonales. On sait qu'elle ne possède que des racines réelles.

(<sup>1)</sup> C'est avec toute réserve que je donne pour nouveau ce théorème qui certainement ne manque ni d'élégance ni d'utilité. Mes propres recherches ne me l'ont pas fait rencontrer et une question dans l'Intermédiaire de Novembre 1897, la Question No. 1165, n'a pas amené une réponse.





Maintenant si, par impossible, les dérivées  $\frac{\partial \phi}{\partial a_1}, \frac{\partial \phi}{\partial b_1}, \dots$  n'étaient pas toutes zéro, on pourrait, comme première approximation, négliger le second et le troisième terme vis à vis du premier. Mais alors il est évident qu'on pourrait choisir les valeurs des accroissements  $\alpha, \beta, \dots$  de telle manière que les racines  $\xi'$  et  $\xi''$  de l'équation deviendraient imaginaires. Les racines  $x_1 + \xi'$  et  $x_1 + \xi''$ , qui remplacent dans l'équation  $\phi(x, a_1 + \alpha, b_1 + \beta, \dots) = 0$  les racines égales  $x_1$  de l'équation  $\phi(x, a_1, b_1, \dots) = 0$ , seraient donc imaginaires elles aussi, ce qui est en contradiction avec la supposition initiale formulée dans le théorème.

Remarquons encore que les approximations successives, dont on aurait besoin pour le calcul exact des accroissements  $\xi'$  et  $\xi''$ , correspondant à des valeurs données, mais très petites, des accroissements  $\alpha, \beta, \dots$ , ne sauraient rien changer à leur propriété d'être imaginaires. Elles n'ajouteraient que des quantités relativement insignifiantes aux valeurs de  $\xi'$  et  $\xi''$ , obtenues à la première approximation.

4. *Démonstration du cas général.* Nous supposons que le théorème soit prouvé pour le cas de  $m - 1$  racines égales. Alors pour  $m$  racines égales, les variations que ces  $m$  racines  $x_1$  subissent par le changement des  $a_1, b_1, \dots$  en  $a_1 + \alpha, b_1 + \beta, \dots$  se calculeront encore au moyen de l'équation (3). On développera le premier membre de cette équation jusqu'au terme

$$\frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \right)^{m-1} \phi$$

mais on profitera de la circonstance que l'égalité de  $m$  racines de l'équation  $\phi = 0$  entraîne nécessairement celle de  $(m-1)$  racines de l'équation  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ , qui, elle-même, d'après le théorème de Rolle, ne possède que des racines réelles.

En tenant compte de cette remarque, l'équation (2) se réduit à la forme :

$$(4) \dots \dots \sum \frac{\partial \phi}{\partial a_1} \alpha + \frac{1}{2} \left( \sum \frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \right)^2 \phi + \dots \\ \dots + \frac{1}{(m-1)!} \left( \sum \frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \right)^{m-1} \phi + \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \right)^m \phi + \dots = 0.$$

Supposons encore que le théorème ne soit pas vrai, c'est à dire qu'un ou plusieurs des  $(m - 1)$  premiers termes de l'équation (4) ne soient pas identiquement égaux à zéro. Alors, les termes d'ordre  $\leq m - 1$ , ne pouvant être détruits ici par des termes d'ordre  $\geq m$ , il faudrait que les racines  $\xi$  fussent d'un autre ordre de grandeur que les variations  $\alpha, \beta, \dots$  des paramètres. Elles devraient être notablement plus *grandes* que celles-ci.

Mais si la variation  $\xi$  surpasse notablement les variations  $\alpha, \beta, \dots$ , tellement même qu'elle est d'un autre ordre de grandeur, il est clair que l'équation (4) se réduit par première approximation à celle-ci :

$$(5) \dots\dots\dots \sum \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_1} \alpha + \frac{1}{2} \left( \sum \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \alpha \right)^2 \phi + \dots \\ \dots + \frac{1}{(m-1)!} \left( \sum \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \alpha \right)^{m-1} \phi + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi}{\partial \alpha_1^m} \xi^m = 0.$$

Or cette équation possède nécessairement, pour  $m > 2$ , des racines complexes, qui conduiraient, contrairement à la supposition initiale, à des racines complexes de l'équation :

$$\phi(x, a_1 + \alpha, b_1 + \beta, \dots) = 0.$$

5. 1<sup>re</sup> Remarque. On pourrait se demander si le réciproque du théorème énoncé est encore vrai. En d'autres mots :

lorsque pour une certaine fonction  $\phi$  les dérivées  $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial a}, \dots$  jusqu'à l'ordre  $(m - 1)^{\text{ème}}$  inclus, s'annulent dans tous les cas où  $m$  racines de l'équation  $\phi = 0$  deviennent égales entre elles, en peut on conclure que l'équation en question ne possède que des racines réelles, ou, du moins, qu'elle en possède un nombre invariable ?

Il est clair que la réponse doit être négative. En effet, pour que le nombre des racines réelles ne puisse changer pendant le passage par le cas de l'égalité, il faut de plus que l'équation qui doit servir en fin de compte à déterminer les variations  $\xi', \xi'' \dots$  des racines égales  $x_1$ , possède un nombre invariable de racines réelles pour toutes les valeurs réelles des accroissements infiniment petits  $\alpha, \beta, \dots$ .

Ordinairement cette équation sera de la forme :

$$(6) \dots\dots\dots \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \alpha \right) \phi = 0;$$

mais pour examiner les cas où elle conduit à des racines réelles multiples (1) on devra avoir recours quelquefois à des termes d'un ordre plus élevé. Pour découvrir la nature vraie, réelle ou imaginaire, de ces racines, qui ne sont égales que par première approximation, on devra ajouter certains termes provenant des expressions  $\frac{1}{m+1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_i} \alpha \right)^m \phi$ ,  $\frac{1}{(m+1)(m+2)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_i} \alpha \right)^{m+1} \phi$ , etc.

Il est facile d'ailleurs de justifier par un exemple très simple la réponse négative, que nous venons de donner.

L'équation  $x^2 - a^2 = 0$  n'a des racines égales que dans le cas  $a = 0$ . Dans ce cas les conditions formulées plus haut sont remplies. En effet, pour  $a = 0$ ,  $x = 0$  on a  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0$ ; pourtant l'équation a des racines réelles pour  $a > 0$  et des racines imaginaires pour  $a < 0$ .

L'équation (6) se réduit ici à  $2\xi^2 = 0$ . On n'en peut donc rien conclure. C'est le cas de pousser plus loin l'approximation et d'examiner l'équation :

$$(7) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_i} \alpha \right)^m \phi + \frac{1}{m+1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_i} \alpha \right)^{m+1} + \dots = 0.$$

Elle donne ici :

$$2\xi^2 - 2\alpha^2 = 0$$

comme on pourrait s'y attendre.

6. 2e Remarque. Les observations faites à l'occasion de la remarque précédente nous vont permettre de formuler le théorème qui suit :

THÉORÈME II. *Lorsqu' une équation algébrique*

$$\phi(a, b, c \dots x) = 0$$

*à paramètres réels variables, possède les propriétés suivantes :*

1° *que ses dérivées partielles*  $\frac{\partial \phi}{\partial a}, \frac{\partial \phi}{\partial b} \dots \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial a}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial b}, \dots$   
 $\dots \frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b} \dots$  *jusqu' à l'ordre*  $(m-1)$  *ième inclus, s'annu-*

1) Une racine simple  $\xi = 0$  devra être comptée pour réelle.

lent pour toutes les valeurs réelles des grandeurs  $a, b, c \dots x$ , qui satisfont aux conditions  $\phi = 0, \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \dots$   
 $\dots \frac{\partial^{m-1} \phi}{\partial x^{m-1}} = 0, \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m} \neq 0.$

2° que pour ces mêmes valeurs l'équation

$$(8) \dots \dots \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \xi + \sum \frac{\partial}{\partial a_1} \alpha \right)^m \phi = 0$$

possède un nombre invariable de racines réelles, quelles que soient les valeurs réelles des variations  $\alpha, \beta \dots$

3° qu'en outre un passage de plusieurs racines à la fois par l'infini <sup>1)</sup> ne puisse avoir lieu pour des valeurs réelles des paramètres, ou, s'il a lieu, ne change pas le nombre des racines réelles :

Alors le nombre de ces racines reste invariable pour toutes les valeurs (réelles) des paramètres.

Pour que ce théorème soit vrai dans tous les cas on devra considérer les racines égales comme intermédiaires entre les racines réelles et les racines imaginaires. Si elles se présentent dans l'équation (8) la détermination de leur nature vraie exigera quelquefois l'adjonction de termes d'ordre plus élevé. Comme racines de l'équation initiale  $\phi = 0$  on devra les ranger dans l'une ou dans l'autre catégorie selon qu'elles y entrent après une modification légère des paramètres.

7. *Démonstration du théorème précédent.* L'existence du théorème découle immédiatement de la remarque simple, que le passage des racines d'une équation du réel au complexe ne peut s'accomplir que par le cas de l'égalité. Il n'y a donc qu'une seule question à examiner là dessus. La nature réelle ou imaginaire des racines  $x_1 + \xi$  de l'équation  $\phi(x_1, a_1 + \alpha, b_1 + \beta, \dots) = 0$ , que l'équation (8) nous fait connaître en première approximation, ne peut-elle pas se changer par les approximations successives?

Dans le cas d'une racine *imaginaire* de l'équation (8), il suffit de remarquer, comme nous l'avons fait au § 3, que les

---

<sup>1)</sup> Ces passages par l'infini peuvent être étudiés sans peine au moyen de l'équation  $\phi(a, b, c \dots \frac{1}{y}) = 0.$

nouvelles approximations n'ajoutent que des quantités relativement insignifiantes aux valeurs obtenues à la première approximation. Elles ne peuvent donc pas faire disparaître la partie imaginaire.

Dans le cas d'une racine *réelle* l'addition d'une grandeur infiniment petite d'ordre supérieur, mais imaginaire, la ferait changer de nature. Pourtant s'il s'agit d'une racine *réelle simple*, il est évident qu'en devenant imaginaire elle devrait se doubler, ce qui est impossible parce que le nombre des racines, remplaçant les racines égales  $x_1$ , doit rester égal à  $m$ .

Dans le cas de racines réelles *multiples* il est nécessaire en effet, comme nous l'avons remarqué déjà, de pousser plus loin l'approximation pour pouvoir se décider sur leur nature vraie.

*Simplification du théorème précédent.* En général on pourra simplifier le théorème (II) en se bornant à examiner le cas  $m = 2$  et en ne s'occupant pas du passage des racines par l'infini <sup>1)</sup>.

Généralement, en effet, on peut passer d'une manière continue d'un système donné de valeurs  $a = a_0$ ,  $b = b_0 \dots$  à un autre système *quelconque* de ces valeurs sans rencontrer d'autres particularités que des racines finies doubles et des racines infinies simples. Ce n'est que dans des cas exceptionnels et dont l'exceptionnalité, pour ainsi dire, augmente avec le nombre des paramètres, qu'on sera conduit à considérer les complications plus grandes qui se présentent, lorsque  $m > 2$ .

8. Il nous reste encore à examiner le réciproque du théorème (II). Ce réciproque est-il vrai? En d'autres mots, toute équation algébrique à paramètres variables réels, dont le nombre des racines est *invariable*, possède-t-elle les trois propriétés, énoncées dans ce théorème? Ici encore la réponse est négative. En effet on peut ranger les équations à un nombre invariable de racines réelles sous *trois* catégories diverses.

La *première* catégorie renferme les équations où le nombre des racines réelles reste invariable parce que l'égalité de deux ou plusieurs racines, qui doit précéder tout passage du réel au complexe, ou vice versa, ne peut pas se présenter à cause

---

<sup>1)</sup> Dans l'*Intermédiaire* de Novembre 1897, Question N°. 1166, nous avons annoncé le théorème sous sa forme simplifiée.

que les équations  $\phi = 0$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  ne peuvent avoir aucune racine réelle commune, quelles que soient les valeurs réelles, attribuées aux paramètres.

En voici des exemples simples :

$$(x^2 + a)^2 + (x + b)^2 + 1 = 0; \quad \int_0^x (x^2 + 2ax + a^2 + b^2 + 1) dx + c = 0;$$

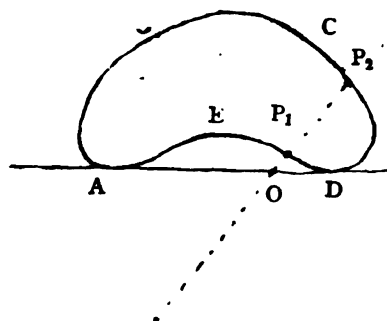
trop simples peut-être, mais qui suffisent pour montrer l'existence de cette catégorie.

Dans la *seconde* catégorie nous classons les équations où, comme dans le cas de l'équation séculaire, l'égalité des racines peut avoir lieu, mais n'amène jamais un changement de la nature des racines.

A cette catégorie, et à la rigueur aussi à la première, le réciproque du théorème est applicable, du moins dans sa forme simplifiée; mais il y en a une troisième qui fait exception.

Cette *troisième* catégorie présente la particularité que chaque fois qu'une paire de racines réelles, passant par l'égalité, devient imaginaire, une autre paire de racines subira l'opération inverse.

L'existence de cette troisième catégorie se démontre facilement par un exemple géométrique.



Soit ABCDEA une courbe algébrique (du quatrième degré par exemple),  $OP_1P_2$  une sécante mobile passant par un point fixe O de la tangente double; alors l'équation qui fera connaître les distances  $OP_1$ ,  $OP_2$  des points d'intersection au point fixe O, et qui renfermera nécessairement un paramètre variable dépendant de l'angle  $P_2OD$ , appartiendra à la catégorie en question, pour laquelle le réciproque du théorème II est en défaut.

dant de l'angle  $P_2OD$ , appartiendra à la catégorie en question, pour laquelle le réciproque du théorème II est en défaut.

## DE NOTATIE DER DECIMALE BREUKEN

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

Ce qu'un ordre d'hommes honore d'une profonde  
indifférence, d'autres en font leurs délices.

ORANAM.

In een verhandeling over de werken van John Napier, den uitvinder der logarithmen, aangeboden aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, heb ik als mijn overtuiging uitgesproken, dat wij onze hedendaagsche decimale notatie aan dezen verschuldigd zijn en niet aan Bürgi (en Pitiscus), zooals Wolf en Cantor beweren, noch aan Kepler, zooals Unger meent.

Ik stel mij voor, in dit opstel eenigszins uitvoerig de gronden te ontwikkelen, waarop mijn oordeel steunt.

In 1585 verscheen bij Christoffel Plantijn te Leiden van de hand van onzen Zuid-Nederlandschen stamgenoot Simon Stevin (1548—1620), door zijn Beghinselen der Weeghoonst, Weeghdaet en Beginnselen des Waterwichts „evenknie en voorlooper van Galilei” <sup>1)</sup>, een verhandeling over de tiendeelige breuken onder den titel:

De / Thiende / Leerende door onghehoorte lichticheyt / allen rekeningen onder den Menschen / noodich vallende, afveerdighen door / heele ghetalen sonder ghebrokenen. / Beschreven door Simon Stevin / van Brugghe. / Tot Leyden, / By Christoffel Plantijn. / M.D.LXXXV. / 8°. 36 pp.

Nog in hetzelfde jaar gaf Stevin in de Fransche taal bij denzelfden uitgever twee werken in één band over rekenkunde en algebra in het licht, L'Arithmétique en La Pratique d'Arithmétique, waarvan het tweede een vertaling van De Thiende bevat onder den titel:

<sup>1)</sup> Korteweg, Het Bloesitjdperk der Wiskundige Wetenschappen in Nederland, [Amsterdam] 1894, p. 4.



La Disme, Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. Premièrement describe en Flameng, & maintenant convertie en François, par Simon Stevin de Bruges.

Als aanhangsel vindt men De Thiende afgedrukt in De Decker's Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst, Ter Goude 1626, (waaruit ik citeer), en in diens Nieuwe Rabat-Tafels, Ter Goude 1630, nadrukken, die men soms afzonderlijk aantreft. En La Disme komt voor in Girard's Oeuvres Mathématiques de Stevin, Leyde 1634. Een Engelsche bewerking van De Thiende eindelijk, door Norton bezorgd, verscheen in 1608.

In zijn opdracht van De Thiende aan de „Sterrekiickers, Landtmeters, Tapiitmeters, Wijnmeters, Lichaemmeters int ghemeene, Muntmeesters, ende allen Cooplieden”, zegt Stevin: „Maer wat sal dit voorgestelde doch zijn? eenen wonderlicken diepsinnigen Vont? Neen voorwaer, maer eenen handel so gantsch slecht, datse nau Vonts name weerdigh en is . . . . Sy leert (op dat ick met een woort vele segge) alle rekeningen die onder de Menschen noodich vallen, afveerdigen sonder gebroken getalen: Inder voegen dat der Telkunstens vier eerste slechte beginnelsen, die men noemt Vergaderen, Aftrecken, Menighvuldighen, ende Deelen, met heele getallen tot desen genoegh doen . . . . Aengaende my yemant seggen mochte, dat vele saecken int eerste aensien dicmael besonder gelaten, maer als mense int werc wil stellen, so en kanmen daer mede niet uytrecten, ende gelijk't met de Vonden der Roersoeckers dickwils toegaet, welcke int kleene goet zijn, maer int groote en deugen sy niet. Dien verantwoorden wy alsulck twijfel hier geensins te wesen, overmits het int Groote, dat is in de saecke selver, nu dagelijcx metter Daet genoegh versocht wort, te weten door verscheyden ervaren Lantmeters alhier in Hollant, die wy dat verklaert hebben, welcke (verlaten 'tghene sy tot verlichtinghe van dien daer toe gevonden hadden, elck naer zijn maniere) dit ghebruycken tot hun groote vernoeginge, ende met sulcke vruchten, als de Natuere wijst daer uyt nootsaeklicken te moeten volghen”.

Blijkens het „Cort Begriip” omvat De Thiende twee deelen: 1) „Bepalingh, als wat dat sy (Thiende; Begin; Eerste, Tweede, &c.; Thiendetal”); 2) „Werkingh, die is der thiendetalens (Vergaderingh; Aftreckingh; Menighvuldigingh; Deelingh)”.

„Bij het voorghaende sal noch ghevoecht worden een Anhanghael, wijsende des Thiendens ghebruyck door sommige exempelen der Saecken.”

„Het eerste deel der Thiende Vande Bepalinghen.

#### I. Bepalinghe.

Thiende is een specie der Telkunsten, door de welcke men alle rekeningen onder den Menschen noodigh vallende, afveerdicht door heele getallen, sonder gebrokenen, gevonden uyt de thiende voortganck, bestaende inde Cijfferletteren daer eenigh getal door beschreven wort.

#### Verclaringhe.

Het sy een ghetal van Duyssent een hondert ende elf, beschreven met cijfferletteren aldus 1111, in de welcke blijktt, dat elcke 1, het thiende deel is van zijn naest voorgaende. Alsoo oock in 2378 elcke een van de 8, is het thiende deel van elcke een der 7, ende alsoo in allen anderen: Maer want het voegelik is, dat de saecken daermen af spreeken wil, namen hebben, ende dat dese maniere van rekeninge ghevonden is uyt d'anmerkinghe van alsulcken thienden voortganck, ja, wesentlick int thiende voortganck bestaet, als int volghende claerlick blijcken sal, soo noemen wy den handel van dien eygentlick ende bequaemelick, de Thiende. Door deselve worden alle rekeningen ons ontmoetende, volbrocht met besondere lichticheyt door heele ghetallen, sonder ghebrokenen, als hier naer opentlick bewesen sal worden.

#### II. Bepalinghe.

Alle voorghestelde heel ghetal, noemen wy begin, syn teecken is soodanigh ①.

#### Verklaringhe.

Als by ghelijckenis eenigh heel gegeven getal van drie hondert vierentsestigh, wy noemen 't drie hondert vierentsestigh beginselen, die aldus beschrijvende 364 ①. Ende also met alle andere dierghelijcke.

#### III. Bepalinghe.

Ende elck thiendedeel van de eenheyt des begins, noemen wy eerste, syn teecken is ①. Ende elck thiendedeel vande eenheydt der Eerste, noemen wy tweede, syn teecken is ②. Ende so voort elck thiendedeel der eenheyt van syn voorgaende, altijd in d'orden een meer.

## Verklaringhe.

Als 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, dat is te segghen 3 Eersten, 7 Tweeden, 5 Derden, 9 Vierden, ende soo mocht men oneyndelic voortgaen. Maer om van hare weerde te seggen, so is kennelic dat naer luyt deser Bepalinge, de voornoemde ghetallen doen  $\overline{10}$ ,  $\overline{100}$ ,  $\overline{1000}$ ,  $\overline{10000}$ , tsamen  $\overline{100000}$ . Also oock 8 ① 9 ① 3 ② 7 ③, zijn weert  $\overline{80}$ ,  $\overline{100}$ ,  $\overline{1000}$ , dat is tsamen  $\overline{10000}$  ende so met allen anderen dierghelijcke.

Het is ooc te aenmercken, dat wy inde Thiende nergens gebroken getallen en gebruycken: Ooc dat het getal van de Menighvuldicheyt der Teecken en, uytgenomen ①, nemmermeer boven de 9 en comt. By exempel: wy en schrijven niet 7 ① 12 ②, maer in diens plaetse 8 ① 2 ②, want sy so veel weert zijn.

## IV. Bepalinghe.

De getallen der voorgaender tweeder ende derder Bepalinge noemen wy int ghemeen thiendetalen.

## Eynde der Bepalinghen."

Aan deze bepalingen voegt Stevin bij de behandeling van de optelling nog de opmerking toe: „Soo in de ghegheven Thiendetalen eenich der natuerlicke orden gebraecke, men sal syn plaetse vullen met dat gebraeckende”, en dus in plaats van 5 ① 7 ② schrijven: 5 ① 0 ① 7 ②.

In „Het ander deel der Thiende van de Werckinghe” behandelt Stevin de optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deeling van tiendeelge breuken. Bv.:

$  \begin{array}{r}  \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \\  2\ 7\ 8\ 4\ 7 \\  8\ 7\ 6\ 7\ 5 \\  \hline  8\ 7\ 5\ 7\ 8\ 2 \\  \hline  9\ 4\ 1\ 3\ 0\ 4  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \\  2\ 3\ 7\ 5\ 7\ 8 \\  \hline  5\ 9\ 7\ 4\ 9 \\  \hline  1\ 7\ 7\ 8\ 2\ 9  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2} \\  3\ 2\ 5\ 7 \\  8\ 9\ 4\ 6 \\  \hline  1\ 9\ 5\ 4\ 2 \\  1\ 3\ 0\ 2\ 8 \\  2\ 9\ 3\ 1\ 3 \\  2\ 6\ 0\ 5\ 6 \\  \hline  2\ 9\ 1\ 3\ 7\ 1\ 2\ 2 \\  \textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  1 \\  18 \\  3164 \\  7617 \\  \hline  344352\ (\textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}) \\  3587 \\  36666 \\  36666 \\  36666  \end{array}  $

[Deeltal=3,44352; deeler=0,96.]

„De Wttreckinghen aller specien der Wortelen”, merkt de schrijver op, „meugen hier in oock gheschien”. De regels van bewerking worden bewezen door herleiding van de tiendeelige breuken tot gewone, waarbij Stevin telkens naar zijn „Fransche Arithmétique” verwijst.

Eindelijk zet de schrijver in het „Aenhanghsel” uitvoerig „het ghebruyck van dien” uiteen, „betoonende door 6 Leden, hoe alle rekeningen ter Menschelicker nootlickheydt ontmoetende” — als daar zijn: Rekeningen der Landmeterie, der Tapijtmeterie, vande Wiinmeterie, van de Lichaemmeterie int Ghemeen, van de Sterrekunst en der Muntmeesters, Cooplieden, ende allen Staten van Volck int ghemeen — „door haer lichtelick ende slechtelick kunnen afgeveerdicht worden met heele ghetallen”, om te besluiten met een beroep op de overheid, om door tiendeelige indeeling van munten, maten en gewichten te zorgen, dat in alle voorkomende gevallen onmiddellijk van zijn rekenwijze gebruik kan worden gemaakt. Tegelijkertijd evenwel drukt hij de vrees uit, dat aan zijn verlangen wel niet zoo spoedig zal worden voldaan, als wenschelijk zou zijn. „Daerom ghemerckt de wonderlicke groote nutbaerheydt van dien, het ware te wenschen dat eenighe, als deghene dier 't meeste gerief door verwachten, sulcx beneerstighden om ter Daet gebrocht te worden; Te weten dat beneven de ghemeene deelingen dieder nu der Maten, Gewichten, ende des Gelts zijn (blijvende elcke Hooftmate, Hooftghewicht, Hooftgelt, tot allen plaetsen onverandert) noch Wettelick door de Overheyte verordent wierde de voornoemde thiende deelinghe, op dat yghelick wie wilde, die mochte ghebruycken.

Het ware oock ter saecke voorderlick, dat de weerden des Ghelts voornamelick des geens nieu ghemunt wort op seeckere Eersten, Tweeden, ende Derden ghewaerdicht wierden.

Maer of dit al schoone niet so haest int werck ghestelt en wierde, ghelijck wel te wenschen waer, daer in sal ons ten eersten vernoeghen, dat het ten minsten onsen Naecomers voorderlick zijn sal, want het is seecker, dat bij aldien de Menschen in toecomenden tijdt, van sulcker aert zijn als sy in den voorleden gheweest hebben <sup>1)</sup>, dat sy soodanighen voordeel niet altijt versuymen en sullen.

<sup>1)</sup> Ziet op Stevin's geloof aan een „Wyseentyt . . . , vvaer in by de menschen een seltsaem vvetenschap gheveest heeft, t'vvelck vvy deur seker teyckens

Ten anderen, soo en ist voor yghelick int besonder de verworpenste wetenschap niet, dat hem kennelick is hoe het Menschelicke Geslachte sonder cost ofte arbeyt, zijn selven verlossen kan van soo vele groote moeyten, als sy maer en willen.

Ten laetsten; hoe wel misschien de Daet deses sesten Lidts voor eenigen Tijt lanck niet blijcken en sal, Doch soo kan een yghelick de voore vijfve ghenieten, so't kennelick is dat sommige der selver nu al degelick int werck ghestelt zijn."

Bezwaarlijk kon de schrijver vermoeden, dat twee eeuwen later met de uitvoering van zijn voorstellen pas een bescheiden begin zou worden gemaakt; veel minder, dat hij zich door zijn nuttige vinding tot een bondgenoot van „den algemeenen vijand des menschdoms" zou hebben gemaakt, die „door zulke middelen . . . Godsdienst, rust, zeden en ondergeschiktheid tot zoo verr' reeds verwoest heeft, en voortgaat deze aarde steeds dieper en dieper in een afgrond van jammeren te dompelen".<sup>1)</sup>

Het kan niet ontkend worden, dat reeds lang vóór Stevin aan een decimale rekening gedacht is, in zooverre men bv. bij de inrichting van sinustafels voor den straal van den cirkel een macht van tien nam, ja, zelfs behoorde het gebruik van gewone breuken met een term van de schaal van het tientallig stelsel tot noemer niet tot de uitzonderingen. Maar, om tot tiendeelige breuken te geraken, moesten de noemers worden weggelaten, moest worden ingezien, dat de tiendeelige schrijfwijze aan de rechterhand van het cijfer der ééntallen kan worden voortgezet, moest zich de overtuiging vestigen, dat de techniek der bewerkingen met tiendeelige breuken dezelfde, althans nagenoeg dezelfde is als met geheele getallen, die in het tientallig stelsel geschreven zijn, moest men zich de voordeelen bewust worden, die zoowel in de wetenschap als in de beroepen en bedrijven van het dagelijksch leven aan het gebruik van tiendeelige breuken verbonden zijn.

Eerst in De Thiende vindt men deze denkbeelden duidelijk uitgesproken en volledig toegelicht; vandaar, dat Stevin moet

---

ghevisselick mercken, doch sonder te vveten by vvie, vvaer, of vvanneer". (Stevin, Wisconetige Gedachtenissen, Eerste Stuck: Vant Weereltschrift, Leyden 1608, Tweede deel: Vant Eertelootschrift, p. 9.)

<sup>1)</sup> Bilderdijk, Verhandelingen, ziel-, zede-, en rechteleer betreffende, Leyden 1821 [het jaar der invoering van het Metrieke Stelsel in ons land], p. 154.

worden beschouwd als de man, aan wiens scherpsinnigheid wetenschap en practijk o. m. de uitvinding der tiendeelige breuken te danken hebben.

Kepler, die Stevin's werken niet gekend schijnt te hebben, beweert, dat „dise art der Bruchrechnung” door zijn vriend Joost Bürgi (1552—1632), den genialen en kunstvaardigen hofuurwerkmaker van Landgraaf Wilhelm IV van Hessen en Keizer Rudolf II en diens opvolgers, die zich door zijn talmen de eer der uitvinding van de logarithmen heeft laten ontgaan <sup>1)</sup>, „zu der sinusrechnung erdacht ist”.

In zijn *Auszug aus der Vralten MesseKunst Arohimedis*, Lintz 1626, past hij namelijk deze „behende Bruchrechnung” toe bij de „Rechnung der Cörperlichen Figuren, holen Gefessen vnd Weinfässer” en laat ter verklaring voorafgaan: „Fürs ander weil ich kurtze zahlen brauche, derohalben es oft Brüche geben wirdt; so mercke das alle ziffer, welche nach dem zeichen. (. folgen, die gehören zu dem Bruch, als der Zehler, der Nenner darzu wirt nicht gesetzt, ist aber allezeit eine runde zehnerzahl, von so vil Nullen, als vil ziffer nach dem zeichen kommen. Wanu kein zeichen nicht ist, das ist ein ganzte zahl ohne Bruch, vnnnd wann also alle ziffern nach dem Zeichen gehen, da heben sie biszweilen an, von einer Nullen. Dise art der Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinusrechnung erdacht, vnd ist darzu gut, das ich den Bruch abkürtzen kan, wa er vnnötig lang werden wil, ohne sonderen

---

<sup>1)</sup> In zijn *Tabulae Rudolphinae*, Ulm 1627, zegt Kepler: „Qui etiam apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem Neperianam, viam praeiverunt, ad hos ipseissimos Logarithmos. Etsi homo cunctator & secretorum suorum custos, foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit” (p. 11); maar geeft niettemin Napier de eer, die dezen toekomt: „Hæc ordinatio Canonis, faciem prætulit Joanni Nepero, Baroni Merchistonis, Logarithmorum inventori, . . .” (p. 19).

Bürgi's *Arithmetische vnd Geometrische Progress-Tabulen*, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrachen vnd verstanden werden sol, waarin de meetkundige reeks der „schwarze Zahlen” (numeri) van  $10^8$  tot  $10^9$  met het quotient 1,0001 en de rekenkundige reeks der „rothe Zahlen” (logarithmen) van 0 tot 230270 met het verschil 10 opklimt, hoewel reeds vóór 1611 voltooid, verschenen pas in 1620 te Praag onder de initialen J. B. en zonder het toegezegde „grondig onderricht”, dat evenwel als MS bij een exemplaar der *Progress-Tabulen* ingebonden bewaard gebleven en in 1866 door Gieswald gepubliceerd is.

schaden der iberigen zahlen; kan jhne auch etwa auff erhaltung der notdurfft erlengern. Item lesset sich also die gantze zahl vnnd der Bruch mit einander durch alle species arithmeticae handlen wie nur ein zahl. Als wann ick rechne 365 gulden mit 6 per cento wievil bringt es desz Jars interesse? das stehet nun also.

vnd bringt 21 gulden vnd 90 hundertheil,	3 (65
oder 9 zehentheil, das ist 54 kr.	6 mal
	facit 21 (90"

(p. 48).

Indersdaad bedient Bürgi zich zoowel in zijn Arithmetica <sup>1)</sup> als in zijn Progreß-Tabulen van tiendeelige breuken. „Bürgi gibt nun zunächst eine Anleitung zur Coss oder Algebra“, zegt Wolf in zijn beschrijving van de Arithmetica Byrgii <sup>2)</sup>, „und zwar theils zu den gewöhnlichen algebraischen Operationen, theils aber namentlich auch zu der von ihm muthmasslich unabhängige von Stevin in den Gebrauch eingeführten Dezimalrechnung.“

Den grössten Sinus setzt er gleich der Einheit, und alle andern Sinus drückt er, ganz ähnlich wie es in der Neuzeit gebräuchlich ist, in dieser Einheit aus; nur fehlt das Komma, welches er nöthigenfalls durch eine vor-, oder unter-gesetzte Null ersetzt <sup>3)</sup>. So stimmen seine

<sup>1)</sup> Een MS, dat zich in de bibliotheek der sterrenwacht te Pulkowa bij St.-Petersburg bevindt en door Bürgi waarschijnlijk in 1592/93 is samengesteld.

<sup>2)</sup> Wolf, Astronomische Mittheilungen XXXI, in: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 17<sup>ter</sup> Jahrgang, Zürich 1872, p. 261.

<sup>3)</sup> In een noot maakt Wolf de opmerking en herhaalt se in zijn Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur, 1<sup>ster</sup> Halbband, Zürich 1890, p. 63, dat Bürgi zich later „nach Keplers Zeugnis“ van een komma als decimaalteeken bediend heeft.

Maar Wolf citeert Keplers Zeugnis (p. 60) uit Kepleri Opera Omnia, ed. Frisch, vol. V, Francofurti a. m. et Erlangae 1864, waarin de decimaalbakken, waarvan Kepler's Auszug aus der Vralten MesseKunet Archimedis, Lints 1626, wemelt, door komma's vervangen zijn, zonder de aantekening van Frisch over te nemen, dat „Keplerus scripsit 21 ( 90“ (p. 547)!

Al had evenwel Kepler zich van decimaalkomma's bediend, dan sou hieruit zonder nadere bevestiging nog niet mogen worden afgeleid, dat dit teeken van Bürgi afkomstig is. Niettemin beweert Cantor in zijn Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2<sup>ter</sup> Band, Leipzig 1892, p. 567, op gezag van Wolf: „Ein Pünktchen oder eine den Einern ihre Wölbung zukehrende Halbklammer zur Abgrenzung von Dezimalstellen scheint zuerst Joost Bürgi benutzt zu haben“. En Unger in zijn „nach den Originalquellen bearbeitete“ Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig 1898, p. 104, zegt bevestigend: „das Decimalkomma führte Kepler ein“.

1414      1414      01414      001414  
 0            0

mit unsern

141,4      1,414      0,1414      0,01414

überein. Auch die abgekürzte Multiplication kennt und lehrt er in der jetzt noch gebräuchlichen Weise, wie das seiner Schrift entnommene Beispiel

$$\begin{array}{r}
 01234 \\
 12358 \\
 \hline
 01234 \\
 02468 \\
 0370 \\
 061 \\
 09 \\
 \hline
 01525
 \end{array}$$

zeigt, und bei Division oder Wurzelausziehung hängt er dem Dividend oder Radicand, wie wir es zu thun pflegen, nöthigenfalls Nullen an."

En in de inleiding der Progress-Tabulen vindt men o.a. 128099789<sup>0</sup> geschreven met de bijvoeging: „und werden alle Zeit bisz unter die <sup>0</sup> ganze verstanden und die folgen der Bruch" <sup>1)</sup>. Bürgi's schrijfwijze herinnert evenwel genoegzaam aan Stevin's notatie, om de veronderstelling te wettigen, dat Bürgi, die omstreeks 1592 zijn Arithmetica en tusschen 1603 en 1611 zijn Progress-Tabulen te Kassel samengesteld moet hebben, met Stevin's Thiende, die in 1585 te Leiden verscheen, bekend geweest is. Weliswaar verstond Bürgi Grieksch noch Latijn <sup>2)</sup>, maar dit bezwaar, door Cantor aangevoerd <sup>3)</sup>, verval, daar De Thiende zoowel in de Vlaamsche als in de Fransche taal werd uitgegeven.

Evenals Kepler voor Bürgi, zoo maakt de Frankforter geneesheer Johann Hartmann Beyer (1563—1625) in zijn Logistica

<sup>1)</sup> Gieswald, Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen, p. 29, in: Bericht über die St. Johannis-Schule, Dansig 1856.

<sup>2)</sup> In de voorrede der Arithmetica zegt Bürgi van sich zelf: „der Ich doch Griechischer und lateinischer sprach unerfahren und derohalben die Jenige, wölliche hiervon geschriben in Jrer rechten sprach nit vernehmen khönde". (Wolf, Astronomische Mittheilungen XXXI, t. a. p., p. 248.)

<sup>3)</sup> Cantor, t. a. p., p. 567.



Decimalis, Franckfurt a/M 1619 <sup>1)</sup>, voor zich zelf aanspraak op de eer der uitvinding van de tiendeelige breuken. De gewoonte der sterrenkundigen, om bogen kleiner dan een graad in zestigdeelige scrupula uit te drukken, bracht Beyer, die zich in zijn vrijen tijd dikwijls „mit mathematischen künsten erlustrirte“, naar hij zelf mededeelt, in 1597 op het denkbeeld, om de zestigdeelige indeeling, die lastige berekeningen vereischt, te vervangen door een tiendeelige, daar een zoodanige bij de optelling en de aftrekking, maar vooral bij de vermenigvuldiging en de deeling boven elke andere de voorkeur verdient. Hij noemt de tiendedeelen, honderdstedeelen, duizendste-deelen, . . . „erste, zweite, dritte, . . . Zehnder“, „erste, zweite, dritte, . . . Scrupul“ en „Primen, Secunden, Terzen, . . .“, plaatst achter het cijfer der ééntallen een stip en boven dit en de cijfers, die aan de rechterhand er van staan (meestal evenwel slechts hier en daar), de indices 0, I, II, III, IV, V, . . ., om hun betrekkelijke waarde aan te duiden; bv.:  $45.80932 = 45,80932$  en  $8.798 = 8,00798$ .

Hoewel Beyer den naam van Stevin nergens vermeldt, ver-  
toonen zijn Primen, Secunden, Terzen, . . . zooveel gelijkenis

<sup>1)</sup> Logistica Decimalis: / das ist: / KUnst Rechnung der / Zehentheyligen Brüchen. / denen Geometris, Astronomis, Landtmessern, Inge- / neurn, Visirern, vnd ins gemein allen Mechanicis vnd Arithme- / ticis zu vnglaublicher Leichterung jhrer Mühesamen Rechnungen, Extra- / ctionen der Wurtzeln, sonderlich aus den Irrationalsabln, auch zur Constru- / ction einer neuen Tabulæ Sinuum vnd anderer vielerhandt / nützlicher canonum, & c. vber die maas dienst- / lich vnd nothwendig. / Beschrieben, durch / Johann Hartmann Beyern, D. Med. ord. / zu Franckfurt am Meyn. / Anno M.DC.XIX. / Getruckt zu Franckfurt, / durch Nicolaum Hoffmann, In verlegung / Jacob Fischers S. Erben. /

Unger, t. a. p., p. 106, vermeldt een uitgaaf der Logistica Decimalis van 1603, maar niet als „bron“ en schijnt dit werk dus niet zelf onder de oogen gehad te hebben.

Op een desbetreffende aanvraag bij de Stadtbibliotheek te Frankfort a/M ontving ik de mededeeling, dat de „Bibliothek von Johann Hartmann Beyers Logistica Decimalis nur eine Ausgabe von 1619 besitzt, die, nach der Vorrede zu schliessen, die erste ist“.

Niet onvermeld mag evenwel blijven, dat in twee brieven van Beyer aan Kepler, ged. 29 September 1616 en 28 April 1617, decimale breuken voorkomen met de notatie:

$$444, 2^I, 3^{II}, 4^{III}, 0^{IV}, 3^V + = 444,28403 \dots$$

(Kepleri Aliorumque Epistolæ Mutuæ, ed. Hansch, Lipsiæ 1718, Epist. 262 & 263.)

met de Primes, Secondes, Tierces, . . . van La Disme, dat zijn bekendheid met Stevin's werk bezwaarlijk betwijfeld kan worden. Hoe dit zij, de prioriteit der vinding komt aan Stevin toe, die buitendien Bürgi in volledigheid van behandeling en beide zijn mededingers, wat de toepassingen betreft, zeer verre achter zich laat.

Keeren we tot Stevin terug. Diens keuze van een notatie voor de tiendeelige breuken, waarin hij niet zeer gelukkig geweest is, vindt haar verklaring in de hem alleen eigen manier, om de machten van de onbekende in een vergelijking aan te duiden door de exponenten zonder meer ieder binnen een kring te plaatsen, een navolging van de schrijfwijze  $1, 2, 3, \dots$ , waarvan Bombelli zich in zijn Algebra, Bologna 1572, bedient <sup>1)</sup>).

Zoo vindt men in Stevin's Arithmétique, Leyde 1585, een gegeven getal met ① en de machten van de onbekende met ①, ②, ③, . . . <sup>2)</sup> aangeduid; aldus:

$$1 \text{ ② egale a } - 6 \text{ ①} + 16,$$

$$9 \text{ ④} + 12 \text{ ③} \text{ egales à } 30 \text{ ②} + 204 \text{ ①} + 171,$$

waarvoor wij thans schrijven:

$$x^2 = -6x + 16,$$

$$9x^4 + 12x^3 = 30x^2 + 204x + 171.$$

<sup>1)</sup> qu'aussi a usé Raphael Bombelle, exepte ①.

Girard, Oeuvres Mathématiques de Stevin, Leyde 1634, Vol. I, p. 8.

<sup>2)</sup> Zelfs merkt Stevin uitdrukkelijk op, dat bv.  $\frac{1}{2}$  binnen een kring, den kubiekwortel uit het quadraat van de onbekende zou beteekenen, zonder evenwel van deze s. i. nuttelooze uitbreiding van het begrip macht gebruik te willen maken.

„Toutesfois”, zegt hij, „le  $\frac{1}{2}$  en circolo seroit le caractere de racine de ①, parceque le meisme (suivant la reigle de multiplication des autres quantites) multiplié en soy donne produit ①, & par consequent  $\frac{1}{2}$  en un circolo seroit le caractere de racine quarrée de ③, par ce que telle  $\frac{1}{2}$  en circolo multipliée en soy donne produit ③, & ainsi des autres; de sorte que par tel moyen on pourroit de toutes simples quantites extraire especes de racines quelconques, comme racine cubique de ② seroit  $\frac{1}{2}$  en circolo, &c. . . . .

Or si l'usage de telles quantitez pouvoit avancer en la reigle de trois algebratique (vulgairement diete equation) à sçavoir que par icelles on sceust venir au dessus des quantitez ④ ③ ② ① ① de Lois de Ferrare — d. w. z. de vierde-machts-vergelijkingen, die door Ludovico Ferrari (1522—1562) zijn opgelost — (oe qu'avons tenté, mais combien qu'ainsi je pouvois extraire racines de toutes quantitez; toutesfois n'y avons peu avenir, comme à son lieu en dirons plus amplement) certes leur usage seroit par raison à conceder. Mais n'estant cela pour l'heure pas ainsi, userons seulement les vulgaires entieres, d'autant plus que toutes computations algebratiques se peuvent achever sans icelles.”

Girard, t. a. p, p. 6.

Bij meer onbekenden onderscheidt Stevin: „quantitez premiere-  
ment posées ou positives” (onze  $x$ ) en „quantitez postposées”  
met name „secondement, tiercement, . . . posées” (onze  $y$ ,  
 $z$ , . . .) en duidt deze met de voorvoegsels „sec, ter, . . .”  
aan, zooals uit den aanhef van de „Briefve Collection des  
Characteres qu'on usera en ceste Arithmetique” <sup>1)</sup> moge blijken:

Les caracteres signifians quantitez sont tels.

① Commencement de quantité qui est nombre Arith. ou  
radical quelconque.

① prime quantité.

② seconde quantité.

③ tierce quantité.

④ quarte quantité, &c.

Les caracteres signifians postposées quantitez sont tels.

1 sec ① Vne prime quantité secondement posée.

4 ter ② Quatre secondes quantitez tiercement posées, ou  
procedans de la prime quantité tiercement posée.

1 ① sec ① Produit d'une prime quantité par une prime  
quantité secondement posée.

5 ④ ter ② Produit de cinq quartes quantites par une  
seconde quantité tiercement posée,

waarvoor wij thans schrijven:

$a, x, x^2, x^3, x^4, y, 4z^2, xy$  en  $5x^4z^2$ .

Waar dus Stevin in zijn Arithmétique de machten van een  
zelfde grondtal als commencement de quantité, prime quantité,  
seconde quantité, . . . onderscheidt en in zijn Thiende de ge-  
heelen beginselen, de tiendedeelen eersten, de honderdstedeelen  
tweeden, . . . noemt, daar ligt het vermoeden voor de hand,  
dat hij bij de keuze van zijn notatie voor de tiendeelige breu-  
ken met ①, ①, ②, . . . de machten van  $1/10$  heeft willen  
aanduiden.

Buitendien zullen de Latijnsche benamingen scrupula prima,  
secunda, tertia, . . . en (partes) minutæ primæ, secundæ, tertiæ,  
. . . voor minuten, seconden, tertiën, . . ., alsmede de ten  
tijde van Stevin reeds lang algemeen gebruikelijke schrijfwijze  
 $25' 37'' 54'''$ , waar de accenten Romeinsche cijfers verbeelden,  
wel niet zonder invloed op diens keuze geweest zijn.

Niet onvermeld eindelijk mag blijven, dat Stevin zich in zijn

<sup>1)</sup> Girard, t. a. p., p. 19.

Wisconstige Gedachtenissen, Leyden 1605/8, bij de zestig-deelige indeeling van graden (die hij „trappen” noemt), uren en dagen soms van dezelfde notatie bedient als bij de decimale breuken. Bv.:

127 tr. 54 ①; 35 tr. 12 ① 30 ② ¹);

Sonnens middelloop van een dach:

59. ① 8. 17. 13. 12. 31 ²);

lanckheyt des jaers by Ptolemeus:

365 daghen 5 uyren 55 ① 12 ② ²),

in ander verdeeling sonder uyren te noemen:

365 daghen 14 ① 48 ② ²).

Wij laten thans een overzicht volgen van de verschillende wijzen, waarop men de tiendeelige breuken geschreven vindt.

Stevin, de grondlegger der nieuwe rekenwijze, bedient zich, zooals we reeds weten, in De Thiende, Leyden 1585, van de schrijfwijze:

941①3①0②4③,

maar plaatst bij de uitvoering van bewerkingen de aanwijzers soms boven, soms onder de cijfers; van nullen aan de linkerhand maakt hij geen gebruik:

8 ① 2 ②; 5 ② 2 ③ 9 ④;

een enkelen keer komt een gebroken decimaal voor:

13 ① 3 ① 3 ② 3½ ③.

Stevin's omslachtige notatie schijnt weinig navolging gevonden te hebben. De Decker bedient zich er van in zijn Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst, Ter Goude 1626 (diens Nieuwe Telkonst, inhoudende de Logarithmi voor de Ghetallen beginnende van 1 tot 10000, enz., Ter Goude 1626, en diens Nieuwe Rabat-Tafels, Ter Goude 1630, heb ik niet kunnen raadplegen), maar laat niet zelden de aanwijzers weg op dien aan de rechterhand na:

006250 ⑥ = 0,006250.

En in een onvoltooid MS van Frans van Schooten van omstreeks 1622 komt op p. 7 onder het opschrift: „Vande Tiende

¹) Stevin, Wisconstige Gedachtenissen, Eerste Stuck, Vant Weereltschrift, Leyden 1608, Eerste Deel: Vanden Driehouckhandel, p. 59.

²) Stevin, t. a. p., Derde Deel: Vanden Hemelloop, p. 18.

Getallen", Stevin's notatie in vereeniging met de komma als decimaalteeken voor:

$$846,875 \textcircled{3}^1).$$

Bürgi maakt, zooals reeds medegedeeld is, in zijn *Arithmetica* 1592/98, gebruik van de schrijfwijzen:

$$\begin{array}{cccc} 1414; & 1414; & 01414; & 001414; \\ 0 & 0 & & \end{array}$$

in de inleiding van zijn *Progress-Tabulen*, 1608—1611, vindt men geschreven:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & & & & \\ 128099789; & 40200309; & 50400; & 0749472554 = & 0,749472554. \end{array}$$

De *Arithmetica* en de inleiding der *Progress-Tabulen* zijn evenwel door Bürgi niet in druk gegeven en hebben dienvolgens op de definitieve keuze van een notatie weinig invloed kunnen uitoefenen.

Pitiscus, die van Bürgi onderwijs genoten schijnt te hebben<sup>2)</sup>, al weet men niet waar en wanneer, maakt in zijn *Trigonometria*, *Augustæ Vindelicorum* 1608 (alsmede in de Frankforter editie van 1612, maar niet in de Augesburger van 1600), melding van de tiendeelige breuken<sup>3)</sup>. Hij schrijft, evenals Bürgi soms:

$$09 = 0,9; \quad 05176381 = 0,5176381.$$

Cantor's meening<sup>4)</sup>, dat Pitiscus in den *Canon Triangulorum* achter zijn *Trigonometria* de stip als decimaalteeken zou gebruiken, waarin ligt opgesloten, dat ons decimaalteeken van dezen (en Bürgi) afkomstig zou wezen, berust op een misverstand. In Pitiscus' tafel zijn de sinussen, tangenten en secanten berekend voor stralen van verschillende grootte:  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^{10}$ ,  $10^{11}$ , zelfs  $10^{12}$ . Door middel van stippen wordt aan-

<sup>1)</sup> Bierens de Haan, *Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden*, 1878, p. 267.

<sup>2)</sup> *Adhuc aliter, per subtensas: ex mente Justi Byrgij.*

Pitiscus, *Trigonometria*, *Augustæ Vindelicorum* 1608, p. 40. (De aanbalingen uit de editie van 1608 komen niet in die van 1600 voor.)

<sup>3)</sup> *Ostendit enim, omnes istas subtensas esse minores radio, & quasi partes quaedam radij: quæ partes vulgo sic scriberentur,  $\frac{1414}{10000}$ , sed multò compendiosior & ad calculum accommodatior est ista scriptio 05176381. Omnino autem idem isti numeri valent, sicut hi duo numeri 09 &  $\frac{9}{10}$  idem valent.*

Pitiscus, t. a. p., p. 39.

<sup>4)</sup> Deze *Trigonometrie* [van Pitiscus] sind Tabellen beigegeben, welche die trigonometrischen Linien, Sinus u. s. w., liefern und swar in der Auflage von 1612 [die van 1608 kent Cantor niet] mit Dezimalstellen, welche durch einen Punkt von den übrigen Stellen getrennt sind.

Cantor, t. a. p., p. 585.

geduid, waar men ze moet afbreken, als men den straal =  $10^9$ , en waar, als men den straal =  $10^{10}$  wil stellen; vandaar, dat in sommige sinussen en secanten twee stippen voorkomen. Waar geen stip staat, zooals in de tangenten en secanten van meer dan  $85^\circ$ , moet de straal op  $10^5$  gerekend worden, tenzij door vergelijking met sinussen, tangenten en secanten van dezelfde kolom anders blijkt.<sup>1)</sup> Bv.:

sin 1" . . . . . 48	sin 26° 31' . . 44645.81
sin 2" . . . . . 97	sin 88° 39' . . 99386.482
sin 3" . . . . . 1.45	sin 87° 42' . . 99919.4395
sin 4" . . . . . 1.94	sin 89° 57' 8" . 99999.96523
sin 5" . . . . . 2.42	sin 89° 59' 17" 99999.99782.7
sin 2° 47' . . . 4855.92	sin 89° 59' 31" 99999.99901.16
tang 1" . . . . . 48	tang 84° 23' . . . 1016833.16
tang 34" . . . . 16.48	tang 85° 8' . . . 1174478
tang 75° 19' 381629.57	tang 89° 59' 13" 438861282
sec 12" . . 100000.00019.86	sec 25° 26' . . . . 110731.475
sec 39" . . 100000.00178.7	sec 34° 45' . . . . 121706.78
sec 1' 14" . 100000.00644	sec 87° 42' . . . . 2491790
sec 1° 30' . 100034.2792	sec 89° 59' 58" 10313240313

Pitiscus bedient zich dus in zijn Canon Triangulorum van de stip niet als decimaal- maar als scheiteeken, evenals men reeds sedert het midden van de veertiende eeuw gewoon was geweest groote getallen gemakshalve door komma's en stippen in groepen van drie cijfers te verdeelen; een decimaalteeken echter kent Pitiscus evenmin als Bürgi.

Kepler bedient zich aanvankelijk van de haak als decimaalteeken, zooals mag blijken uit de voorbeelden:

2 (06 ;      36 (5654 ;      45 (012 ;  
(5 ;      (2647 ;      0 (3 ;

<sup>1)</sup> Radium assumimus pro necessitate varium. Nempe, vel quinq; , vel septem, vel octo, vel novem, vel decem, vel undecim, vel etiam duodecim notarum. Quam varietatem prudens logista facile conciliabit: semper tantæ magnitudinis radium ad calculum adhibendo, ad quantæ magnitudinis radium quilibet in canone numerus factus sit. Quod ut statim appareat, sinus tangentés & secantes ad radium 100000. factos, à cæteris, quàm pro isto radio maioribus puncto interjecto ubiq; discrevimus. Imò, ubi plusquam decem notarum est radius, etiam alterum punctum interjecimus: quo sinus tangentés & secantes radij decem notarum à sinibus tangentibus & secantibus maioribus è vestigio discerni dignosciq; possent. Ubi nullum punctum apparet, ibi radius tantum est quinq; notarum. (100000.) ut in omnibus tangentibus & secantibus postremorum quinq; graduum.

die aan zijn *Auszug aus der Vralten MesseKunst Archimedis*, Lintz 1616, zijn ontleend; in zijn *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*, Lincii 1515, waarvan de *Auszug* een omwerking is, komen nog geen decimale breuken voor, hoewel zijn kennis-making met Bürgi van 1603 dateert. Later maakt Kepler in zijn *Chilias Logarithmorum ad totidem Numeros Rotundos*, Marpurgi 1624, en in zijn *Tabulæ Rudolphinæ*, Ulmæ 1627, uitsluitend van de stip gebruik.

Beyer eindelijk, met wien we van de Deutsche wiskundigen afscheid nemen, scheidt in zijn *Logistica Decimalis*, Franckfurt 1619, de geheelen door een stip van de breuk, maar behoudt de aanwijzers en laat, wat zeker geen verbetering mag heeten, de nullen aan de linkerhand uit de breuk weg:

$$\begin{array}{c} 0 \quad \text{III} \quad \text{V} \quad \text{V} \\ 45.80932; \quad 8.798. \end{array}$$

Bij onze westelijke bureu vinden we door Napier, den „King of Numbers”, in zijn *Rabdologia*, Edinburgi 1617, onder vermelding van Stevin's notatie en van diens *Arithmetica Decimalis*, de in 1608 verschenen Engelsche bewerking van De Thiende, driemaal een komma als decimaalteeken gebruikt, eenmaal zelfs met weglating van de aanwijzers:

$$1993,273; \quad 1993,273; \quad 1994,9160').$$

\*) a) *Admonitio pro Decimali Arithmetica.*

*Verum si displiceant hæ fractiones [gewone breuken], quibus accidunt diversi denominatores, propter difficultatem operandi per eas, & magis ardeant alie,*

64  
136  
316  
118,000  
141  
402  
429  
861094,000 ( 1993,273  
432  
3888  
3888  
1296

*quarum denominatores sunt semper partes decimæ, centesimæ, millesimæ, &c. quas doctissimus ille Mathematicus Simon Stevinus in sua Decimali Arithmetica sic notat, & nominat ① primas, ② secundas, ③ tertias: quia in his fractionibus eadem est facilitas operandi quæ est integrorum numerorum, poteris post finitam vulgarem divisionem, & periodis aut ommatibus terminatam, (ut hic in margine) adiecere dividendo, aut reliquis unam cyphram pro decimis, duas pro centesimis, & tres pro millesimis, aut plures deinceps ad libitum: & cum his procedere operando ut supra, veluti in superiore exemplo hic repetito (cui tres cyphas adiecimus) fiet quotiens 1993,273: qui significat 1993 integra: & 273 millesimas*

864  
3024  
1296

[Deeltal=861094; deeler=432.] partes, seu  $\frac{273}{1000}$ , seu (ex Stevino) 1993,273:

*reliquæ autem novissimæ, 64, in hac decimali Arithmetica spernuntur, quia exigui sunt valoris, & similiter in similibus exemplis.*

Napier, *Rabdologia*, Edinburgi 1617, p. 21.

Adriaen Vlack, de „konstlievende" chef der uitgeverfirma Pieter Rammasseyn, „Boeckverkooper inde corte Groenendal, int Vergult ABC" te Gouda, van wien de eerste volledige tafel van de gewone logarithmen der getallen van 1 tot 100000 in tien decimalen afkomstig is, die als „Editio Secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum" van Briggs' *Arithmetica Logarithmica*, Londini 1624 — maar zonder diens medeweten — in 1628 te Gouda verscheen, vervangt in de Nederlandsche bewerking van de *Rabdologia*, die hij onder den titel: „Vande Tellingh door Roetjes", voor De Decker's Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst, Ter Goude 1626, „in Duyts oversettede", Napier's notatie weer door die van Stevin:

1993,273; 1993 ② ① 7 ② 3 ③; 1994 ① 9 ① 1 ② 6 ③ 0 ④ <sup>1</sup>.

Evenzoo treft men Stevins's notatie aan in de Latijnsche uitgaven der *Rabdologia*, die in 1626 en 1628 te Leiden verschenen.

In Napier's onvoltooid gebleven „booke of Arithmeticke and Algebra", zijn *Ars Logistica* en zijn *Algebra*, die misschien van vóór 1594 dagteekenen en in 1839 door Mark Napier te Edinburgh zijn uitgegeven, komen geen tiendeelige breuken voor, evenmijn als in zijn *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, Edinburghi 1614.

Maar in zijn *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, Edinburghi 1619, die vóór de *Descriptio* is samengesteld, doch pas twee jaren na Napier's dood door diens zoon Robert,

δ) Exemplum huius compendii.

[Verkorte vermenigvuldiging.]

Cum diameter circuli 100000 det peripheriam 31416 ferè, quæritur diameter 635	
635	quantam habeat peripheriam? numeri secundi 31416 sextuplum,
1884 9 .	triplum, & quintuplum (abecissis dextimis & inutilibus figu-
094 2 . .	ris) sunt 18849 . . , 0942 . . , & 167 . . . , quibus ad levam
16 7 . . .	æquatis per adjectionem cyphræ, ut in Cap. de multiplicatione
1994 8	diximus & decussatim (ut à margine) locatis, & (præter quatuor
seu 1995 ferè, pro quarto quæsito. Verum, si quando quartum hunc præcisè magis	dextimorum locorum figuras) additis, provenit numerus 1994
635	quam faciliè producere velis, perficièda est multiplicatio
1884 96	integrè, ut in sequente schemate, & fiet productum 1994.
094 248	
16 7080	9 1 6 0 (per decimalem Arithmetica) id est, 1994.1608
1994 9160	vel 1994.1608 pro quarto quæsito: quod per vulgarem
	abbreviationem valet 1994.1608. Et ita in omnibus aliis.

Napier, t. a. p., p. 41.

<sup>1</sup>) De Decker, *Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst*, Ter Goude 1626, p. 20 en p. 39.



onder medewerking van Briggs, in het licht verscheen, vindt men de notatie der tiendeelige breuken verklaard <sup>1)</sup> en bij de benadering der logarithmen de decimale rekenwijze geregeld toegepast met de stip als decimaalteeken en zonder aanwijzers; ontbreken de geheelen, dan wordt er geen nul vóór de stip geschreven, een gebruik, dat tot op heden met name onder Engelsche schrijvers navolging vindt:

25.803; 9999998.0005021; . 49997122; . 0004950.

In den Canon Mirificus achter de Descriptio komen de logarithmen evenwel voor zonder decimalen, afgerond in geheelen.

Evenzoo vindt men de stip als decimaalteeken gebruikt in Wright's vertaling van de Descriptio, die van 1616 dateert en waarvan Napier de kopij heeft doorgezien <sup>2)</sup>: in de bijbehoorende tafel zijn de logarithmen in één cijfer minder opgegeven dan in den Canon van 1614, met uitzondering van die der sinussen van 89°—90°, waarin dit cijfer door een stip van de overige cijfers gescheiden is. Evenals bij Pitiscus zou men hier echter ook aan een scheiteeken zonder meer kunnen denken.

In de Toelichtingen van Briggs bij Napier's aanhangsel „Over de berekening van een ander en beter soort van logarithmen”, in de Constructio, komt naast de stip de breukstreep als decimaalteeken voor:

$$25118865 = 2, \overline{5118865} \text{ } ^3).$$

<sup>1)</sup> In numeris periodo sic in se distinctis, quicquid post periodum notatur fractio est, cujus denominator est unitas cum tot cyphris post se, quot sunt figure post periodum.

Vt 10000000.04, valet idem, quod 10000000 $\frac{4}{100}$ . Item 25.803, idem quod 25 $\frac{803}{1000}$ . Item 9999998.0005021, idem valet quod 9999998 $\frac{5021}{1000000}$ . & sic de cæteris.

Napier, Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio, Edinburghi 1619, p. 6.

<sup>2)</sup> But now, some of our countrymen in this island, well affected to these studies, and the more public good, procured a most learned mathematician to translate the same into our vulgar English tongue, who after he had finished it, sent a copy of it to me, to be seen and considered on by myself. I having most willingly and gladly done the same, find it to be most exact and precisely conformable to my mind and the original. Therefore it may please you who are inclined to these studies, to receive it from me and the translator, with as much good will as we recommend it unto you.

The authors Preface to the Admirable Table of Logarithmes.

<sup>3)</sup> In de Lyon'sche uitgaaf van de Constructio (1620) vindt men de breukstreep, waarvan de bedoeling blijkbaar niet begrepen is, tot onder de cijfers van de geheelen doorgetrokken,

Van dezelfde notatie bedient zich Briggs in den verklarenden tekst van zijn *Arithmetica Logarithmica*, Londini 1624:

$$\begin{array}{l} 14; \quad \underline{4578}; \quad \underline{562341325}; \quad \underline{100008}; \quad \underline{100041\frac{1}{2}}; \\ 75; \quad \underline{067}; \quad \underline{0002}; \quad \underline{12124,85565,29831,6}; \end{array}$$

maar in de tafel wordt de komma, zoo noodig voorafgegaan door een nul, als decimaalteeken gebruikt:

$$\log 2 = 0,30102,99956,6398.$$

Vlaek behoudt in zijn bewerking van de *Arithmetica Logarithmica*, Goudæ 1628, in de tafel de schrijfwijze van Briggs, maar herstelt in den verklarenden tekst de noemers in hun eer:

$$\begin{array}{r} 00041\frac{1}{2} \\ 1 \overline{) 100000} \end{array}$$

Oughtred verbetert in zijn *Clavis Mathematicæ*, Oxoniæ 1631, de Briggs'sche notatie, door de breukstreep van een dwarsstreep te voorzien, die de cijfers der ééntallen en tiendedeelen scheidt, en een nul te gebruiken, om het ontbreken van geheelen aan te duiden:

$$0\overline{)56}; \quad 0\overline{)056}; \quad 0\overline{)00005}; \quad 246\overline{)914}.$$

Van dezelfde notatie bedient zich Wallis in zijn *Mathesis Universalis*, Oxoniæ 1657; in zijn *Treatise of Algebra*, London 1685, daarentegen maakt hij van de stip gebruik.

De Schot Hume eindelijk noteert in zijn *Traité de la Trigonometrie*, Paris 1636, het aantal der decimalen in Romeinsche cijfers achter de breuk:

$$\begin{array}{l} 77815125 . viij = 0,77815125; \\ 27944880467 x . = 2,7944880467. \end{array}$$

Bij Fransche schrijvers vond ik in Herigone's *Cursus Mathematicus*, Tomus II, Paris 1634, naast:

$$0307 = 0,307 \text{ en } 72345'' = 72,345$$

een dubbelpunt als decimaalteeken gebruikt:

$$72 : 345; \quad 6 : 04; \quad 30 : 007;$$

en in Dechales' *Cursus seu Mundus Mathematicus*, Tomus I, Lugduni 1674, een vierkante haak:

$$4720[7489; \quad 489[05; \quad 0[00436.$$

In ons land zijn, voor zoover ik heb kunnen nagaan, geen andere decimaalteekens in gebruik geweest dan komma's en punten. Zoo vindt men in De Graaf's Vier Boeken. Drie vande Driehoekmetinge, En een vande Telkunstigen . . . Mitsgaders vande ontbindinge der Rechtlinische en Klootze Driehoeken, Amsterdam 1659, voor de telkunstigen, d. z. de logarithmen, van 2 en 1.02 opgegeven:

0.30102.99956.6 en 0.00860.01717.6.

Uit een en ander blijkt:

1) dat men met inbegrip van een paar notaties, die ik niet tot bepaalde personen weet terug te brengen, een breuk als  $38\frac{547}{8}$  bv. aldus geschreven vindt:

$$\begin{array}{ccccccc} & \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & & \\ 38 & \textcircled{0} & \textcircled{5} & \textcircled{1} & \textcircled{4} & \textcircled{2} & \textcircled{7} \textcircled{8}; \quad 3 \ 8 \ 5 \ 4 \ 7; \quad 3 \ 8 \ 5 \ 4 \ 7; \quad 38547 \textcircled{8}; \quad 38,547 \textcircled{8}; \\ & & & & & \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 3 \ 8 \ 5 \ 4 \ 7; \quad 38,5 \ 4 \ 7; \quad 38.547; \quad 38.547; \quad 38,5',4'',5'''; \quad 38547''; \quad 38547.iiij; \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & 38547; \quad 38547; \quad 38(547; \quad 38[547; \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & 38557; \quad 38\frac{547}{8}; \quad 38|547; \quad 38^{547}; \quad 38_{547}; \\ & & & & & 38:547; \quad 38\cdot547; \quad 38.547; \quad 38,547; \end{array}$$

waarbij de Romeinsche cijfers I, II, en III meestal door accenten worden aangeduid; —

2) dat komma's en stippen weliswaar reeds sedert het midden van de veertiende eeuw als scheiteekens zijn gebezigd, om groote getallen in groepen van drie cijfers te verdeelen, maar dat ze als decimaalteekens voor den eersten keer voorkomen, de komma in Napier's *Rabdologia*, Edinburgi 1617, en de stip in diens *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, Edinburgi 1619, waarvan de samenstelling van vóór 1614 dateert, alsmede vermoedelijk in Napier-Wright's *Description of the Admirable Table of Logarithmes*, London 1616, „perused and approved by the Author”. Aan den wijsgeer van Merchiston Castle en niet aan Bürgi en Pitiscus, noch aan Kepler, hebben wij derhalve de notatie te danken, die Stevin's „Thiende Telkonst” zoozeer in practische bruikbaarheid heeft doen winnen.

# OVER DE ONTWIKKELING VAN EENE FUNCTIE IN EENE FACULTEITENREEKS

DOOR

DR. J. C. KLUYVER.

In het volgende wordt onder eene faculteitenreeks verstaan eene reeks van de gedaante

$$\frac{\lambda_0}{z} + \lambda_1 \frac{1!}{z(z+1)} + \lambda_2 \frac{2!}{z(z+1)(z+2)} + \dots \lambda_n \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} + \dots$$

Uit de bekende formule

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{n! \, n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

volgt, dat de faculteitenreeks tegelijk convergent of divergent is met de reeks, waarvan de algemeene term is  $\lambda_n : n^x$ . Laatstgenoemde is absoluut convergent in het geheele  $z$ -vlak, indien

$$\lim \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| < 1.$$

Van convergentie is geen sprake, indien de bedoelde limiet grooter dan de eenheid is, mocht echter

$$\lim \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| = 1$$

en

$$\lim n \left[ 1 - \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \right] = \alpha$$

zijn, dan zal de reeks convergeeren voor alle waarden van  $z$ , die voldoen aan de voorwaarde

$$\Re z + \alpha > 1,$$

en divergeeren wanneer

$$\Re z + \alpha < 1.$$

Eene lijn in het  $z$ -vlak op afstand  $-\alpha + 1$  van de as der imaginairen getrokken, scheidt het convergentie- van het divergentiegebied. In het volgende zal worden aangenomen, dat deze lijn met de as der imaginairen samenvalt, en zoo zal dan hier alleen gehandeld worden over faculteitenreeksen, waarvoor

$$\lim \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| < 1,$$

die convergent zijn in het geheele vlak, en over de zulke waarvoor,

$$\lim \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| = 1, \quad \lim n \left[ 1 - \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \right] = 1,$$

en die dus convergeeren rechts van de as der imaginairen, divergeeren links daarvan.

Wij stellen nu de vraag: onder welke omstandigheden kan eene gegeven functie  $\phi(z)$  door eene faculteitenreeks van bovenstaanden vorm worden voorgesteld. Het is duidelijk, dat voor talloze functies eene dergelijke voorstelling onmogelijk is. Eene eerste voorwaarde toch, die bevredigd moet zijn, is, dat  $\phi(z)$  zich holomorph moet gedragen rechts van de as der imaginairen, eene tweede is blijkbaar, dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \phi(R e^{i\theta})$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

eene eindige waarde moet hebben. Men overtuigt zich gemakkelijk, dat deze eigenschappen der functie wel noodig, maar niet voldoende zijn. Eene in vele gevallen meer afdoende beslissing op de gestelde vraag kan verkregen worden met behulp van een paar integraalstellingen, waarvan het beginsel reeds is toegepast door R. Murphy in zijne verhandeling: „On the inverse method of definite integrals with physical applications.” (Cambridge Phil. Soc. Transact. IV, p. 353). Het door Murphy verkregen resultaat luidt (met eene zeer ondergeschikte wijziging in de notatie): Als

$$\phi(x) = \int_0^1 t^{x-1} f(t) dt,$$

zal omgekeerd  $f(t)$  worden gevonden als de coëfficiënt van  $\frac{1}{x}$  in de ontwikkeling van  $t^{-x} \phi(x)$ .

Algemeen geldig is dit resultaat wel niet (men neme bijv.  $f(t) = (1-t)t$ , er komt dan  $\phi(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}$  en de voorgeschreven ontwikkeling van  $\phi(x)t^{-x}$  doet  $f(t)$  niet te voorschijn komen), Murphy voegt dan ook verschillende beperkingen toe. Hij onderstelt, dat  $f(t)$  behoort tot de „functions generally received in analysis” en dat  $\phi(x)$  is „essentially composed of negative powers of  $x$ .”

Intusschen kan men met eene kleine wijziging en omkeering in de volgorde van Murphy's denkbeeld gebruik maken, om eene kenmerkende eigenschap der faculteitenreeks te bewijzen. Uitgaande van de reeks

$$\phi(y) = \sum_0^{\infty} \lambda_n \frac{n!}{y(y+1) \dots (y+n)},$$

die minstens rechts van de as der imaginairen convergeert, kan men berekenen de integraal

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \phi(y) (1-t)^{-y} dy$$

in de onderstelling  $|t| < 1$ .

Term voor term integreerende, heeft men

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{n! (1-t)^{-y}}{y(y+1) \dots (y+n)} dy = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n_k (1-t)^k \int_{k+\delta-i\infty}^{k+\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-v}}{v} dv,$$

en bedenkende, dat

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{bt}}{t} dt = \begin{cases} 2\pi i & b > 0 \\ \pi i & b = 0, \\ 0 & b < 0 \end{cases}$$

ten slotte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{n! (1-t)^{-y}}{y(y+1) \dots (y+n)} dy = \sum_0^n (-1)^k n_k (1-t)^k = t^n,$$

wat ook door residuenrekening te vinden is.

De faculteitenreeks voldoet derhalve aan de eigenschap, dat voor alle  $t$ , waarbij  $|t| < 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \phi(y) (1-t)^{-y} dy = \sum_0^{\infty} \lambda_n t^n = h(t) \dots \dots \text{I).}$$

De hier verkregen machtreeks is behoorlijk convergent, omdat ondersteld is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \leq 1$ . De mogelijkheid bestaat, dat zij nog convergeert voor  $t = 1$ , hoewel dit geenszins noodzakelijk is. In allen gevalle levert iedere faculteitenreeks door de boven beschreven integratie eene functie  $h(t)$ , die holomorph is in een cirkel met straal 1 om den oorsprong als middelpunt getrokken. Wij noemen dit de eigenschap I) der faculteitenreeks.

Uit de machtreeks  $h(t)$  kan nu steeds door Murphy's integraal de faculteitenreeks  $\phi(y)$  teruggevonden worden.

Immers uit

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t)^{\delta_1} \sum_0^{\infty} \lambda_n t^n = \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow 1} (1-t)^{\delta_1 - \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\delta + iv) (1-t)^{-iv} dv,$$

volgt voor elke positieve  $\delta_1$ , die grooter is dan de willekeurig klein aangenomen positieve grootheid  $\delta$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t)^{\delta_1} h(t) = 0.$$

Het product  $(1-t)^{s-1} h(t)$  is dus voor alle positieve  $s$ , hoe klein ook, tusschen 0 en 1 te integreeren, en men heeft

$$\int_0^1 (1-t)^{s-1} h(t) dt = \sum_0^{\infty} \lambda_n \frac{\Gamma(s) \Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} = \phi(s) \dots \text{II)}$$

Het zijn nu de beide eigenschappen I) en II), die voor de faculteitenreeks kenmerkend zijn. Iedere functie  $\psi(z)$ , die deze eigenschappen vertoont, kan in eene faculteitenreeks worden ontwikkeld, die minstens in de rechterhelft van het  $z$ -vlak convergeert. Indien toch  $\psi(z)$  volgens I) eene functie  $h(t)$  levert, holomorph in een cirkel met straal 1 om den oorsprong, en van dien aard, dat het product  $(1-t)^{s-1} h(t)$  volgens II) kan worden geïntegreerd, is er altijd eene faculteitenreeks  $\phi(z)$  aan te geven, die dezelfde  $h(t)$  levert en dan is volgens II) de functie  $\psi(z)$  identiek met  $\phi(z)$ .

De eigenschappen I) en II) leveren dus het middel om te onderzoeken of  $\psi(z)$  door eene faculteitenreeks kan worden voorgesteld.

Op te merken valt, dat zoo eene functie  $\psi(z)$  de eigenschappen I) en II) bezit, men mag besluiten tot de vergelijking

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-uz} dz \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \psi(y) e^{uy} dy.$$

De hier voorkomende dubbele integraal is, zooals Kronecker (Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, p. 222) zegt, niets anders dan de dubbele integraal van Fourier voor complexe veranderlijken. Intusschen bezit eene functie  $\psi(z)$ , voor welke bovenstaande vergelijking geldt, nog niet de eigenschappen I) en II) afzonderlijk. Uit de onderstaande voorbeelden blijkt de mogelijkheid, dat hetzij de eigenschap I), hetzij de eigenschap II) niet doorgaat. Zoo kan men beproeven om  $\Gamma(z)$  in eene faculteitenreeks te ontwikkelen, al is het van te voren duidelijk, dat een zoodanige ontwikkeling onmogelijk is.

Men heeft voor

$$\begin{aligned} \psi(z) = \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(1+z)}{z} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(y) (1-t)^{-y} dy &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1-t)^{-y}}{y} dy \int_0^{\infty} e^{-u} u^y du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-u} du \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{u}{1-t}\right)^y}{y} dy = \int_{1-t}^{\infty} e^{-u} du = e^{-1+t} = h(t). \end{aligned}$$

Bij  $\Gamma(z)$  behoort dus eene functie  $h(t)$ , die aan alle vereischten voldoet. De eigenschap I) is hier dus aanwezig, niet alzoo de eigenschap II), want men heeft

$$\int_0^1 (1-t)^{z-1} h(t) dt = \int_0^1 (1-t)^{z-1} e^{t-1} dt = \int_0^1 e^{-u} u^{z-1} du = P(z).$$

Niet de functie  $\Gamma(z)$  wordt teruggevonden, slechts het gedeelte, dat na wegname van het overal holomorfe gedeelte terugblijft.



Wel heeft men

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} P(y) (1-t)^{-y} dy = \frac{1}{2\pi i} \left[ e^{-1} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-y}}{y} dy + \int_0^1 e^{-u} du \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{u}{1-t}\right)^y}{y} dy \right] =$$

$$e^{-1} + \int_{1-t}^1 e^{-u} du = e^{-1+t} = e^{-1} \sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} = h(t),$$

en daarom geldt, en wel in het geheele  $z$ -vlak, zooals bekend is,

$$P(z) = e^{-1} \sum_0^{\infty} \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n)}.$$

Een tweede voorbeeld levert de functie  $\psi(z) = \frac{e^{-z}}{z}$ , waarbij niet nog onmiddellijk het denkbeeld aan eene faculteitenreeks geheel en al onmogelijk schijnt. Uit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \psi(y) (1-t)^{-y} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left[ \frac{1}{e(1-t)} \right]^y}{y} dy = \begin{cases} \frac{1}{0} & \text{voor } t \begin{cases} > 1 - e^{-1}, \\ < \end{cases} \end{cases}$$

leidt men af, dat  $h(t)$  niet holomorph is in den cirkel met straal 1 om den oorsprong. De ontwikkeling in eene faculteitenreeks is dus uitgesloten, toch bezit  $\psi(z)$  de eigenschap II), want

$$\int_0^1 (1-t)^{z-1} h(t) dt = \int_{1-e^{-1}}^1 (1-t)^{z-1} dt = \frac{e^{-z}}{z} = \psi(z).$$

Het voorafgaande veroorlooft al dadelijk sommige functies aan te geven, die zeer stellig in faculteitenreeksen kunnen worden ontwikkeld. Het zijn in de eerste plaats machtrekken voortlopende naar omgekeerde machten van  $z + a$ , waarbij  $\Re a \leq 0$ .

Immers

$$\psi(z) = \frac{1}{(z+a)^t}$$

geeft

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-y}}{(y+a)^k} dy = \frac{1}{2\pi i} (1-t)^a \int_{a+\delta-i\infty}^{a+\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-v}}{v^k} dv = \frac{(1-t)^a}{(k-1)!} \left( \log \frac{1}{1-t} \right)^{k-1} = h(t)$$

en vervolgens

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{s+a-1} \left( \log \frac{1}{1-t} \right)^{k-1} dt = \frac{1}{(s+a)^k} = \psi(s).$$

Is eene functie in eenvoudigste breuken ontbonden van de gedaante

$$\phi(y) = \sum_1^{\infty} \frac{\beta_k}{z + a_k}, \quad (a_k \geq 0)$$

dan komt er blijkbaar

$$h(t) = \sum_1^{\infty} \beta_k (1-t)^{a_k},$$

en zoo deze reeks voor  $t=0$  nog convergeert, en  $h(t)$  voor  $t=0$  werkelijk holomorph blijft, is weder de ontwikkeling van  $\phi(y)$  in eene faculteitenreeks mogelijk. In het algemeen bestaat dienaangaande geen zekerheid; als voorbeeld neme men

$$\phi(y) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{y + k^2},$$

er komt dan

$$h(t) = \sum_1^{\infty} (1-t)^{k^2}$$

en deze functie  $h(t)$  is voor  $t=0$  niet holomorph.

In het bijzonder volgt, dat elke functie, die in het geheele  $z$ -vlak om den oorsprong naar machten van  $\frac{1}{z}$  kan worden ontwikkeld door eene faculteitenreeks is voor te stellen, al zijn de coëfficiënten dezer faculteitenreeks niet zoo gemakkelijk te bepalen.

Omgekeerd blijkt in sommige gevallen uit de gedaante van de functie  $h(t)$ , afgeleid uit eene gegeven faculteitenreeks  $\phi(y)$ , of  $\phi(y)$  al of niet naar machten van  $\frac{1}{y}$  ontwikkelbaar is.

Uitgesloten bv. is zulk eene ontwikkeling, wanneer  $h(t)$  in  $t=1$  holomorph blijkt, en men heeft



*E.*  
*tuss*

*I'u*

*III'u*

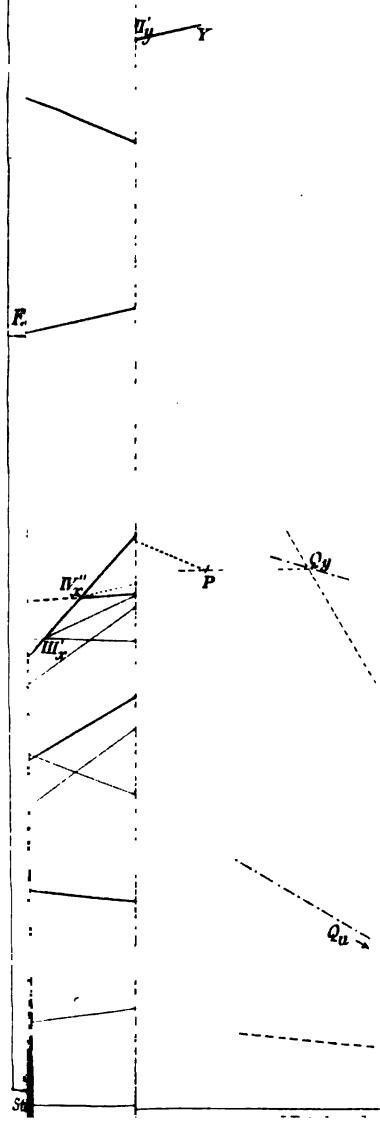
*R'u*

*Elimin  
tusschen*

*I') uit I)*

*III') uit III)*

*IV') uit IV)*





$$h(t) = \sum_0^{\infty} \alpha_n (1-t)^n.$$

Indien dan  $h(t)$  werkelijk transcendent is, vindt men

$$\phi(z) = \int_0^1 \sum_0^{\infty} \alpha_n (1-t)^{n+z-1} dt = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n}{z+n}$$

en eene zoodanige functie is door eene machtreeks in  $\frac{1}{z}$ , geldig in het geheele  $z$ -vlak, niet voor te stellen.

De ontwikkeling naar  $\frac{1}{z}$  van eene functie  $\psi(z)$  is dus geenszins een vereischte voor het bestaan der faculteitenreeks. Uit de beide voorbeelden, die thans nog mogen volgen, blijkt, dat de faculteitenreeks ook voor eene in het geheele vlak holomorfe functie kan bestaan, alsmede in het geval, dat de te onderzoeken functie, volledig door een machtreeks in  $\sqrt{z}$  kan worden voorgesteld. Het eerste geval doet zich voor bij

$$\psi(y) = Q(-y) = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{-y-1} du.$$

Men heeft

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} Q(-y)(1-t)^{-y} dy &= \frac{1}{2\pi i} \left[ e^{-1} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-y}}{y} dy - \int_1^{\infty} e^{-u} du \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-y}}{y} dy \right] \\ &= - \int_1^{\infty} e^{-u} du = e^{-1} 1-t = h(t) = e^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{1!} t - \frac{1}{2!} t^2 - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \frac{19}{5!} t^5 + \dots \right], \end{aligned}$$

en tegelijkertijd

$$\int_0^1 (1-t)^{z-1} h(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-\frac{1}{1-t}} dt = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{-z-1} = Q(-z).$$

Aan de eigenschappen I) en II) is dus voldaan, derhalve heeft men rechts van de as der imaginairen

$$\begin{aligned} Q(-z) &= e^{-1} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{z(z+1)(z+2)} - \frac{1}{z(z+1) \dots (z+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{19}{z(z+1) \dots (z+5)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

In het tweede der genoemde gevallen verkeert de functie

$$\psi(z) = \int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \frac{e^z}{\sqrt{z}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \int_0^{\sqrt{z}} e^{-u^2} du \right).$$

Men heeft

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \psi(y) (1 - \frac{(1 + \log \frac{1}{1-t})^{\frac{1}{2}}}{y}) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \log \frac{1}{1-t} \right) \quad \cdot \quad \frac{1}{2} t^2 - \frac{5}{24} t^3 + \frac{3}{80} t^4 + \dots,$$

en tegelijkertij

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} h(t) dt$$

Derhalve gel

$$\int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} - \right.$$

waaruit men vo

$$\int_x^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \right.$$

$$- \frac{1}{2} dt = \int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \psi(z).$$

et z-vlak

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \Big],$$

$$\frac{1}{(z+1)(z^2+2)(z^2+3)} + \dots \Big],$$

eene door Schlöm (Zenschrift für Math. u. Phys., 4.) medegedeelde formule ter berekening van de waarschijnlijkheidsintegraal voor groote waarden van  $x$ . Andere bekende faculteitenreeksen, bijv. die ter berekening van de integraallogarithme, waarbij men kan aannemen

$$h(t) = \log \left( 1 + \log \frac{1}{1-t} \right),$$

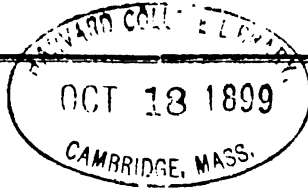
of van de functie  $\omega(z)$  van de formule van Binet, waarbij

$$h(t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{bgtg} \left( \frac{\log \frac{1}{1-t}}{2n\pi} \right),$$

worden met behulp van de in het voorafgaande aangegeven integraalstellingen op de eenvoudigste wijze afgeleid.



Sci 900.3.



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

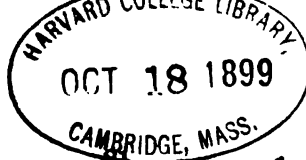
ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEDE REEKS  
DEEL IV  
TWEDE STUK

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1899





*Annals of Mathematics*

$$h(t) = \sum_0^{\infty} \alpha_n (1-t)^n.$$

Indien dan  $h(t)$  werkelijk transcendent is, vindt men

$$\phi(z) = \int_0^1 \sum_0^{\infty} \alpha_n (1-t)^{z+n-1} dt = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n}{z+n}$$

en eene zoodanige functie is door eene machtreeks in  $\frac{1}{z}$ , geldig in het geheele  $z$ -vlak, niet voor te stellen.

De ontwikkeling naar  $\frac{1}{z}$  van eene functie  $\psi(z)$  is dus geenszins een vereischte voor het bestaan der faculteitenreeks. Uit de beide voorbeelden, die thans nog mogen volgen, blijkt, dat de faculteitenreeks ook voor eene in het geheele vlak holomorfe functie kan bestaan, alsmede in het geval, dat de te onderzoeken functie, volledig door een machtreeks in  $\sqrt{z}$  kan worden voorgesteld. Het eerste geval doet zich voor bij

$$\psi(y) = Q(-y) = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{-y-1} du.$$

Men heeft

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} Q(-y) (1-t)^{-y} dy &= \frac{1}{2\pi i} \left[ e^{-1} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(1-t)^{-y}}{y} dy - \int_1^{\infty} e^{-u} du \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(u(1-t))^{-y}}{y} dy \right] \\ &= - \int_1^{\infty} e^{-u} du = e^{-\frac{1}{1-t}} = h(t) = e^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{1!} t - \frac{1}{2!} t^2 - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \frac{19}{5!} t^5 + \dots \right], \end{aligned}$$

en tegelijkertijd

$$\int_0^1 (1-t)^{z-1} h(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-\frac{1}{1-t}} dt = \int_1^{\infty} e^{-u} u^{-z-1} = Q(-z).$$

Aan de eigenschappen I) en II) is dus voldaan, derhalve heeft men rechts van de as der imaginairen

$$\begin{aligned} Q(-z) &= e^{-1} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{z(z+1)(z+2)} - \frac{1}{z(z+1) \dots (z+3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{19}{z(z+1) \dots z(z+5)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

In het tweede der genoemde gevallen verkeert de functie

$$\psi(z) = \int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \frac{e^z}{\sqrt{z}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \int_0^{\sqrt{z}} e^{-u^2} du \right).$$

Men heeft

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \psi(y)(1-t)^{-y} dy &= \frac{1}{4\pi i} \int_1^{\infty} \frac{dv}{v} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{(1-v-\log(1-t))y}}{y} dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \log \frac{1}{1-t} \right)^{-1} = h(t) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{48}t^3 + \frac{1}{384}t^4 + \dots), \end{aligned}$$

en tegelijkertijd

$$\int_0^1 (1-t)^{s-1} h(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{s-1} \left( 1 + \log \frac{1}{1-t} \right)^{-1} dt = \int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \psi(z).$$

Derhalve geldt in de rechterhelft van het  $z$ -vlak

$$\int_1^{\infty} e^{z(1-v)} dv = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} - \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right],$$

waaruit men voor  $z = x^2$  verkrijgt

$$\int_x^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \left[ 1 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} - \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} + \dots \right],$$

eene door Schlömilch (Zeitschrift für Math. u. Phys., 4.) medegedeelde formule ter berekening van de waarschijnlijkheidsintegraal voor groote waarden van  $x$ . Andere bekende faculteitenreeksen, bijv. die ter berekening van de integraallogarithme, waarbij men kan aannemen

$$h(t) = \log \left( 1 + \log \frac{1}{1-t} \right),$$

of van de functie  $\omega(z)$  van de formule van Binet, waarbij

$$h(t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{bgtg} \left( \frac{\log \frac{1}{1-t}}{2n\pi} \right),$$

worden met behulp van de in het voorafgaande aangegeven integraalstellingen op de eenvoudigste wijze afgeleid.

## SPHÈRES DE SECONDE ESPÈCE \*)

PAR

G. MANNOURY.

1. La représentation des points d'un plan  ${}^2P$  †) sur la surface  ${}^2S$  d'une sphère au moyen de la projection centrale offre l'avantage que les représentations des points du plan, aussi bien que celles de ses droites, sont géométriquement équivalentes.

Cependant cette représentation a le défaut de ne pas être uniforme: à chaque point du plan correspondent les deux extrémités d'un diamètre de la sphère. Dans le but d'écarter ce défaut sans perdre l'avantage qui l'accompagne, je me suis proposé de faire subir à la sphère  ${}^2S$  une déformation (sans extension) qui fait coïncider chacun de ses points avec le point diamétralement opposé, sans que la surface obtenue  ${}^2S$  cesse de fournir des représentations géométriquement équivalentes des points et des droites du plan  ${}^2P$ .

Pour ce qui concerne les représentations des droites de  ${}^2P$ , la supposition la plus simple est celle que ces représentations soient des cercles (c) de  ${}^2S$ . Nous verrons que cette supposition mène au but et qu'elle définit une surface  ${}^2S$  (située dans une  ${}^3E$ ) <sup>1)</sup> qui peut être regardée comme la réalisation du „plan” de la géométrie riemannienne; je l'indiquerai par le nom de *surface sphéroïdale de seconde espèce*, ou plus simplement par: *sphère de seconde espèce*. <sup>2)</sup>

\*) La plupart des résultats suivants ont été communiqués à la *soc. math. d'Amsterdam* dans sa séance du 29 Oct. 1898.

†) Les indices se rapportent au nombre des dimensions.

<sup>1)</sup> Voir à la fin de l'article.

<sup>2)</sup> " " " " " "

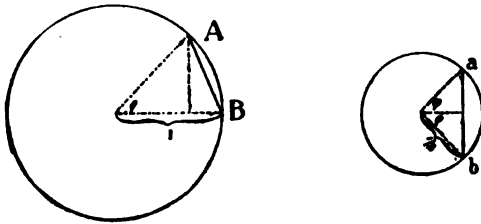
2. Représentons la sphère  ${}^2S$  par

$$(1) \quad \dots \dots \dots u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

(les mêmes lettres servant à indiquer un système de coordonnées homogènes dans  ${}^2P$ ) et la sphère de seconde espèce  ${}^2S$  par

$$(2) \quad \dots \dots \dots x_i = f_i(u, v, w). \\ i=1, \dots, n$$

La sphère  ${}^2S$  déformée couvrant deux fois  ${}^2S$ , chaque grand cercle  $C$  de  ${}^2S$  couvrira deux fois un des cercles  $c$  de  ${}^2S$ ; donc ces derniers doivent être de rayon  $\frac{1}{2}$ .



Soient  $A \equiv u_a, v_a, w_a$  et  $B \equiv u_b, v_b, w_b$  deux points non diamétralement opposés de  ${}^2S$  et  $\phi$  l'arc de grand cercle qui les unit, de sorte que  $\cos \phi = \sum u_a u_b$ . Soient  $a \equiv ax_1, \dots, ax_i, \dots, ax_n$  et  $b \equiv bx_1, \dots, bx_i, \dots, bx_n$  les points correspondants de  ${}^2S$ ; l'arc du cercle  $c$  qui passe par  $a$  et  $b$  est de même longueur que l'arc  $\phi$ , mais son rayon n'est que  $\frac{1}{2}$ , de sorte que la distance rectiligne  $\overline{ab}$  doit être égale à

$$\overline{ab} = 2 \times \frac{1}{2} \sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - \sum^2 u_a u_b}.$$

D'autre part cette distance sera représentée par

$$\overline{ab} = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} (ax_i - bx_i)^2} = \\ = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} \{f_i(u_a, v_a, w_a) - f_i(u_b, v_b, w_b)\}^2}.$$

Il s'agit de déterminer les fonctions  $f$  de façon à satisfaire à l'égalité

$$(3) \quad 1 - \sum^2 u_a u_b = \sum_{i=1, \dots, n} \{f_i(u_a, v_a, w_a) - f_i(u_b, v_b, w_b)\}^2.$$

Or

$$1 - \sum^2 u_a u_b = \frac{1}{2} (\sum^2 u_a^2 + \sum^2 u_b^2 - 2 \sum^2 u_a u_b) = \\ = \frac{1}{2} \sum (u_a^4 + 2v_a^2 w_a^2 + u_b^4 + 2v_b^2 w_b^2 - 2u_a^2 u_b^2 - 4v_a v_b w_a w_b) = \\ = \frac{1}{2} \sum \{(u_a^2 - u_b^2)^2 + 2(v_a w_a - v_b w_b)^2\} = \\ = \frac{1}{2} \sum (u_a^2 - u_b^2)^2 + \sum (v_a w_a - v_b w_b)^2,$$

de sorte que l'on satisfait à (3) en posant

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} u^2, \\ x_2 = f_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} v^2, \\ x_3 = f_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} w^2, \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} x_4 = f_4 = vw, \\ x_5 = f_5 = wu, \\ x_6 = f_6 = uv, \end{cases}$$

où toujours  $\Sigma u^2 = 1$ .

En éliminant les paramètres  $u, v, w$  on obtient les équations de  ${}^2S$

$$(6) \quad . . . . . x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$(7) \quad . . . . . \begin{cases} x_4^2 = 2x_2x_3, \\ x_5^2 = 2x_3x_1, \\ x_6^2 = 2x_1x_2, \end{cases}$$

Ces équations montrent immédiatement que  ${}^2S$  est située tout entière dans l' ${}^4$ hypersphère  ${}^4S$ , intersection de l' ${}^5E$   $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$  et de l' ${}^3$ hypersphère  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = \frac{1}{2}$ ; de plus elles établissent une correspondance (1, 1) entre les points de  ${}^2P$  et ceux de  ${}^2S$ . En effet, à chaque point  $u, v, w$  (coord. homog.) de  ${}^2P$  il correspond un seul point de  ${}^2S$  et si l'on se donne les valeurs des  $x$  on en déduit d'une manière univoque les proportions des  $u, v, w$ , car, les  $x_1, x_2, x_3$  ne se pouvant annuler à la fois à cause de (4), on peut en choisir un, p. e.  $x_1$  qui ne s'annule pas, et l'on trouve  $\frac{w}{u} = \frac{x_5}{\sqrt{2x_1}}$ ,

$$\frac{v}{u} = \frac{x_6}{\sqrt{2x_1}}. \text{ Reste à prouver que } {}^2S \text{ satisfait aux conditions}$$

du no. 1, savoir que les représentations des points et des droites du plan  ${}^2P(u, v, w)$  sont géométriquement équivalentes, ou, ce qui revient au même, qu'un glissement de la sphère  ${}^2S$  sur elle-même entraîne un glissement de  ${}^2S$  sur elle-même. Or, la distance de deux points de  ${}^2S$  étant fonction de la distance des points correspondants de  ${}^2P$ , un glissement de  ${}^2P$  sur elle-même transforme les points de  ${}^2P$  en d'autres points, situés également sur  ${}^2P$ , sans changer leurs distances mutuelles; c. à d.  ${}^2P$  glisse sur elle-même. Il s'en suit que deux grands cercles de  ${}^2P$  et en général deux courbes congruentes de  ${}^2P$  correspondent à deux courbes congruentes de  ${}^2S$ .

Cela posé, pour vérifier que les représentations des droites de  ${}^2P$  sont des cercles  $c$ , il suffit de considérer celle de l'une d'elles, par exemple de  $u=0$  (ou du grand cercle  $u=0$ ,  $v^2+w^2=1$  de  ${}^2S$ ). La courbe correspondante de  ${}^2S$  est

$$x_1=0, x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}v^2, x_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}w^2, x_4=vw, x_5=0, x_6=0$$

ou bien

$$x_1=x_5=x_6=0, x_2+x_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}, x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{1}{2}.$$

On reconnaît facilement les équations d'un cercle de rayon  $\frac{1}{2}$ . Donc toutes les droites de  ${}^2P$  correspondent univoquement à des cercles  $c$  de  ${}^2S$ , qui se coupent évidemment deux à deux en un seul point.

3. Après les cercles  $c$ , les courbes les plus simples de  ${}^2S$  sont celles qui représentent les coniques de  ${}^2P$ . Soit

$$Q \equiv Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Dvw + 2Ewu + 2Fuv = 0$$

une de ces coniques; la courbe correspondante  $q$  est donnée par l'intersection de  ${}^2S$  avec l' ${}^3E$

$$\alpha \equiv \sqrt{2}Ax_1 + \sqrt{2}Bx_2 + \sqrt{2}Cx_3 + 2Dx_4 + 2Ex_5 + 2Fx_6 = 0,$$

ou plutôt avec l' ${}^4E$  intersection de  $\alpha \equiv 0$  et l' ${}^3E$  (6).

Réciproquement chacun des  $\infty^5$   ${}^4E$  de l' ${}^3E$  (6) correspond univoquement à une des  $\infty^5$  coniques de  ${}^2P$ . Deux de ces coniques se coupant en quatre points, il s'en suit que la courbe  $q$  est coupée en quatre points par chaque  ${}^4E$  de l' ${}^3E$  (6), en d'autres mots,  $q$  est une quartique, et  ${}^2S$  est une  ${}^2$ surface de quatrième degré. En même temps nous avons démontré que  ${}^2S$  ne saurait être située dans une espace de moindre de 5 dimensions.

Parmi les quartiques  $q$  (qui en général sont des courbes doublement gauches, c. s. des courbes qui ne peuvent être situées dans un espace de moindre de 4 dimensions) je signale celles qui représentent les petits cercles de  ${}^2S$ ; ces quartiques jouissent évidemment de la propriété de pouvoir glisser sur elles-mêmes.





$$\begin{aligned}
\overline{ab} &= V \sum_m (ax_i - bx_i)^2 = \\
&= V \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n+1} (au_i^2 - bu_i^2)^2 + \sum_{\frac{n(n+1)}{2}} (au_i au_\gamma - bu_i bu_\gamma)^2 \right\} = \\
&= V \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n+1} (au_i^4 + bu_i^4 - 2au_i^2 bu_i^2) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\frac{n(n+1)}{2}} (au_i^2 au_\gamma^2 + bu_i^2 bu_\gamma^2 - 2au_i au_\gamma bu_i bu_\gamma) \right\} = \\
&= V \left[ \frac{1}{2} \sum_{n+1} (au_i^4 + bu_i^4) + \sum_{\frac{n(n+1)}{2}} (2au_i^2 au_\gamma^2 + 2bu_i^2 bu_\gamma^2) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n+1} au_i^2 bu_i^2 + \sum_{\frac{n(n+1)}{2}} 2au_i au_\gamma bu_i bu_\gamma \right] = \\
&= V \left( \frac{1}{2} \sum_{n+1} au_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{n+1} bu_i^2 - \sum_{n+1} au_i bu_i \right),
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (8)

$$V(1 - \sum_{n+1} au_i bu_i).$$

Or,  $\sum_{n+1} au_i bu_i$  est égal à  $\cos^2 \phi$ ,  $\phi$  étant un des arcs de grand cercle qui unissent les points A et B de  ${}^nS$ , donc un glissement de  ${}^nS$  sur elle-même entraîne un glissement de  ${}^nS$  sur elle-même, et d'un raisonnement tout à fait analogue à celui des nos. 2—4 il résulte :

1° que les droites, les plans et les  ${}^tE$  de  ${}^nP$  correspondent (1, 1) avec des cercles, des  ${}^2S$  et des  ${}^tS$  de  ${}^nS$ ,

2° que  ${}^nS$  se trouve dans une  ${}^{n-2}S$  intersection de la  ${}^{n-1}S$

$$(10) \quad \dots x_1^2 + \dots + x_m^2 = \frac{1}{2}$$

et de l' ${}^{m-1}E$

$$(11) \quad \dots x_1 + \dots + x_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

et non dans un espace de moindre de  $m - 1$  dimensions.

3° que les  ${}^{n-1}$ quadriques de  ${}^nP$  correspondent (1, 1) avec les  ${}^{n-1}$ intersections de  ${}^nS$  et des  ${}^{n-2}E$  de l' ${}^{m-1}E$  (10),

et 4° qu'une surface algébrique de degré  $n$  dans  ${}^nP$  correspond avec une surface algébrique de degré  $2n$  dans  ${}^nS$ .

1) Il est à prévoir qu'une telle surface ne pourra être située dans un espace à moindre de 5 dimensions. Soient en effet  $A_1, A_2, \dots, A_6, A'_1, A'_2, \dots, A'_6$  les douze sommets d'un dodécaèdre régulier inscrit dans la sphère  ${}^3S$ , les  $A_i$  étant situés sur une même hémisphère. Sur  ${}^3S$  ces douze points se confondent

en six points  $a_1, \dots, a_6$  tels que  $a_i$  est également distant des cinq autres points. Une telle configuration n'est possible que dans un espace à plus de quatre dimensions.

<sup>2)</sup> Si l'on se place au point de vue de l'Analyse situs,  ${}^2S$  appartient aux  ${}^2$ variétés doubles et plus particulièrement au type des  ${}^2$ cloisantes que j'ai considéré dans le *Nieuw Archief voor Wisk.* sér. 2, t. III, p. 126, ainsi que les analogues  $n$ -dimensionaux.

<sup>3)</sup> La considération de la projection de  ${}^2S$  sur l'espace-coordonné (4, 5, 6) est très propre à nous donner une idée de la  ${}^2$ sphère de seconde espèce elle-même. Cette projection est représentée par l'équation  $x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = x_4 x_5 x_6$ . On y reconnaît une surface romaine de Steiner dans une de ses formes les plus régulières (un modèle de cette surface a paru chez Brill à Darmstadt (voir *Catalog mathematischer Modelle* sér. 9. No. 3, p. 19 et p. 36). Les cercles ( $\sigma$ ) de  ${}^2S$  correspondent avec la famille des coniques qui se trouvent sur la surf. rom., et avec les trois droites doubles de cette surface. À l'exception des points de ces droites doubles, la correspondance entre  ${}^2S$  et sa projection est uniforme ce qui entraîne que le degré des courbes algébriques de  ${}^2S$  n'est pas altéré par la projection. Donc les courbes de degré  $n$  de  ${}^2P$  correspondent à des courbes de degré  $2n$  de la surface rom. et réciproquement, ce qui est d'accord avec la propriété connue de cette surface de ne contenir que des courbes de degré pair. Pour plus de particularités sur ces courbes, ainsi que pour la bibliographie sur la surf. rom., je renvoie le lecteur aux articles de P. H. SCHOUTE, *Over het oppervlak van Steiner* (Versl. van de Kon. Ak. v. Wet. t. IV p. 224) et *Over de convoidigste ruimtekrommen op het oppervlak van Steiner* (ibid. p. 272). Depuis ont paru sur le sujet les articles suivants: J. RICHARD, *Sur les surfaces de Steiner* (*Rev. de math. éco.* 8e année 1897-98, p. 401), A. BRAMBILLA, *Intorno alla superficie di Steiner* (*Rendic. dell' Ac. delle sc. di Napoli*, sér. 3, IV, 1898. p. 19), E. LACOUR, *Sur la surface de Steiner* (*Nouv. ann. de math.* oct. 1898), A. BRAMBILLA, *Estensione di una proprietà della superficie di Steiner* (*Rendic. dell' Ac. delle sc. di Napoli*, sér. 3, IV, 1898, p. 300). Dans ce dernier article l'auteur considère la famille de  ${}^2$ surfaces en  ${}^2E$ :

$$x_1 \equiv a_{11}u^2 + \dots + a_{22}vw + \dots,$$

$$x_2 \equiv b_{11}u^2 + \dots + b_{22}vw + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n+1} \equiv l_{11}u^2 + \dots + l_{22}vw + \dots,$$

$u, v, w$  étant les coordonnées homogènes du point d'un plan  ${}^2P$ ;  $a, b, \dots, l$  des constantes. Il démontre qu'en prenant les poles d'un  $n-1$ plan fixe par rapport aux coniques d'une de ces surfaces, on en obtient une autre de la même famille. Pour  $n = 5$  cette famille de surfaces renferme comme cas particulier la  ${}^2$ sphère de seconde espèce; donc ce dernier jouit également de cette propriété.

## ON A CUBIC TRANSFORMATION IN SPACE

BY

P. H. SCHOUTE.

---

1. Let  $S_3$  represent a given skew curve of the third order. Through any point  $P$ , not belonging to  $S_3$ , passes only one chord  $p$  of  $S_3$ ; this chord contains only one point  $P'$ , separated harmonically from  $P$  by the two points  $Q, R$  common to  $p$  and  $S_3$ . In the following lines we study the involutory correspondence between the points  $P$  and  $P'$ .

This subject is far from new. So Dr. REYE a. o. has treated it geometrically in the 22<sup>nd</sup> lesson of the second volume of his *Geometrie der Lage* (third edition). Our aim is to throw some light on a principal property of the transformation that remained entirely in the dark in REYE's most valuable book; to that end we deduce the properties of the transformation from the general theory of transformation in space. And afterwards, we seek, chiefly by means of the formulae corresponding to the transformation, the surfaces anallagmatic with respect to it.

2. Singular points. If  $P$  be any point whatever not situated on  $S_3$ , the corresponding point  $P'$  is always determinate. But, for any point  $Q$  of  $S_3$ , the chord of  $S_3$  passing through it is indefinite, any chord of  $S_3$  through  $Q$  and especially the tangent  $q$  in  $Q$  to  $S_3$ , answering to the purpose. On any bisecant  $QR$  of  $S_3$ , the point harmonically conjugate to  $Q$  with regard to  $Q$  and  $R$  is always  $Q$  itself; unless  $R$  coincide with  $Q$  and the bisecant be the tangent  $q$  in  $Q$  to  $S_3$ , in which case the point harmonically conjugate to  $Q$  is indefinite. In other words the point  $Q'$  corresponding to any point  $Q$  of  $S_3$  is broadened out to a line of points  $Q'$ , the tangent  $q$  in  $Q$  to  $S_3$  and reversely

to any point  $Q'$  of  $q$  corresponds the point  $Q$  of  $S_3$  in return. Any point  $Q$  of  $S_3$  is a singular point, the curve  $S_3$  itself as locus of singular points is a singular curve of the correspondence; the corresponding curve of  $S_3$  is broadened out to a surface, the developable surface  $D_4$  of the fourth order of which  $S_3$  is the cuspidal line.

3. Order of the correspondence. According to definition the points of any chord  $c$  of  $S_3$  correspond to one another in an involutory manner. This remark enables us to find the order of the correspondence without penetrating any farther into its peculiarities. For the curve corresponding to this chord is evidently a skew cubic curve broken up into three lines, of which the chord  $c$  itself forms the essential part, whilst the tangents  $q, r$  to  $S_3$  in the points  $Q, R$  common to  $c$  and  $S_3$  are to be considered as inessential. Therefore the correspondence is a cubic one that transforms any line  $l$  into a skew cubic  $L_3$ , meeting the given  $S_3$  in the four points corresponding to the points common to  $l$  and the developable  $D_4$ . And by the loss of only one rectilinear constituent the skew cubic corresponding to any line  $l$ , meeting  $S_3$  only in one point  $Q$ , must become a conic passing through  $Q$ .

The involutory character of the correspondence proves that it transforms any plane  $\alpha$  into a cubic surface  $F_3$ , passing once through  $S_3$ . For the points common to any line  $l$  and the surface corresponding to any plane  $\alpha$  are transformed one by one into the points common to  $\alpha$  and the skew cubic  $L_3$  corresponding to  $l$ ; in other words  $l$  meets the surface corresponding to  $\alpha$  in three points,  $\alpha$  meeting the skew cubic  $L_3$  corresponding to  $l$  in three points. And  $S_3$  is a single curve on the surface  $F_3$  corresponding to  $\alpha$ , the tangent  $q$  of  $S_3$  in any of its points cutting  $\alpha$  in only one point.

4. The stating and removing of some difficulties. A more thorough examination of the correspondence leads to a good many difficulties. We successively develop some of these difficulties and indicate afterwards a general view that dissolves them altogether.

a) The total intersection of the two surfaces  $F_3, F_3'$  corresponding to the pair of planes  $\alpha, \alpha'$  being a skew curve of

the ninth order consists of the skew cubic  $L_3$  corresponding to the line of intersection  $l$  of  $\alpha$ ,  $\alpha'$  and a skew sextic. Here besides  $L_3$  we find only  $S_3$ .

b) The surface corresponding to the surface  $F_3$  of  $\alpha$  should be a surface  $F_0$  that reduces itself to  $\alpha$  by losing  $D_4$  a sufficient number of times. Evidently this number of times must be two, in apparent contradiction with the fact that  $S_3$  is only a single curve of  $F^3$ .

c) We already remarked that the point  $Q$  of  $S_3$  corresponds to any point  $Q'$  of the tangent  $q$  in  $Q$  to  $S_3$ . This means that by subtracting  $q$  a sufficient number of times of the skew cubic corresponding to  $q$  nothing will be left. This number evidently is three, though  $q$  only contains two points of  $S_3$ .

d) A closer study (see REYE, l.c.) proves that the locus corresponding to any line  $l$  passing through the point  $Q$  of  $S_3$  and lying in the osculating plane  $\phi$  of  $S_3$  in  $Q$  is a line, whilst according to the theory it ought to be a conic, the line  $l$  containing only one point of  $S_3$ .

These four contradictions are altogether removed by the hypothesis that the complete locus of singular points consists of two coincided skew cubics, the osculating plane  $\phi$  of the given curve of coincidence  $S_3$  in  $Q$  representing the plane of coincidence of the coincided tangents  $q$  in  $Q$ . According to this supposition all the surfaces  $F_3$  corresponding to planes touch each other along  $S_3$ , in which case the first couple of contradictions disappear. Moreover it is compatible with the opinion that any line  $l$  through  $Q$  in  $\phi$  meets the two cubics and the tangent  $q$  in  $Q$  passes at least through three singular points, etc.

We confirm this hypothesis to which the stated difficulties have led by showing analytically that the surface  $F_3$  corresponding to any plane  $\alpha$  touches  $D_4$  along  $S_3$ .

5. Formulae of transformation. We represent the given skew cubic  $S_3$  by the simple relations

$$\frac{x_1}{\lambda^3} = \frac{x_2}{\lambda^2} = \frac{x_3}{\lambda} = \frac{x_4}{1},$$

which bind the homogeneous coordinates  $x_1, x_2, x_3, x_4$  of any point of the curve to the value of a variable parameter  $\lambda$ .

Now we form the equations

$A \equiv x_1x_3 - x_2^2 = 0$ ,  $B \equiv x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ ,  $C \equiv x_2x_4 - x_3^2 = 0$   
of three quadrics passing through  $S_3$  and not belonging to the same pencil.

The polar planes of any point  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  with reference to these are

$$\left. \begin{aligned} y_1x_3 - 2y_2x_2 + y_3x_1 &= 0 \\ y_1x_4 - y_2x_3 - y_3x_2 + y_4x_1 &= 0 \\ y_2x_4 - 2y_3x_3 + y_4x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 1).$$

The point common to these three planes being evidently the point  $x_i$  corresponding to the given point  $y_i$ , these equations form the formulae of transformation. We write the solution according to  $y_i$  in the form

$$\frac{y_1}{X_1} = \frac{y_2}{X_2} = \frac{y_3}{X_3} = \frac{y_4}{X_4} \dots\dots\dots 2),$$

where

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 2Ax_2 - Bx_1 \\ X_2 &= 2Ax_3 - Bx_2 = Bx_2 - 2Cx_1 \\ X_3 &= 2Ax_4 - Bx_3 = Bx_3 - 2Cx_2 \\ X_4 &= \qquad\qquad Bx_4 - 2Cx_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 3),$$

which gives rise to the identities

$$\left. \begin{aligned} Ax_3 - Bx_2 + Cx_1 &= 0 \\ Ax_4 - Bx_3 + Cx_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4),$$

that will serve us afterwards.

6. Proof of the hypothesis. Now we prove that the cubic surface  $\Sigma p_i X_i = 0$  corresponding to the plane  $\Sigma p_i y_i = 0$  touches the developable  $D_4$  along  $S_3$ .

The osculating plane of  $S_3$  in the point  $\lambda$  is

$$x_1 - 3\lambda x_2 + 3\lambda^2 x_3 - \lambda^3 x_4 = 0 \dots\dots\dots 5).$$

If this plane touches the surface  $f \equiv \Sigma p_i X_i = 0$  in the point  $\lambda$  we have

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{-3\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{3\lambda^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_4}}{-\lambda^3}$$





By means of the two identities 4) it is seen that the twelve coefficients entering in this equation reduce themselves to ten independent ones, in other terms the system 7) is ninefold infinite. This result agrees with the fact that the multiple condition for a cubic surface to pass through a given skew cubic curve  $S_3$  is equal to ten simple conditions. For a general cubic surface is determined by 19 points and a surface of the system 7) by 9.

With the aid of the equation 6) can be found the number of simple conditions implied in the multiple condition expressing that any cubic surface touches the developable  $D_4$  along  $S_3$ . Substitution of  $\lambda^{4-i}$  for  $x_i$  in the coefficients  $a, b, c$  transforms 6) into a quintic equation in  $\lambda$ ; so the condition of contact along  $S_3$  is equivalent to six simple ones. Therefore the system of cubic surfaces touching  $D_4$  along  $S_3$  is threefold infinite, which result agrees with the fact that this system corresponds to the likewise threefold infinite system of planes in space.

We extend these considerations to quartic surfaces, by the supposition that the coefficients  $a, b, c$  of 7) denote homogeneous quadratic functions in  $x_i$ . By multiplication of each of the two identities 4) respectively by each of the four coordinates  $x_i$  eight identities of the fourth order can be formed; in other words the 30 coefficients figuring in the general equation 7) of a quartic surface through  $S_3$  are equivalent to 22 independent ones, i. e. the system of quartic surfaces 7) is 21-fold infinite. This proves that the multiple condition for a quartic surface to contain  $S_3$  is equivalent to  $34 - 21 = 13$  simple ones. Moreover the substitution  $\lambda^{4-i}$  for  $x_i$  transforms 6) into an equation of the eighth degree in  $\lambda$ ; so the system of quartic surfaces touching  $D_4$  along  $S_3$  is  $21 - 9$  or 12-fold infinite.

With regard to further investigations we form the equation of the 12-fold infinite system of surfaces  $F_4$  touching  $D_4$  along  $S_3$ . To that end we remark that the sixteen quartic surfaces, the equations of which are found by putting equal to nought any element of the determinant

$$\begin{vmatrix} x_1X_1 & x_1X_2 & x_1X_3 & x_1X_4 \\ x_2X_1 & x_2X_2 & x_2X_3 & x_2X_4 \\ x_3X_1 & x_3X_2 & x_3X_3 & x_3X_4 \\ x_4X_1 & x_4X_2 & x_4X_3 & x_4X_4 \end{vmatrix},$$

belong to it; each of these sixteen quartics consists of a plane and a cubic surface. The sum of the indices figuring in the equation of these sixteen quartics being given by the table

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix},$$

the number of the identical relations between these sixteen quantities is easily found. We find only

$$\left. \begin{aligned} x_3X_1 - 2x_2X_2 + x_1X_3 &= 0 \\ x_4X_1 - x_3X_2 - x_2X_3 + x_1X_4 &= 0 \\ x_4X_2 - 2x_3X_3 + x_2X_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots 8);$$

therefore under the conditions  $p_{1,3} = 0$ ,  $p_{1,4} = 0$ ,  $p_{2,4} = 0$  the equation

$$\sum p_{i,k} x_i X_k = 0 \dots\dots\dots 9)$$

represents the 12-fold infinite system in view.

7. Peculiarities of the linear system of cubic surfaces  $\sum p_i X_i = 0$ . Any surface of the system  $\sum p_i X_i = 0$  has three nodes, viz. the points P, Q, R common to  $S_3$  and the plane  $\alpha$  corresponding to the surface; for this surface contains three non-complanar lines through any of these points, e. g. through P the two chords PQ, PR and the tangent  $p$  in P to  $S_3$ .

But the surface  $\sum p_i X_i = 0$  possesses still another peculiarity which is brought to light by the study of its right lines. It is generally known that a cubic surface with three nodes P, Q, R bears twelve lines; under the 27 lines of a general cubic surface three of these twelve count four times, six count twice and the three remaining ones only once. Here QR, RP, PQ are the lines counting four times, the tangents  $p, q, r$  and three other lines  $p', q', r'$  respectively through P, Q, R are the twice counting lines and three other lines  $p'', q'', r''$  respectively situated in the planes  $(p, p')$ ,  $(q, q')$ ,  $(r, r')$  but not going through P, Q, R are the three remaining ones. Now the peculiarity in view is that the complanar lines  $p'', q'', r''$  are concurrent. If O be the point of  $\alpha = (P, Q, R)$  common

to the osculating planes of  $S_3$  in  $P, Q, R$ , the three lines  $OP, OQ, OR$  (compare the difficulty  $d$  in § 3) correspond to  $p'', q'', r''$ ; therefore  $p'', q'', r''$  pass through the point  $O'$  corresponding to  $O$ . And the lines  $p', q', r'$  not yet accounted for must correspond to determinate conics in  $\alpha$ , for these are only secants not situated in the osculating plane of the point of section.

The system of cubic surfaces touching  $D_4$  along  $S_3$  being identical with the system of cubic surfaces corresponding to the system of planes in space, any surface of the first system has three nodes; therefore its intersection with  $D_4$  consists of three lines, the tangents of  $S_3$  in the three nodes of the surface and the skew cubic  $S_3$  counted a sufficient number of times, i. e. thrice. This proves that any tangent of  $S_3$  belongs to the cubic surface as soon as it meets the surface in a point not situated on  $S_3$ . In other terms any tangent of  $S_3$  is inflexional tangent of the cubic surface in its point of contact with  $S_3$ ;  $S_3$  is a common envelope of inflexional tangents of the system of surfaces  $\Sigma p_i X_i = 0$ .

Any osculating plane of  $S_3$  corresponds to a scroll. This is immediately seen by considering the points of the plane ranged in lines passing through the point of contact (compare again  $d$  in § 3).

8. Surfaces anallagmatic with respect to the correspondence. Any surface of order  $x$ , passing  $y$  times through  $S_3$ , of which  $z$  of the  $y$  sheets through  $S_3$  touch  $D_4$ , corresponds to a surface of order  $3x - 4(y + z)$ . This surface cannot correspond to itself unless the relation  $2(y + z) = x$  be satisfied. This proves that only surfaces of even order can correspond to themselves.

If we pass over the evident solution furnished by the net of the quadratic scrolls through  $S_3$  we come to the quartic surfaces. Here we have to consider two different cases, characterized by the pairs of equations  $y = 2, z = 0$  and  $y = 1, z = 1$ . We examine each of these cases separately.

The case  $y = 2, z = 0$ . Any surface  $F_4$  passing twice through  $S_3$  is a scroll corresponding to itself. For any point  $P$  of this  $F_4$  not situated on  $S_3$  leads to a chord  $c$  of  $S_3$  meeting  $F_4$  in five points, i. e. lying on  $F_4$ ; in other words  $F_4$

consists of mere self corresponding chords of  $S_3$ . And in the same way it is proved generally that any surface  $F_{2n}$ , of which  $S_3$  is an  $n$ -fold curve, is a scroll corresponding to itself.

The system of surfaces  $F_4$  with the common double curve  $S_3$  is fivefold infinite. According to ROHN (*Math. Annalen*, vol. 28, p. 288) any of these surfaces is the locus of the line connecting the points  $\lambda, \mu$  of  $S_3$  bound to one another by the condition

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda + \mu)^2 + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0,$$

quadratic in each of the two parameters and symmetric as to both; this equation containing six coefficients, the system of surfaces is fivefold infinite.

Indeed, five points chosen at random determine one surface of the system; for two surfaces  $F^4$  with the double curve  $S_3$  passing through these points coincide, while they have in common a locus of order 17, the  $S_3$  counted four times and the five chords of  $S_3$  containing the given points. And on the other hand the symbolic equation

$$(aA + bB + cC)^{(3)} = 0$$

represents a fivefold infinite system of these quartic surfaces.

In the more general case of the scrolls  $F_{2n}$  passing  $n$  times through  $S_3$  we have to deal with the function  $f(\lambda, \mu) = 0$  of order  $n$  in each of the parameters and symmetric as to both. It is easily seen that the numbers of the terms of order  $2n, 2n-1, 2n-2, \dots$  respectively are obtained by proceeding in the series

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \text{ etc.}$$

up to the  $n+1^{\text{st}}$  term included and repeating these numbers in inverse order with exception of the last written one, which gives three equal maximal numbers or only one according to  $n$  being even or uneven. So the total number always proves to be  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ , which result agrees with the multiplicity indicated by the symbolic equation

$$(aA + bB + cC)^{(n)} = 0,$$

as is known by the theory of plane curves, etc.

The case  $y=1, z=1$ . By the substitution 2) the sum of the indices of the four coordinates  $x_1, x_2, x_3, x_4$  in any

term  $x_i X_i$  of the equation 9) representing the twelvefold infinite system of surfaces  $F_4$  touching  $D_4$  along  $S_3$  is not altered; therefore the surface 9) can only be transformed in itself, if this is the case with each of the surfaces the equations of which are obtained by putting equal to nought the different pieces of the left side of 9) that are homogeneous with regard to these sum of indices. And this is possible in two different manners, for the substitution can render all the forms with reversed sign or with the same sign. In the first case we find the six forms

$$\left. \begin{array}{l} x_2 X_1 - x_1 X_2 \\ x_3 X_1 - x_1 X_3 \\ x_4 X_1 - x_1 X_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x_3 X_4 - x_4 X_3 \\ x_4 X_2 - x_2 X_4 \\ x_2 X_3 - x_3 X_2 \end{array} \right\},$$

that reconduct immediately to the case

$$(aA + bB + cC)^{(3)} = 0$$

of the scrolls  $F^4$  passing twice through  $S_3$ . And the second supposition furnishes the ten forms

$$\left. \begin{array}{l} X_{1,2} \equiv x_2 X_1 + x_1 X_2 \\ X_{1,3} \equiv x_3 X_1 + x_1 X_3 \\ X_{1,4} \equiv x_4 X_1 + x_1 X_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} X_{3,4} \equiv x_3 X_4 + x_4 X_3 \\ X_{4,2} \equiv x_4 X_2 + x_2 X_4 \\ X_{2,3} \equiv x_2 X_3 + x_3 X_2 \end{array} \right\},$$

$$X_{i,i} = 2x_i X_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

between which according to 8) we have the relations

$$X_{1,2} = X_{2,1}, \quad X_{1,4} = X_{4,1}, \quad X_{2,3} = X_{3,2}.$$

So we come to the result that the system of quartic surfaces touching  $D_4$  along  $S_3$ , each surface of which is anallagmatic with respect to our correspondence, is sixfold infinite.

9. Application. Six points on  $S_3$  and a seventh point  $P$  not belonging to  $S_3$  determine a net of quadrics that have in common an eighth point  $P''$  situated on the chord  $c$  of  $S_3$  passing through  $P$ . This new correspondence  $(P, P'')$  is not to be confounded with the correspondence  $(P, P')$  treated here. It is a transformation of the seventh order, distinguishing itself from the cubic one by the fact that the points  $Q, R$  common to the chord  $c$  and  $S_3$ , instead of being the double points of the involution on  $c$ , form a pair of it. This proves at the

same time that the double points of the new involution correspond to each other in the old one.

Now the locus of the point of coincidence of two corresponding points ( $P, P''$ ) of the new correspondence determined by the six points chosen on  $S_3$  is the locus  $F_4$  of the vertices of the cones contained in the linear system of the quadrics through the six points on  $S_3$ . The system of these surfaces  $F_4$  of JACOBI is sixfold infinite, any of its surfaces depending on the choice of the six points on  $S_3$ ; moreover these surfaces being transformed in themselves by the cubic correspondence, the system is identical with the system found in § 8.

We confirm this analytically. If

$$\left. \begin{aligned} p_s &\equiv p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0 \\ q_s &\equiv q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

represent a pair of planes through the six points on  $S_3$ , the points  $x_i$  and  $X_i$  corresponding to each other in the cubic transformation are conjugate with respect to these pair of planes and are therefore points of coincidence in the correspondence of the seventh order under the condition

$$p_s q_x + p_x q_s = 0,$$

which reduces itself to

$$\sum p_i q_i x_i X_i + \sum (p_i q_k + p_k q_i) (x_i X_k + x_k X_i) = 0,$$

entirely in accordance with the obtained results.

So unexpectedly we hit upon the following remarkable theorem:

"Any quartic surface touching  $D_4$  along  $S_3$  and corresponding to itself with regard to the correspondence connected with  $S_3$  contains 25 lines. Of these 15 join six points of  $S_3$  taken by twos; the other 10 are the axes of the couples of planes passing through these six points."

KUBISCHE INVOLUTIONEN ERSTER UND ZWEITER STUFE AUF  
KUBISCHEN RAUMCURVEN

VON

JAN DE VRIES.

1. Die Gesamtheit aller Ebenen durch einen Punkt M (Ebenenbündel, Ebenennetz) bestimmt auf der kubischen Raumcurve  $R_3$  die Tripel einer kubischen Involution zweiter Stufe.\*)

Projiziert man die Raumcurve aus einer ihrer Sehnen auf eine beliebig gewählte Gerade  $g$ , so wird  $I_3^2$  ersetzt durch eine auf  $g$  befindliche kubische Involution zweiter Stufe  $J_3^2$ , welche durch eine Beziehung von der Form

$$1) \ a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + a_2 (x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0$$

bestimmt erscheint, falls man die Punkte von  $g$  durch ihre in Bezug auf einen beliebig gewählten Nullpunkt N genommenen Abscissen festlegt.

Weil die Verwandtschaftsgleichung durch Annahme drei Tripel der  $J_3^2$  bestimmt wird, kann man auf  $R_3$  drei Tripel der  $I_3^2$  beliebig wählen; die drei durch sie gelegten Ebenen schneiden sich dann im Punkte M.

Offenbar sind die durch die Gleichung

$$2) \ . \ . \ . \ . \ a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

dargestellten dreifachen Elemente der  $J_3^2$  die Bilder von drei Punkten der  $R_3$  deren Schmiegungebenen durch M gehen. *Durch einen willkürlichen Punkt des Raumes laufen daher drei Schmiegungebenen.*

---

\*) Die Theorie der Involutionen wurde durch *Emil Weyr* und *C. le Paige* ausgebildet. Ausführlich dargestellt wurde sie von *François Deruyts* (Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale, Mém. de la Soc. des Sciences de Liège, t. XVII, 1891). In der obigen kurzen Arbeit soll auf die Bedeutung der kubischen Involutionen für die kubische Raumcurve hingewiesen werden.

2. Wenn  $x_2$  und  $x_3$  den Bedingungen

$$3) \dots a_0 x_2 x_3 + a_1 (x_2 + x_3) + a_2 = 0,$$

$$4) \dots a_1 x_2 x_3 + a_2 (x_2 + x_3) + a_3 = 0$$

genügen, so wird  $x_1$  unbestimmt. Die betreffenden *neutralen* Punkte bilden somit mit jedem Punkte der Geraden  $g$  ein Tripel. Sie sind die Bilder zweier Punkte der  $R_3$ , deren Verbindungslinie nach  $M$  zielt. Hieraus erhellt der bekannte Satz, wonach *jeder Punkt des Raumes eine einzige Bisecante der  $R_3$  trägt*.

Aus 3) und 4) ergibt sich für die neutralen Punkte die Gleichung

$$5) \dots (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0.$$

Verlegt man den oben erwähnten Nullpunkt nach dem reellen dreifachen Punkt (bez. nach einem der reellen dreifachen Punkte) der  $J_3^2$ , so treten an die Stellen der Gleichungen 2) und 5) nunmehr

$$6) \dots x(a_0 x^2 + 3a_1 x + 3a_2) = 0,$$

$$7) \dots (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 - a_1 a_2 x - a_2^2 = 0.$$

Aus 7) erhellt, dass die neutralen Punkte reell sind, wenn

$$8) \dots 4a_0 a_2 - 3a_1^2 > 0$$

ist. Man sieht sofort, dass dann die von Null verschiedenen dreifachen Elemente imaginär sind. Umgekehrt entsprechen imaginären neutralen Punkten reelle dreifache Elemente.

Gibt es zwei im Nullpunkte vereinigte dreifache Elemente, so ist auch  $a_2 = 0$ , und die Gleichung 7) lehrt, dass die neutralen Punkte im Nullpunkte zusammenfallen.

Hiermit sind die nachfolgenden bekannten Sätze erhärtet:

*Jeder Punkt einer reellen Sehne trägt nur eine reelle Schmiegungebene.*

*In jedem Punkte einer idealen Sehne schneiden sich drei reelle Schmiegungebenen.*

*Durch jeden Punkt einer Tangente geht ausser der zweimal gelegten Schmiegungeebene des Berührungspunktes noch eine Schmiegungeebene.*

3. Es möge

$$9) \dots b_0 x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3 = 0$$



ein Tripel (B) der  $J_3^2$  darstellen, welche durch 1) bestimmt erscheint. Weil alsdann

$$b_0(x_1 + x_2 + x_3) = -3b_1, b_0(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b_2, b_0x_1x_2x_3 = -b_3$$

ist, liefert 1) die Bedingungsleichung

$$10) \quad . \quad . \quad . \quad a_3b_0 - 3a_2b_1 + 3a_1b_2 - a_0b_3 = 0.$$

Beachtet man die Symmetrie dieser Beziehung, so ergibt sich der bemerkenswerthe Satz: *Wenn ein Tripel (B) einer  $J_3^2$  angehört, so bilden deren dreifache Elemente  $A_1, A_2, A_3$  ein Tripel jener zweiten  $J_3^2$ , welcher die Punkte (B) als dreifache Elemente angehören.*

Offenbar wird der Bedingung 10) genügt, wenn man  $b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$  ansetzt. Die Punkte, welche als dreifache Elemente einer  $J_3^2$  auftreten, bilden somit ein Tripel dieser Involution. Für die kubische Raumcurve gibt dies den bekannten Satz:

*Die Anschmiegungspunkte dreier durch einen Punkt M laufenden Schmiegungsebenen werden mit M durch eine Ebene  $\mu$  verbunden.*

Obiger, aus der Symmetrie von 10) hervorgehender, Satz besagt ferner für  $R_2$ :

*Wenn die Ebene  $\nu$  dreier Punkte  $B_1, B_2, B_3$  den Schnittpunkt M der Schmiegungsebenen von  $A_1, A_2, A_3$  enthält, so geht die Ebene  $A_1A_2A_3 \equiv \mu$  durch den Schnittpunkt N der Schmiegungsebenen von  $B_1, B_2, B_3$ .*

4. Hieraus ergibt sich leicht, dass man jedem Punkt M eine ihn enthaltende Ebene  $\mu$  (Nullebene) und umgekehrt jeder Ebene einen in ihr liegenden Punkt (Nullpunkt) zuordnen kann. Dies ist selbstverständlich, wenn M drei reelle Schmiegungsebenen trägt. bez. wenn  $\mu$  drei reelle Punkte der  $R_2$  enthält

Gehört M nur einer reellen Schmiegungsebene an, und ist  $A_1$  deren Anschmiegungspunkt, so lege man durch M eine Ebene  $\nu$ , welche  $R_2$  in den reellen Punkten  $B_1, B_2, B_3$  trifft. Ist N der Nullpunkt von  $\nu$  (also der Schnittpunkt der den Punkten B entsprechenden Schmiegungsebenen), so ist die Nullebene von M, dem obigen Satze gemäs, durch M, N und  $A_1$  bestimmt.

Wenn ferner die Ebene  $\mu$  die Curve nur in einem reellen

Punkte  $A_1$  trifft, so wähle man in  $\mu$  einen Punkt  $N$ , durch welchen drei reelle Schmiegungebenen laufen, und bestimme dessen Nullebene  $\nu$ . Alsdann ist der Schnittpunkt der Schmiegungeebene von  $A_1$  mit den Ebenen  $\mu, \nu$  der Nullpunkt von  $\mu$ .

Der Satz, wonach  $MN \equiv \mu\nu$  ist, lässt sich nun kürzer so fassen: *Wenn der Punkt  $N$  der Nullebene von  $M$  angehört, so geht die Nullebene von  $N$  durch  $M$ .*

5. Sind  $M$  und  $N$  die Mittelpunkte zweier Ebenennetze, so werden die Tripel, welche den von ihnen erzeugten kubischen Involutionen zweiter Stufe gemeinschaftlich sind, durch den Ebenenbüschel herausgeschnitten, dessen Axe mit der Geraden  $MN$  zusammenfällt. Die Gesamtheit jener Tripel bildet eine kubische Involution erster Stufe  $I_3$ . Auf die Gerade  $g$  wird sie projiziert in eine  $J_3$ , welche man durch die Gleichungen

$$11) \quad \begin{cases} a_0x_1x_2x_3 + a_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + a_2(x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0, \\ b_0x_1x_2x_3 + b_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + b_2(x_1 + x_2 + x_3) + b_3 = 0 \end{cases}$$

dargestellen kann.

Für  $x_2 = x_3$  bekommt man aus 11) zur Bestimmung der Doppelpunkte jener  $J_3$  zwei Gleichungen, aus welchen durch Elimination von  $x_1$  hervorgeht:

$$12) \quad \dots \quad \left| \begin{array}{cc} a_0x^2 + 2a_1x + a_2, & a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \\ b_0x^2 + 2b_1x + b_2, & b_1x^2 + 2b_2x + b_3 \end{array} \right| = 0.$$

Den vier Wurzeln von 12) entsprechend, gibt es also vier Doppelpunkte. Die Axe  $MN$  trifft demnach vier Tangenten der  $R_3$ , d. h. die Tangentenfläche einer kubischen Raumcurve ist eine abwickelbare Fläche vierten Grades.

Falls die Axe des Ebenenbüschels die Curve trifft, tritt eine quadratische Involution an die Stelle der  $I_3$ . Jene Axe wird dann ausserhalb der Curve nur noch von zwei Tangenten geschnitten, d. h.  $R_3$  ist Rückkehrcurve ihrer Tangentenfläche.

Enthält ein Ebenenbüschel zwei Schmiegungebenen, so lässt sich das auf der Geraden  $g$  erzeugte Bild der betreffenden  $I_3$  durch eine Gleichung der Form

$$13) \quad \dots \quad (x - p)^3 = \lambda(x - q)^3$$

darstellen. Aus

$$14) \quad \dots \quad x - p = \lambda^{\frac{1}{3}}(x - q)$$

ergibt sich nun, weil  $p$  und  $q$  reell sind, dass jedes Tripel nur einen reellen Punkt enthält.

6. Es sei  $\pi$  eine durch die Gerade  $l$  gelegte Ebene, welche  $R_3$  in  $A_1, A_2, A_3$  trifft,  $P_1$  deren Nullpunkt. Wenn  $\pi$  sich um  $l$  dreht, beschreibt  $P_1$  eine Gerade  $l'$ . Denn, sind  $M$  und  $N$  zwei Punkte der Geraden  $l$ , so müssen die Nullebenen  $\mu$  und  $\nu$  durch  $P_1$  gehen, weil  $\pi$  die Nullpunkte  $M$  und  $N$  enthält. Daher liegt  $P_1$  in der Schnittlinie  $l'$  von  $\mu$  und  $\nu$ .

Die Bisecante  $s$ , welche nach  $P_1$  zielt, bestimmt mit  $l'$  eine Ebene, welche  $R_3$ , ausser in den Treffpunkten  $Q_2, Q_3$  der Sehne  $s$ , noch in einem dritten Punkte  $Q_1$  schneidet.

Die Sehne  $Q_1Q_3$  möge nun  $l'$  in dem Punkte  $P_2$  treffen;  $P_2$  ist dann der Nullpunkt der Ebene  $(P_2l)$ . Ebenso ist  $P_3 \equiv (Q_1Q_2, l')$  der Nullpunkt der Ebene  $(P_3l)$ .

Offenbar bilden die Punkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  ein Tripel einer auf  $l'$  befindlichen kubischen Involution erster Stufe, welche aus der Axe  $l$  projiziert wird durch eine kubische Ebeneninvolution, in welcher die Ebenen  $(P_1l)$ ,  $(P_2l)$  und  $(P_3l)$  ein Tripel bilden.

Wird  $\pi$  eine Berührungsebene der  $R_3$ , indem die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  in einen Punkt  $A_{12}$  zusammenfallen, so ist die Tangente  $a_{12}$  dieses Punktes als Durchschnitt der Schmiegungebenen jener Punkte zu betrachten, und der Nullpunkt  $P$  ergibt sich als Schnitt von  $a_{12}$  mit der Schmiegungeebene von  $A_3$ . Die durch  $P$  gezogene Sehne  $s$  wird alsdann mit  $a_{12}$  identisch, wonach  $A_{12}$  auch die oben als  $Q_1$  und  $Q_2$  bezeichneten Punkte ersetzt.

Demnach sind die Doppelpunkte der Involution  $(A_1A_2A_3)$  zugleich Doppelpunkte der Involution  $(Q_1Q_2Q_3)$ , welche durch den Ebenenbüschel  $(l')$  erzeugt wird.

Nun können aber vier Punkte der  $R_3$  nur zwei kubischen Involutionen als Doppelpunkte angehören. Nämlich die betreffenden vier Tangenten werden nur von zwei Transversalen  $l$  und  $l'$  geschnitten; diese sind die Axen der beiden Büschel.

Die Beziehung zwischen den *conjugirten Involutionen*  $(l)$  und  $(l')$  ist somit eine wechselseitige, indem jedes Paar der einen Involution als das neutrale Paar einer kubischen Involution zweiter Stufe erscheint, deren dreifache Elemente ein Tripel der zweiten Involution bilden.

Wenn  $l$  einem Strahlenbüschel angehört, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt seiner Ebene ist, so fällt  $l'$  mit  $l$  zusammen, und man erhält eine sich selbst conjugirte Involution.

7. Wie leicht ersichtlich, kann eine  $I_3$  nicht nur durch zwei Tripel eindeutig bestimmt werden, sondern auch durch ein Tripel  $A_1, A_2, A_3$  und zwei Paare  $B_1, B_2; C_1, C_2$ . Die Axe des betreffenden Ebenenbüschels verbindet dann die Spuren der Geraden  $B_1B_2$  und  $C_1C_2$  in der Ebene  $A_1A_2A_3$ .

Weil ferner vier Sehnen von zwei Transversalen geschnitten werden, gehören vier Punktepaare zwei kubischen Involutionen erster Stufe an.

8. Die Ebenen, welche durch die Tripel einer auf  $R_3$  befindlichen biquadratischen Involution erster Stufe bestimmt werden, bilden einen Büschel dritter Klasse, sind also Schmiegeebenen einer zweiten kubischen Raumcurve. Nämlich durch einen Punkt  $P_1$  gehen von dem sprachlichen Ebenensystem nur die drei Ebenen  $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_4$ , welche  $P_1$  mit den ihm in der  $I_4$  zugeordneten Punkten verbinden.

Beachtet man, dass eine  $I_4$  durch zwei Quadrupel bestimmt ist, so fließt aus obiger Betrachtung der bekannte Satz:

*Die Ebenen zweier der kubischen Raumcurve eingeschriebenen Tetraeder sind Schmiegeebenen einer zweiten kubischen Raumcurve.*

Drei auf  $R_3$  beliebig gewählte Quadrupel bestimmen eine biquadratische Involution zweiter Stufe  $I_4^2$ . Bilden  $P_1, P_2, P_3, P_4$  eine Gruppe dieser  $I_4^2$ , so gehen durch die Sehne  $P_1P_2$  nur zwei von den Ebenen, welche die Tripel der  $I_4^2$  tragen, nämlich  $P_1P_2P_3$  und  $P_1P_2P_4$ ; die Involutionsfläche der  $I_4^2$  ist somit eine quadratische Fläche. Hieraus ergibt sich offenbar der bekannte Satz:

*Drei beliebig gewählte, der kubischen Raumcurve eingeschriebene, Tetraeder sind allemal einer quadratischen Fläche umschrieben.*

# DE REGELMATIGE RUIMTEVERDEELING DOOR VEERTIEN- VLAKKIGE LICHAMEN

DOOR

F. J. VAES.

In een voordracht „On homogeneous division of space” (*Proceedings of the Royal Society*, en *Nature* 1894) toonde Lord Kelvin aan, dat de ruimte kan worden opgevuld door gelijk en gelijkvormige veertienvlakkige lichamen (orthic tetrakaidekahedra door hem genoemd), elk begrensd door 6 vierkanten en 8 regelmatige zeshoeken.

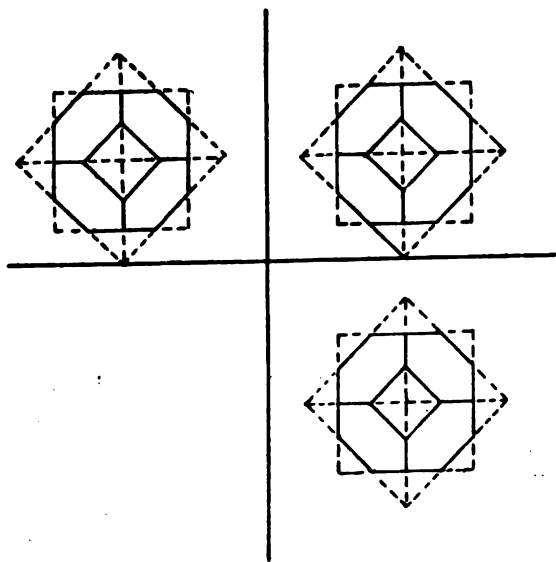


Fig. 1.

In de *Versl. en Med. der Kon. Ak. van Wet.*, 1894/95. deel III, gaf Prof. P. H. Schoute een kort, direct bewijs daarvan. Hier volgt een ander bewijs:

consists of mere self corresponding chords of  $S_3$ . And in the same way it is proved generally that any surface  $F_{2n}$ , of which  $S_3$  is an  $n$ -fold curve, is a scroll corresponding to itself.

The system of surfaces  $F_4$  with the common double curve  $S_3$  is fivefold infinite. According to ROHN (*Math. Annalen*, vol. 28, p. 288) any of these surfaces is the locus of the line connecting the points  $\lambda, \mu$  of  $S_3$  bound to one another by the condition

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda + \mu)^2 + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0,$$

quadratic in each of the two parameters and symmetric as to both; this equation containing six coefficients, the system of surfaces is fivefold infinite.

Indeed, five points chosen at random determine one surface of the system; for two surfaces  $F^4$  with the double curve  $S_3$  passing through these points coincide, while they have in common a locus of order 17, the  $S_3$  counted four times and the five chords of  $S_3$  containing the given points. And on the other hand the symbolic equation

$$(aA + bB + cC)^{(3)} = 0$$

represents a fivefold infinite system of these quartic surfaces.

In the more general case of the scrolls  $F_{2n}$  passing  $n$  times through  $S_3$  we have to deal with the function  $f(\lambda, \mu) = 0$  of order  $n$  in each of the parameters and symmetric as to both. It is easily seen that the numbers of the terms of order  $2n, 2n-1, 2n-2, \dots$  respectively are obtained by proceeding in the series

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \text{ etc.}$$

up to the  $n+1^{\text{st}}$  term included and repeating these numbers in inverse order with exception of the last written one, which gives three equal maximal numbers or only one according to  $n$  being even or uneven. So the total number always proves to be  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ , which result agrees with the multiplicity indicated by the symbolic equation

$$(aA + bB + cC)^{(n)} = 0,$$

as is known by the theory of plane curves, etc.

The case  $y=1, z=1$ . By the substitution 2) the sum of the indices of the four coordinates  $x_1, x_2, x_3, x_4$  in any

term  $x_i X_i$  of the equation 9) representing the twelvefold infinite system of surfaces  $F_4$  touching  $D_4$  along  $S_3$  is not altered; therefore the surface 9) can only be transformed in itself, if this is the case with each of the surfaces the equations of which are obtained by putting equal to nought the different pieces of the left side of 9) that are homogeneous with regard to these sum of indices. And this is possible in two different manners, for the substitution can render all the forms with reversed sign or with the same sign. In the first case we find the six forms

$$\left. \begin{array}{l} x_2 X_1 - x_1 X_2 \\ x_3 X_1 - x_1 X_3 \\ x_4 X_1 - x_1 X_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x_3 X_4 - x_4 X_3 \\ x_4 X_2 - x_2 X_4 \\ x_2 X_3 - x_3 X_2 \end{array} \right\},$$

that reconduct immediately to the case

$$(aA + bB + cC)^{(3)} = 0$$

of the scrolls  $F^4$  passing twice through  $S_3$ . And the second supposition furnishes the ten forms

$$\left. \begin{array}{l} X_{1,2} \equiv x_2 X_1 + x_1 X_2 \\ X_{1,3} \equiv x_3 X_1 + x_1 X_3 \\ X_{1,4} \equiv x_4 X_1 + x_1 X_4 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} X_{3,4} \equiv x_3 X_4 + x_4 X_3 \\ X_{4,2} \equiv x_4 X_2 + x_2 X_4 \\ X_{2,3} \equiv x_2 X_3 + x_3 X_2 \end{array} \right\},$$

$$X_{i,i} = 2x_i X_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

between which according to 8) we have the relations

$$X_{1,2} = X_{3,3}, \quad X_{1,4} = X_{2,3}, \quad X_{2,4} = X_{3,3}.$$

So we come to the result that the system of quartic surfaces touching  $D_4$  along  $S_3$ , each surface of which is anallagmatic with respect to our correspondence, is sixfold infinite.

9. Application. Six points on  $S_3$  and a seventh point  $P$  not belonging to  $S_3$  determine a net of quadrics that have in common an eighth point  $P''$  situated on the chord  $c$  of  $S_3$  passing through  $P$ . This new correspondence  $(P, P'')$  is not to be confounded with the correspondence  $(P, P')$  treated here. It is a transformation of the seventh order, distinguishing itself from the cubic one by the fact that the points  $Q, R$  common to the chord  $c$  and  $S_3$ , instead of being the double points of the involution on  $c$ , form a pair of it. This proves at the

Wat de perioden en de invarianten der hier ingevoerde  $p$ -functie moeten zijn, is nog onbekend. Uit de gegeven integraal moeten deze invarianten  $g_2$  en  $g_3$ , alsmede het argument  $v$  worden berekend. Dit nu geschiedt zoo rechtstreeks mogelijk, als men de ontwikkeling van  $z$  naar  $u$  in de omgeving van  $u = 0$  eenvoudig vergelijkt met de ontwikkeling van  $u$  naar  $z$  in de omgeving van  $z = \infty$ .

De eerste ontwikkeling is onmiddellijk neer te schrijven; men heeft

$$z + \frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{u} \left[ 1 + u^2 p v + \frac{1}{2} u^3 p' v + u^4 \left( \frac{1}{6} p'' v - \frac{1}{60} g_2 \right) + \dots \right].$$

De tweede ontwikkeling volgt uit de integraal. Stelt men vooraf

$$z + \frac{a_1}{a_0} = y,$$

dan is

$$u = \int_x^y \frac{d_4}{y^2} \left( 1 + 6 \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{y^2} + 4 \frac{b_3}{b_0} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{b_4}{b_0} \cdot \frac{1}{y^4} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

en na uitvoering der machtsverheffing en integratie

$$u = -\frac{1}{y} + \frac{b_2}{b_0} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{b_3}{2b_0} \cdot \frac{1}{y^4} + \frac{1}{10} \left( \frac{b_4}{b_0} - \frac{27b_2^2}{b_0^2} \right) \cdot \frac{1}{y^5} + \dots$$

Uit de eerste ontwikkeling evenwel kan men afleiden

$$\frac{1}{y} = -u \left[ 1 - u^2 p v - \frac{1}{2} u^3 p' v + \frac{1}{10} u^4 g_2 + \dots \right],$$

zoodat de onderstaande identieke vergelijking moet bestaan

$$\begin{aligned} u = u - u^3 \left( p v + \frac{b_2}{b_0} \right) - \frac{1}{2} u^4 \left( p' v - \frac{b_3}{b_0} \right) + \\ + u^5 \left( \frac{1}{10} g_2 + 3 \frac{b_2}{b_0} p v - \frac{b_4 b_0 - 27 b_2^2}{10 b_0^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Hieruit zijn  $p v$ ,  $p' v$ ,  $g_2$  en  $g_3$  volkomen bepaald. Achtereenvolgens vindt men:



$$\begin{aligned}
 pv &= -\frac{b_2}{b_0} = \frac{a_1^2 - a_2 a_0}{a_0^2}, \quad p'v = \frac{b_3}{b_0} = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^2}, \\
 g_2 &= -\frac{30b_2}{b_0} pv + \frac{b_0 b_4 - 27b_2^2}{b_0^2} = \frac{b_0 b_4 + 3b_2^2}{b_0^2} = \frac{a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2}{a_0^2}, \\
 g_3 &= 4p^3 v - g_2 pv - p'^2 v = \frac{b_0 b_2 b_4 - b_2^3 - b_0 b_3^2}{b_0^3} = \\
 &= \frac{a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4}{a_0^3},
 \end{aligned}$$

en daarmede zijn alle voor de omkeering benoodigde formules verkregen.

---

SURFACES-IMAGES <sup>1)</sup>

PAR

G. MANNOURY.

1. Pour le géomètre de nos jours la conception des points, des courbes ou des surfaces qu'il étudie s'est associée si intimement à celle des coordonnées ou des équations correspondantes, qu'il ne cesse pas d'employer la terminologie géométrique dans les cas où la représentation géométrique commence à lui faire défaut; en parlant de courbes qui se coupent en des points imaginaires ou à l'infini, de lignes de longueur zéro, de perpendiculaires qui se confondent etc., il exprime des faits purement analytiques sans y attacher une signification géométrique. Pourtant il n'est pas à contredire que l'interprétation géométrique d'une relation analytique donne un appui à l'esprit qui facilite les recherches.

C'est pour cette raison que je me propose de représenter univoquement les systèmes  $\mathcal{E}$  des rapports mutuels de trois variables complexes  $x, y, z$  (ne s'annulant pas toutes à la fois) par les points (réels)  $P$  d'une surface fermée à quatre dimensions  ${}^4I$  (*surface-image*) <sup>2)</sup> et cela de telle manière que

1°. tous les points  $P$ ,

2°. toutes les  ${}^2$ surfaces  ${}^2S$ , (situées dans  ${}^4I$ ) qui représentent les équations linéaires,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

soient géométriquement équivalents.

Ces conditions reviennent à la suivante: Si  ${}_a\mathcal{E} \equiv {}_ax, {}_ay, {}_az$  (représenté par le point  ${}_aP$  de  ${}^4I$ ) est un système de valeurs satisfaisant à l'équation  ${}_a\alpha x + {}_a\beta y + {}_a\gamma z = 0$  (représentée par la  ${}^2$ surface  ${}_a{}^2S$  située dans  ${}^4I$ ) et si de même  ${}_b\mathcal{E} \equiv {}_bx, {}_by, {}_bz$  (repr. par  ${}_bP$ ) satisfait à  ${}_b\alpha x + {}_b\beta y + {}_b\gamma z = 0$  (repr. par  ${}_b{}^2S$ ),

<sup>1)</sup> La plupart des résultats suivants ont été communiqués à la Soc. math. d'Amsterdam dans sa séance du 29 Oct. 1898.

<sup>2)</sup> Les indices placés à droite en haut se rapportent au nombre des dimensions.

la <sup>4</sup>surface-image doit pouvoir glisser sur elle-même, de sorte que <sup>a</sup>P vienne en <sup>b</sup>P et que <sup>a</sup>S coïncide avec <sup>b</sup>S.

Pour arriver à ce résultat, il faut d'abord établir une substitution (linéaire) entre les variables  $x, y, z$  qui puisse servir à représenter ces glissements de <sup>4</sup>I sur elle-même. Pour l'obtenir je considère préliminairement une représentation géométrique des systèmes  $\mathcal{E}$  par des plans situés dans un <sup>6</sup>espace; une certaine substitution entre les  $x, y, z$  fait passer ses plans les uns dans les autres sans en changer la position relative; cette substitution que j'ai appelée la substitution *c-orthogonale* me sert de base pour trouver une expression pour la distance de deux points arbitraires <sup>1</sup>P et <sup>2</sup>P de la <sup>4</sup>surface-image à trouver, en fonction des systèmes  ${}_1x {}_1y {}_1z, {}_2x {}_2y {}_2z$  qu'ils représentent. Cette expression me fournit enfin le moyen d'établir les équations d'une <sup>4</sup>surface-image satisfaisant aux conditions posées. Cela fait, il ne sera pas difficile d'étendre les résultats obtenus au cas de plusieurs variables.

### La substitution c-orthogonale.

#### 2. Soit

$$\begin{aligned}x &= x_r + ix_i \\y &= y_r + iy_i \\z &= z_r + iz_i, \quad ^1)\end{aligned}$$

et faisons

$$\begin{aligned}{}_1X &= x_r, \quad {}_2X = x_i, \\{}_3X &= y_r, \quad {}_4X = y_i, \\{}_5X &= z_r, \quad {}_6X = z_i,\end{aligned}$$

les X étant des coordonnées cartésiennes d'un <sup>6</sup>E.

Tous les systèmes  $x, y, z$  ayant les mêmes rapports mutuels qu'un système donné  $a, b, c$  sont (en indiquant par  $\lambda$  un nombre complexe arbitraire):

$$\begin{aligned}x &= \lambda a & x_r + ix_i &= (\lambda_r a_r - \lambda_i a_i) + i(\lambda_r a_i + \lambda_i a_r) \\y &= \lambda b & \text{ou } y_r + iy_i &= (\lambda_r b_r - \lambda_i b_i) + i(\lambda_r b_i + \lambda_i b_r) \\z &= \lambda c & z_r + iz_i &= (\lambda_r c_r - \lambda_i c_i) + i(\lambda_r c_i + \lambda_i c_r).\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Cette notation pour la décomposition d'un nombre complexe  $p = p_r + ip_i$  ( $p_r$  et  $p_i$  réels) sera employée généralement dans cet article.

Donc, les points correspondants du  ${}^{\circ}\text{E}$  doivent satisfaire à

$$\begin{aligned} {}_1\text{X} &= \lambda_r a_r - \lambda_i a_i, & {}_2\text{X} &= \lambda_r a_i + \lambda_i a_r, \\ {}_3\text{X} &= \lambda_r b_r - \lambda_i b_i, & {}_4\text{X} &= \lambda_r b_i + \lambda_i b_r, \\ {}_5\text{X} &= \lambda_r c_r - \lambda_i c_i, & {}_6\text{X} &= \lambda_r c_i + \lambda_i c_r. \end{aligned}$$

Ces équations représentent un  ${}^2\text{plan}$   ${}^2p$  passant par l'origine des coordonnées et représentant le système  $\mathfrak{Z}$  des rapports mutuels de  $x, y, z$ .<sup>1)</sup>

Chaque substitution linéaire

$$(1) \quad \begin{cases} \text{X} = {}_1\text{L}x + {}_1\text{M}y + {}_1\text{N}z, \\ \text{Y} = {}_2\text{L}x + {}_2\text{M}y + {}_2\text{N}z, \\ \text{Z} = {}_3\text{L}x + {}_3\text{M}y + {}_3\text{N}z, \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} \text{X}_r + i\text{X}_i &= ({}_1\text{L}_r x_r - {}_1\text{L}_i x_i + {}_1\text{M}_r y_r - {}_1\text{M}_i y_i + {}_1\text{N}_r z_r - {}_1\text{N}_i z_i) \\ &\quad + i({}_1\text{L}_i x_r + {}_1\text{L}_r x_i + {}_1\text{M}_i y_r + {}_1\text{M}_r y_i + {}_1\text{N}_i z_r + {}_1\text{N}_r z_i), \\ &\dots\dots\dots, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

transforme les plans  ${}^2p$  les uns dans les autres.

Pour que leurs positions relatives ne soient pas changées il faut et il suffit que la substitution correspondante entre les coordonnées du  ${}^{\circ}\text{E}$ :

$$(2) \quad \begin{cases} {}_1\text{Y} = {}_1\text{L}_{r1}\text{X} - {}_1\text{L}_{i2}\text{X} + {}_1\text{M}_{r3}\text{X} - {}_1\text{M}_{i4}\text{X} + {}_1\text{N}_{r5}\text{X} - {}_1\text{N}_{i6}\text{X}, \\ {}_2\text{Y} = {}_1\text{L}_{i1}\text{X} + {}_1\text{L}_{r2}\text{X} + {}_1\text{M}_{i3}\text{X} + {}_1\text{M}_{r4}\text{X} + {}_1\text{N}_{i5}\text{X} + {}_1\text{N}_{r6}\text{X}, \\ {}_3\text{Y} = {}_2\text{L}_{r1}\text{X} - {}_2\text{L}_{i2}\text{X} + {}_2\text{M}_{r3}\text{X} - {}_2\text{M}_{i4}\text{X} + {}_2\text{N}_{r5}\text{X} - {}_2\text{N}_{i6}\text{X}, \\ {}_4\text{X} = {}_2\text{L}_{i1}\text{X} + {}_2\text{L}_{r2}\text{X} + {}_2\text{M}_{i3}\text{X} + {}_2\text{M}_{r4}\text{X} + {}_2\text{N}_{i5}\text{X} + {}_2\text{N}_{r6}\text{X}, \\ {}_5\text{Y} = {}_3\text{L}_{r1}\text{X} - {}_3\text{L}_{i2}\text{X} + {}_3\text{M}_{r3}\text{X} - {}_3\text{M}_{i4}\text{X} + {}_3\text{N}_{r5}\text{X} - {}_3\text{N}_{i6}\text{X}, \\ {}_6\text{Y} = {}_3\text{L}_{i1}\text{X} + {}_3\text{L}_{r2}\text{X} + {}_3\text{M}_{i3}\text{X} + {}_3\text{M}_{r4}\text{X} + {}_3\text{N}_{i5}\text{X} + {}_3\text{N}_{r6}\text{X}, \end{cases}$$

soit une substitution orthogonale.

Cela exige:

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad \Sigma {}_1\text{L}_r^2 + {}_1\text{L}_i^2 &= 1, \\ \Sigma {}_2\text{L}_r^2 + {}_2\text{L}_i^2 &= 1, \\ \Sigma {}_3\text{L}_r^2 + {}_3\text{L}_i^2 &= 1, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Il est évident que le réciproque n'est pas vrai: le nombre de  ${}^2\text{plans}$  passant par l'origine de  ${}^{\circ}\text{E}$  étant  $\infty^3$  et celui des systèmes  $\mathfrak{Z}$  n'étant que  $\infty^4$  il est impossible qu'à chacun de ces  ${}^2\text{plans}$  il corresponde un système  $\mathfrak{Z}$ .

<sup>2)</sup> Le signe  $\Sigma$  sans indices se rapporte toujours à la permutation cyclique des lettres.

et

$$\begin{aligned}
2^0. \quad & \Sigma_2 L_r {}_3L_r + {}_2L_3 L_i = 0, \\
& \Sigma_3 L_r {}_1L_r + {}_3L_i {}_1L_i = 0, \\
& \Sigma_1 L_r {}_2L_r + {}_1L_i {}_2L_i = 0, \\
& \Sigma_2 L_r {}_3L_i - {}_2L_i {}_3L_r = 0, \\
& \Sigma_3 L_r {}_1L_i - {}_3L_i {}_1L_r = 0, \\
& \Sigma_1 L_r {}_2L_i - {}_1L_i {}_2L_r = 0.
\end{aligned}$$

En indiquant par l'indice  $c$  l'imaginaire conjuguée d'un nombre complexe, ces équations s'écrivent :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^0. \Sigma_1 L_1 L^c = 1 \quad , \quad \Sigma_2 L_2 L^c = 1 \quad , \quad \Sigma_3 L_3 L^c = 1, \\ 2^0. \Sigma_2 L_3 L^c = 0 \quad , \quad \Sigma_3 L_1 L^c = 0 \quad , \quad \Sigma_1 L_2 L^c = 0. \end{array} \right.$$

Les substitutions de la forme (1), remplissant les conditions (3) jouissent de quelques propriétés remarquables, dont je signalerai celles qui nous serviront plus tard. Je les appelle les *substitutions c-orthogonales* pour rappeler qu'en ôtant les indices  $c$  on les change en des substitutions orthogonales ordinaires.

3. D'abord je dis, qu'à côté des conditions (3) on peut mettre :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^0. \Sigma_k {}_kL_k L^c = 1 \quad , \quad \Sigma_k {}_kM_k M^c = 1 \quad , \quad \Sigma_k {}_kN_k N^c = 1, \\ 2^0. \Sigma_k {}_kM_k N^c = 0 \quad , \quad \Sigma_k {}_kN_k L^c = 0 \quad , \quad \Sigma_k {}_kL_k M^c = 0. \end{array} \right.$$

En effet, les conditions (3) remplies, la substitution (2) sera orthogonale; il s'en suit

$$\begin{aligned}
1^0. \quad & \Sigma_k {}_kL_r {}_kL_i = 1, \\
& \Sigma_k {}_kM_r {}_kM_i = 1, \\
& \Sigma_k {}_kN_r {}_kN_i = 1, \\
2^0. \quad & \Sigma_k {}_kM_r {}_kN_r + {}_kM_i {}_kN_i = 0, \\
& \Sigma_k {}_kN_r {}_kL_r + {}_kN_i {}_kL_i = 0, \\
& \Sigma_k {}_kL_r {}_kM_r + {}_kL_i {}_kM_i = 0,
\end{aligned}$$

$$\sum_k {}_k\mathbf{M}_r {}_k\mathbf{N}_i - {}_k\mathbf{M}_i {}_k\mathbf{N}_r = 0,$$

$$\sum_k {}_k\mathbf{N}_r {}_k\mathbf{L}_i - {}_k\mathbf{N}_i {}_k\mathbf{L}_r = 0,$$

$$\sum_k {}_k\mathbf{L}_r {}_k\mathbf{M}_i - {}_k\mathbf{L}_i {}_k\mathbf{M}_r = 0,$$

équations qui peuvent s'écrire dans la forme (4).

On peut résoudre les équations (1) par rapport à  $x, y, z$ ; si l'on multiplie la première par  ${}_1\mathbf{L}^c$ , la seconde par  ${}_2\mathbf{L}^c$ , la troisième par  ${}_3\mathbf{L}^c$  et si l'on ajoute, on trouve, ayant égard aux relations (4):

$$x = {}_1\mathbf{L}^c \mathbf{X} + {}_2\mathbf{L}^c \mathbf{Y} + {}_3\mathbf{L}^c \mathbf{Z}, \text{ et de même:}$$

$$y = {}_1\mathbf{M}^c \mathbf{X} + {}_2\mathbf{M}^c \mathbf{Y} + {}_3\mathbf{M}^c \mathbf{Z},$$

$$z = {}_1\mathbf{N}^c \mathbf{X} + {}_2\mathbf{N}^c \mathbf{Y} + {}_3\mathbf{N}^c \mathbf{Z}.$$

Appliquons la substitution c-orthogonale à la fonction  $\mathbf{X}\mathbf{X}^c + \mathbf{Y}\mathbf{Y}^c + \mathbf{Z}\mathbf{Z}^c$ . Il vient:

$$\sum_k ({}_k\mathbf{L}x + {}_k\mathbf{M}y + {}_k\mathbf{N}z) ({}_k\mathbf{L}^cx + {}_k\mathbf{M}^cy + {}_k\mathbf{N}^cz),$$

ou  $xx^c + yy^c + zz^c$ , en vertu de (4). Réciproquement toute substitution linéaire qui transforme  $\sum \mathbf{X}\mathbf{X}^c$  en  $\sum xx^c$  est une substitution c-orthogonale. Il s'en suit que le résultat de plusieurs substitutions c-orthogonales est encore une substitution c-orthogonale.

De même la fonction  $\mathbf{X}\mathbf{X}'^c + \mathbf{Y}\mathbf{Y}'^c + \mathbf{Z}\mathbf{Z}'^c$ , où  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  et  $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$  sont des variables cogrédiétes, se transforme en

$$\sum_k ({}_k\mathbf{L}x + {}_k\mathbf{M}y + {}_k\mathbf{N}z) ({}_k\mathbf{L}^cx' + {}_k\mathbf{M}^cy' + {}_k\mathbf{N}^cz')$$

ou en  $xx'^c + yy'^c + zz'^c$ . En général, on pourra mettre à côté des fonctions isotropes de Cauchy (fonctions qui ne changent ni de valeur ni de forme par des substitution orthogonales), des fonctions analogues, *c-isotropes* qui ne changent ni de valeur ni de forme par les substitutions c-orthogonales.

4. Cela posé, je démontrerai que les substitutions c-orthogonales nous puissent servir à représenter les glissements de  ${}^4\mathbf{I}$  sur elle-même, c.-à.-d. qu'elles nous permettent (voir. n°. 1) de transformer un système donné  ${}_a\mathbf{E}$  satisfaisant à  ${}_a\alpha x + {}_a\beta y + {}_a\gamma z = 0$  en un autre système donné  ${}_b\mathbf{E}$ , satisfaisant à  ${}_b\alpha x + {}_b\beta y + {}_b\gamma z = 0$ .

Le résultat de deux substitutions c-orthogonales étant encore une substitution c-orthogonale, il suffira de prouver qu'on peut disposer des coefficients  ${}_kL$ ,  ${}_kM$ ,  ${}_kN$  de manière à transformer à la fois le système 1, 0, 0 en le système  ${}_aX \equiv {}_ax$ ,  ${}_ay$ ,  ${}_az$  et l'équation  $y = 0$  en  ${}_a\alpha x + {}_a\beta y + {}_a\gamma z = 0$ .

En appliquant les formules (1) et (5) on trouve immédiatement pour le transformé de 1, 0, 0 le système

$${}_1L, {}_2L, {}_3L$$

et pour la transformée de  $y = 0$  l'équation

$${}_1M^c x + {}_2M^c y + {}_3M^c z = 0,$$

ce qui donne

$${}_1L = \lambda {}_a\alpha, \quad {}_1M = \mu {}_a\alpha^c,$$

$${}_2L = \lambda {}_ay, \quad {}_2M = \mu {}_a\beta^c,$$

$${}_3L = \lambda {}_az, \quad {}_3M = \mu {}_a\gamma^c,$$

valeurs qui satisfont à  $\sum_k {}_kL {}_kM^c = 0$ .

On disposera des facteurs  $\lambda$  et  $\mu$  de manière à satisfaire à  $\sum_k {}_kL {}_kL^c = 1$ ,  $\sum_k {}_kM {}_kM^c = 1$ , ce qui les détermine à un facteur de module 1 près.

Ayant trouvé des valeurs pour les  $L$  et les  $M$  on détermine les  $N$  par les équations linéaires

$$\sum_k {}_kL^c {}_kN = 0, \quad \sum_k {}_kM^c {}_kN = 0,$$

ce qui donne

$${}_1N = \nu \begin{vmatrix} {}_2L^c & {}_3L^c \\ {}_2M^c & {}_3M^c \end{vmatrix}, \quad {}_2N = \nu \begin{vmatrix} {}_3L^c & {}_1L^c \\ {}_3M^c & {}_1M^c \end{vmatrix}, \quad {}_3N = \nu \begin{vmatrix} {}_1L^c & {}_2L^c \\ {}_1M^c & {}_2M^c \end{vmatrix}.$$

Enfin on disposera du facteur  $\nu$  de manière à satisfaire  $\sum_k {}_kN {}_kN^c = 1$ , ce qui le détermine encore à un facteur de module 1 près.

On voit donc qu'au moyen de la substitution c-orthogonale on peut effectuer la transformation demandée et cela de plus d'une manière; de sorte qu'elle possède les propriétés exigées par le but auquel elle nous doit servir. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> On se demandera peut-être si la substitution orthogonale ordinaire ne pourrait nous rendre même service. Pourtant la substitution orthogonale ne peut jamais transformer trois valeurs satisfaisant à  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  en trois autres pour lesquelles  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ . Une difficulté correspondante pour la substitution c-orthogonale n'existe pas, vu que (les variables ne s'annulant jamais à la fois) il n'y a pas de systèmes de variables pour lesquels  $xx^c + yy^c + zz^c = 0$ .

### La distance de deux points de ${}^4I$ .

5. Jusqu'ici nous avons considéré  $x, y, z$  comme des variables indépendantes homogènes; pour simplifier les calculs, nous supposons dans ce qui suit

$$(6) \quad xx^c + yy^c + zz^c = 1;$$

cela ne change en rien la généralité de notre problème, vu que les variables ne s'annulent jamais à la fois.

Cela posé, passons à la recherche d'une expression pour la distance de deux points arbitraires  ${}_aP$  et  ${}_bP$  de  ${}^4I$  en fonction des systèmes  ${}_ax{}_ay{}_az$ ,  ${}_bx{}_by{}_bz$  qu'ils doivent représenter. Il suit de ce qui précède que cette expression doit être une fonction c-isotrope toujours réelle de  ${}_ax{}_ay{}_az$ ,  ${}_bx{}_by{}_bz$ , qui disparaît pour  ${}_ax : {}_ay : {}_az :: {}_bx : {}_by : {}_bz$ .

Pour la trouver, considérons d'abord la  ${}^2$ surface (située dans  ${}^4I$ ) qui représente l'équation  $z = 0$ . Les points de cette  ${}^2$ surface (qui est égale à toutes celles qui représentent des équations linéaires) doivent fournir une représentation géométriquement équivalente de tous les systèmes  $x, y, 0$ , c.-à.-d. cette  ${}^2$ surface constitue une surface-image à deux dimensions  ${}^2I$ . Or, on sait qu'une telle représentation s'obtient facilement par la projection stéréographique d'un „plan complexe” représentant le rapport  $\frac{x}{y} = R$  sur une sphère de rayon 1.

Soit en effet

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

cette sphère, faisons  $\xi = R_r$ ,  $\eta = R_i$  et prenons le point 0, 0, 1 pour centre de projection; alors on a

$$\xi = \frac{2R_r}{1 + R_r^2 + R_i^2}, \quad \eta = \frac{2R_i}{1 + R_r^2 + R_i^2}, \quad \zeta = \frac{R_r^2 + R_i^2 - 1}{R_r^2 + R_i^2 + 1}.$$

En substituant

$$R_r = \frac{x_r y_r + x_i y_i}{y_r^2 + y_i^2} = \frac{xy^c + x^c y}{2yy^c},$$

$$R_i = \frac{x_i y_r - x_r y_i}{y_r^2 + y_i^2} = \frac{-i(xy^c - x^c y)}{2yy^c}.$$



et ayant égard à  $xx^c + yy^c = 1$ , nous trouvons

$$\xi = xy^c + x^c y, \quad \eta = -i(xy^c - x^c y), \quad \zeta = xx^c - yy^c,$$

ce qui donne pour le carré de la distance de deux points de la sphère  ${}_1P$  et  ${}_2P$ , correspondant respectivement à  ${}_1x$ ,  ${}_1y$  et à  ${}_2x$ ,  ${}_2y$ :

$$\begin{aligned} \overline{{}_1P{}_2P}^2 &= ({}_1x{}_1y^c + {}_1x^c{}_1y - {}_2x{}_2y^c - {}_2x^c{}_2y)^2 \\ &\quad - ({}_1x{}_1y^c - {}_1x^c{}_1y - {}_2x{}_2x^c + {}_2x^c{}_2y)^2 \\ &\quad + ({}_1x{}_1x^c - {}_1y{}_1y^c - {}_2x{}_2x^c + {}_2y{}_2y^c)^2. \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant  $({}_1x{}_1x^c + {}_1y{}_1y^c + {}_2x{}_2x^c + {}_2y{}_2y^c)^2 = 4$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \overline{{}_1P{}_2P}^2 &= ({}_1x{}_1y^c + {}_1x^c{}_1y - {}_2x{}_2y^c - {}_2x^c{}_2y)^2 \\ &\quad - ({}_1x{}_1y^c - {}_1x^c{}_1y - {}_2x{}_2x^c + {}_2x^c{}_2y)^2 \\ &\quad + ({}_1x{}_1x^c - {}_1y{}_1y^c - {}_2x{}_2x^c + {}_2y{}_2y^c)^2 \\ &\quad - ({}_1x{}_1x^c + {}_1y{}_1y^c + {}_2x{}_2x^c + {}_2y{}_2y^c)^2 + 4 = \\ &= 4({}_1x{}_1y^c - {}_2x{}_2y^c)({}_1x^c{}_1y - {}_2x^c{}_2y) - 4({}_1x{}_1x^c - {}_2y{}_2y^c)({}_1y{}_1y^c - {}_2x{}_2x^c) + 4 = \\ &= 4 - 4({}_1x^c{}_2x{}_1y{}_2y^c + {}_1x{}_2x^c{}_1y^c{}_2y + {}_1y{}_1y^c{}_2y{}_2y^c + {}_1x{}_1x^c{}_2x{}_2x^c) = \\ (7) \quad &= 4 - 4({}_1x{}_2x^c + {}_1y{}_2y^c)({}_1x^c{}_2x + {}_1y^c{}_2y). \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette expression une fonction c-isotrope pour la substitution c-orthogonale à 2 variables

$$\left. \begin{aligned} X &= {}_1Lx + {}_1My \\ Y &= {}_2Lx + {}_2My \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} {}_1L{}_1L^c + {}_1M{}_1M^c &= 1 \\ {}_2L{}_2L^c + {}_2M{}_2M^c &= 1. \\ {}_1L{}_2L^c + {}_1M{}_2M^c &= 0 \end{aligned}$$

6. Pour étendre ce résultat au cas de trois variables, c. à d. pour trouver l'expression pour la distance de deux points arbitraires  ${}_aP$  et  ${}_bP$  de  ${}^4I$ , nous n'avons qu' à exprimer que cette expression prenne la forme (7), dès qu'on transforme  ${}_aP$  et  ${}_bP$  par une substitution c-orthogonale en deux points  ${}_1P$  et  ${}_2P$  pour lesquels  $z = 0$ . Sans aucun calcul, le résultat est facile à prévoir. En effet: l'expression

$$\begin{aligned} 4 - 4(ax{}_bx^c + a{}_by{}_by^c + a{}_bz{}_bz^c)(a{}_x^c{}_bx + a{}_y^c{}_by + a{}_z^c{}_bz) = \\ = 4(1 - \sum a{}_x{}_bx^c^2) \end{aligned}$$

satisfait à ces conditions, de sorte que nous pouvons établir

$$(8) \quad \overline{aP_bP}^2 = 4(1 - |\sum a x_b x_c|^2).$$

Cette formule renferme la solution complète de notre problème. En effet, par elle toutes les distances mutuelles des points de la 'surface-image' 'I' étant fixées, cette 'surface' est complètement définie, donc il est possible de déduire toutes ses propriétés de la formule (8). Toutefois, il reste à prouver que la 'surface' ainsi définie satisfait aux conditions posées. Ce preuve sera facile, dès que nous aurons démontré qu'elle peut être placée dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions.

Pour mettre ce point hors de doute nous chercherons les équations de 'I' en coordonnées cartésiennes <sup>1)</sup>.

#### La 'surface-image'.

7. Soient  ${}_kX$  ( $k = 1, \dots, n$ ) des coordonnées cartésiennes dans un  ${}^nE$  et représentons la 'surface-image' par les équations

$${}_kX = {}_kf(x, y, z).$$

Il s'agit de déterminer des fonctions  ${}_kf$  toujours réelles, de manière à satisfaire identiquement à

$$(9) \quad \sum_{k=1, \dots, n} \{ {}_kf(a^x, ay, az) - {}_kf(b^x, by, bz) \}^2 = 4(1 - |\sum a x_b x_c|^2).$$

Or, ayant égard à  $\sum a x_a x_c = 1$ ,  $\sum b x_b x_c = 1$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 4(1 - |\sum a x_b x_c|^2) &= \\ &= 2(\sum^2 a x_a x_c + \sum^2 b x_b x_c - 2 |\sum a x_b x_c|^2) = \\ &= 2(\sum^2 a x_a{}^{,c} + \sum^2 b x_b{}^{,c} - 2 \sum a x_b x_c \sum a x_c{}^b x) = \\ &= 2(\sum a x^2 a x^c{}^2 + \sum b x^2 b{}^{,c}{}^2 + 2 \sum a y a y^c a z a z^c + 2 \sum b y b y^c b z b z^c - \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Il est clair, qu'en remplaçant dans la formule (8) le coefficient 4 par une autre constante arbitraire, on obtient encore une 'surface-image', semblable à la première.

$$\begin{aligned}
& - 2 \sum a x x^c a x^c b x - 2 \sum a y y^c a z^c b z - 2 \sum a z b x^c a y^c b y = \\
& = 2 \sum (a x a x^c - b x b x^c)^2 + 4 \sum (a y a z^c - b y b z^c) (a y^c a z - b y^c b z) = \\
& = 2 \sum (a x a x^c - b x b x^c)^2 + \sum \{ (a y a z^c + a y^c a z) - (b y b z^c + b y^c b z) \}^2 - \\
& - \sum \{ (a y a z^c - a y^c a z) - (b y b z^c - b y^c b z) \}^2,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on satisfait identiquement à l'égalité (9) en posant

$$(10) \quad \begin{cases} {}_1X = {}_1f = \sqrt{2} \, x x^c, \\ {}_2X = {}_2f = \sqrt{2} \, y y^c, \\ {}_3X = {}_3f = \sqrt{2} \, z z^c, \\ {}_4X = {}_4f = y z^c + y^c z, \\ {}_5X = {}_5f = i (y z^c - y^c z), \\ {}_6X = {}_6f = z x^c + z^c x, \\ {}_7X = {}_7f = i (z x^c - z^c x), \\ {}_8X = {}_8f = x y^c + x^c y, \\ {}_9X = {}_9f = i (x y^c - x^c y). \end{cases}$$

On s'en assure facilement que ces fonctions ne prennent jamais que des valeurs réelles en les mettant sous la forme

$$(11) \quad \begin{cases} {}_1X = \sqrt{2} (x_r^2 + x_i^2), \\ {}_2X = \sqrt{2} (y_r^2 + y_i^2), \\ {}_3X = \sqrt{2} (z_r^2 + z_i^2), \\ {}_4X = 2(y_r z_r + y_i z_i), \\ {}_5X = 2(y_r z_i - y_i z_r), \\ {}_6X = 2(z_r x_r + z_i x_i), \\ {}_7X = 2(z_r x_i - z_i x_r), \\ {}_8X = 2(x_r y_r + x_i y_i), \\ {}_9X = 2(x_r y_i - x_i y_r). \end{cases}$$

A première vue il pourrait sembler que les équations (11) ne représentassent une surface à cinq dimensions parce qu'elles renferment 6 paramètres, liés par une seule relation  $\Sigma (x_r^2 + x_i^2) = 1$ . Pourtant les équations (10) montrent qu'on ne change pas les valeurs des  $X$  en multipliant  $x, y, z$  par un facteur ( $e^{i\theta}$ ) de module 1, de sorte qu'à chacun des systèmes de rapports de  $x, y, z$ , il correspond un et un seul point  ${}_1X, \dots, {}_9X$ . Réciproquement à chaque point  ${}_1X, \dots, {}_9X$  il correspond un et

un seul de ces systèmes, parce que les équations (10) donnent:

$$(12) \frac{{}_4X + i_5X}{\sqrt{2}{}_2X} = \frac{z}{y}, \frac{{}_6X + i_7X}{\sqrt{2}{}_3X} = \frac{x}{z}, \frac{{}_8X + i_9X}{\sqrt{2}{}_1X} = \frac{y}{x},$$

donc la surface obtenue est réellement une surface à quatre dimensions.

Si maintenant on fait subir aux  $x, y, z$  une substitution c-orthogonale, les points de la  ${}^4$ surface se transforment en d'autres points de la même  ${}^4$ surface, en conservant leurs distances mutuelles; donc on peut concevoir cette transformation comme un glissement de la surface sur elle-même. En outre nous avons démontré plus haut qu'au moyen d'une telle substitution il est possible de transformer un système  ${}_aE$  satisfaisant à  ${}_a\alpha x + {}_a\beta y + {}_a\gamma z = 0$  en un système  ${}_bE$  satisfaisant à  ${}_b\alpha x + {}_b\beta y + {}_b\gamma z = 0$ , donc la  ${}^4$ surface-image représentée par les équations (10) ou (11) satisfait aux conditions posées.

8. Regardons un peu de plus près la  ${}^4$ surface dont nous venons d'établir l'existence. D'abord je dis que  ${}^4I$  est une  ${}^4$ surface  ${}^9$ gauche<sup>1)</sup>. En effet, les équations (11) montrent que les  $X$  satisfont à l'équation

$${}_1X + {}_2X + {}_3X = 1$$

qui représente un  ${}^9E$  contenant  ${}^4I$ . Si  ${}^4I$  était située dans un  ${}^7E$ , les  $X$  satisferaient identiquement à une équation de la forme

$${}_1A_1X + \dots + {}_9A_9X = 0,$$

qui entraînerait une relation homogène et du second degré entre les six paramètres réels  $x_r, x_i, y_r, y_i, z_r, z_i$ , ce qui est absurde, puisque les rapports de ces paramètres sont tout à fait arbitraires.

Pour examiner  ${}^4I$  du point de vue de l'*analyse situs*, je fais une trémature (petite ouverture), disons, pour fixer les idées, au point  $x = 0, y = 0, z = 1$ .

L'effet d'une telle trémature peut être:<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> J'appelle „ ${}^9$ gauche" une variété qui peut se trouver dans un  ${}^9E$  et non dans un espace à moins de  $p$  dimensions; donc une courbe plane sera  ${}^9$ gauche, une courbe gauche ordinaire sera  ${}^9$ gauche, etc.

<sup>2)</sup> La *cyclose* (ou *cycl.*) d'une variété est le nombre de cycles indépendants, la *p*cyclose le nombre des  $p$ surfaces fermées indépendantes qu'on peut tracer dans cette variété. Les surfaces qui sont des variétés doubles ne comptent jamais pour indépendantes. Voir: Lois cyclomatiques, *Nieuw Archief*, sér. 2, t. III, p. 126.

1° de diminuer de 1 la <sup>4</sup>cyclose, s'il y en a, (c. à d. si la <sup>4</sup>surface est une <sup>4</sup>variété simple),

ou bien 2° d'augmenter de 1 la <sup>3</sup>cyclose, dans le cas que la <sup>4</sup>surface est une variété double.

Pour décider lequel des deux cas se présente ici nous n'avons qu'à remarquer qu'après la trémature la <sup>4</sup>surface <sup>4</sup>I peut se réduire par contraction (ce qui ne change pas les nombres cyclomatiques) à la <sup>2</sup>sphère  $z = 0$ ; les nombres cycl. de cette <sup>2</sup>sphère sont:

$$\text{punctose} = 1, \text{ cyclose} = 0, \text{ sphérose} = 1$$

$$(\text{ou: } {}^0\text{cycl.} = 1, {}^1\text{cycl.} = 0, {}^2\text{cycl.} = 1),$$

donc la trémature n'a pas causé de <sup>3</sup>cycl., ce qui prouve que <sup>4</sup>I est une <sup>4</sup>variété simple aux nombres cyclomatiques:

$${}^0\text{cycl.} = 1, {}^1\text{cycl.} = 0, {}^2\text{cycl.} = 1, {}^3\text{cycl.} = 0, {}^4\text{cycl.} = 1.$$

Sa *taxe* <sup>1)</sup> sera donc

$$\tau = (1 - 0 + 1 - 0 + 1) = 3.$$

### La trigonométrie dans <sup>4</sup>I

9. Dans <sup>4</sup>I toute équation homogène  $f(x, y, z) = 0$  aux trois variables  $x, y, z$ , est représentée par une <sup>2</sup>surface fermée. Regardée du point de vue de l'analyse situs, cette <sup>2</sup>surface a les mêmes propriétés que la surface de Riemann au moyen de laquelle on étudie ordinairement les propriétés de l'équation  $f(x, y, z) = 0$  (ou  $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0$ ).

Aux solutions communes (réelles ou non) à deux de ces équations correspondent univoquement les points (réels) communs aux deux <sup>2</sup>surfaces.

Il existe des relations remarquables entre les propriétés métriques de ces <sup>2</sup>surfaces et les propriétés analytiques des équations qu'elles représentent. Pour le moment je veux me borner à l'étude des <sup>2</sup>sphères <sup>3</sup>D qui correspondent aux équations du premier degré

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Pour simplifier les calculs, je supposerai toujours  $\Sigma \alpha \alpha^c = \Sigma |\alpha|^2 = 1$ .

<sup>1)</sup> Constante figurant dans la loi d'Euler. Voir *ibid.* p. 142.

10. Deux <sup>2</sup>sphères

$$^1_1D \equiv {}_1\alpha x + {}_1\beta y + {}_1\gamma z = 0,$$

$$^2_2D \equiv {}_2\alpha x + {}_2\beta y + {}_2\gamma z = 0$$

ont toujours un point de commun; considérons leurs angles quadridimensionaux <sup>1)</sup> (ou plutôt ceux de leurs plans tangents) en ce point. Par une substitution *c*-orthogonale (qui ne change en rien la position relative des deux <sup>2</sup>sphères) nous pouvons faire coïncider à la fois le point d'intersection de <sup>1</sup><sub>1</sub>D et <sup>2</sup><sub>2</sub>D avec  $O_z \equiv x = 0, y = 0, z = 1$  et <sup>1</sup><sub>1</sub>D avec

$$(13) \quad {}^2_2D \equiv y = 0, \text{ ou } \begin{cases} y_r = 0 \\ y_i = 0. \end{cases}$$

Alors <sup>2</sup><sub>2</sub>D deviendra

$$(14) \quad {}^2_2D \equiv \alpha x + \beta y = 0, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

$$\text{ou: } \begin{cases} \alpha_r x_r - \alpha_i x_i + \beta_r y_r - \beta_i y_i = 0, \\ \alpha_i x_r + \alpha_r x_i + \beta_i y_r + \beta_r y_i = 0. \end{cases}$$

Considérons les points de <sup>2</sup><sub>2</sub>D situés à distance infiniment petite de  $O_z$ . Les équations (11) différenciées donnent:

$$1^0 \quad \Sigma(x_r dx_r + x_i dx_i) = 0,$$

$$2^0 \quad d_1 X = 2 \sqrt{2} (x_r dx_r + x_i dx_i),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d_4 X = 2 (y_r dz_r + z_r dy_r + y_i dz_i + z_i dy_i),$$

$$d_5 X = 2 (y_r dz_i + z_i dy_r - y_i dz_r - z_r dy_i),$$

$$\dots \dots \dots$$

donc pour  $x = 0, y = 0, z = 1$ :

$$1^0 \quad dz_r = 0,$$

$$2^0 \quad d_1 X = 0, d_2 X = 0, d_3 X = 0,$$

$$d_4 X = 2 dy_r, d_5 X = -2 dy_i, d_6 X = 2 dx_r, d_7 X = 2 dx_i,$$

$$d_8 X = 0, d_9 X = 0,$$

tandis que (14) donne:

$$\alpha_r dx_r - \alpha_i dx_i + \beta_r dy_r - \beta_i dy_i = 0,$$

$$\alpha_i dx_r + \alpha_r dx_i + \beta_i dy_r + \beta_r dy_i = 0,$$

<sup>1)</sup> Voir: P. H. SCHOUTE. Les angles quadridimensionaux de deux plans. *Nieuw Archief*, sér. 2, t. III, p. 111.

de sorte qu'on trouve pour le plan tangent à  ${}^2_bD$  en  $O_s$  :

$$(15) \dots {}^2_bT \equiv \begin{cases} {}_1X = 0, & {}_2X = 0, & {}_3X = 1, \\ \beta_{r_4}X + \beta_{i_5}X + \alpha_{r_6}X - \alpha_{i_7}X = 0, \\ \beta_{i_4}X - \beta_{r_5}X + \alpha_{i_6}X + \alpha_{r_7}X = 0, \\ {}_8X = 0, & {}_9X = 0. \end{cases}$$

Le plan tangent à  ${}^2_aD$  est obtenu en substituant  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  :

$$(16) \dots {}^2_aT \equiv \begin{cases} {}_1X = 0, & {}_2X = 0, & {}_3X = 1, \\ {}_4X = 0, & {}_5X = 0, & {}_6X = 0, & {}_9X = 0. \end{cases}$$

On voit que les deux plans sont situés dans un  ${}^4E$  passant par  $O_s$ , parallèle à l' ${}^4E(4, 5, 6, 7)$ .

Soit maintenant  $R \equiv 0, 0, 1, {}_4X', {}_5X', {}_6X', {}_7X', 0, 0$  un point quelconque de  ${}^2_bT$  et  $S \equiv 0, 0, 1, 0, 0, {}_6X', {}_7X', 0, 0$  sa projection sur le plan  ${}^2_aT$ . Le cosinus de l'angle  $RO_sS$  est

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{{}_6X'^2 + {}_7X'^2}}{\sqrt{{}_4X'^2 + {}_5X'^2 + {}_6X'^2 + {}_7X'^2}}$$

Or, de la quatrième et de la cinquième des équations (15) on déduit :

$$\begin{aligned} -\beta_{r_4}X' - \beta_{i_5}X' &= \alpha_{r_6}X' - \alpha_{i_7}X', \\ -\beta_{i_4}X' + \beta_{r_5}X' &= \alpha_{i_6}X' + \alpha_{r_7}X'. \end{aligned}$$

Élevant au carré et ajoutant :

$$(\beta_r^2 + \beta_i^2)({}_4X'^2 + {}_5X'^2) = (\alpha_r^2 + \alpha_i^2)({}_6X'^2 + {}_7X'^2),$$

donc

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{\beta_r^2 + \beta_i^2}}{\sqrt{(\alpha_r^2 + \alpha_i^2 + \beta_r^2 + \beta_i^2)}} = |\beta|.$$

Donc les deux plans tangents ne font qu'un seul angle  $\arccos |\beta|$ .

Retournons aux  ${}^2$ sphères,  ${}^2_1D$  et  ${}^2_2D$ . Quand on transforme les  $x, y, z$  par une substitution  $c$ -orthogonale, les variables contragrédientes  $\alpha, \beta, \gamma$  sont transformées par la substitution inverse, également orthogonale; donc toute fonction  $c$ -isotrope des  $\alpha$  conserve sa valeur.

Or, la valeur trouvée  $|\beta|$  étant précisément ce que devient  $|\Sigma {}_1\alpha {}_2\alpha^c|$  quand on passe de  ${}^2_1D, {}^2_2D$  à  ${}^2_aD, {}^2_bD$ , il suit que

*l'angle des plans tangents des deux sphères  ${}^1D$  et  ${}^2D$  à leur point d'intersection est définie par*

$$\cos \phi = |\Sigma_1 \alpha_2 \alpha^c|.$$

Si  $|\Sigma_1 \alpha_2 \alpha^c| = 0$ ,  $\phi = \frac{1}{2}\pi$  et les plans tangents sont *complètement perpendiculaires*.<sup>1)</sup>

### 11. L'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

a une signification géométrique très-simple: elle exprime, en vertu de la formule fondamentale (8) que la distance de chaque point de la  ${}^2$ sphère  ${}^2D$ , représentant cette équation, au point

$$P \equiv \alpha^c, \beta^c, \gamma^c$$

est égale à 2 c. à d. est maximale.

J'appellerai  $P$  le pôle de  ${}^2D$ , et  ${}^2D$  la  ${}^2$ polaire de  $P$ , et j'entendrai par la *distance angulaire* ( ${}_1P_2P$ ) de deux points

$${}_1P \equiv {}_1x, {}_1y, {}_1z,$$

$${}_2P \equiv {}_2x, {}_2y, {}_2z,$$

l'angle  $\phi$  de leurs polaires

$${}^1D \equiv {}_1x^c x + {}_1y^c y + {}_1z^c z = 0,$$

$${}^2D \equiv {}_2x^c x + {}_2y^c y + {}_2z^c z = 0,$$

de sorte que

$$\cos \phi = \cos ({}_1P_2P) = |\Sigma_1 x_2 x^c|. {}^2)$$

12. Cela posé, je considère l'ensemble de trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de  ${}^4I$  et des trois  ${}^2$ sphères  ${}^2D$ :

$${}^2a, {}^2b, {}^2c$$

qui passent resp. par  $B$  et  $C$ ,  $C$  et  $A$ ,  $A$  et  $B$ .

J'appellerai cet ensemble un *triangle-image* et j'indiquerai par  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  les angles des  ${}^2$ sphères  ${}^2b$  et  ${}^2c$ ,  ${}^2c$  et  ${}^2a$ ,  ${}^2a$  et  ${}^2b$ ; en même temps  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  seront les distances angulaires de  $B$  à  $C$ , de  $C$  à  $A$ , de  $A$  à  $B$ . Je dis que les

<sup>1)</sup> Voir P. H. SCHOUTE, l. c.

<sup>2)</sup> Cet angle est la moitié de l'arc de grand cercle qui réunit  ${}_1P$  et  ${}_2P$  sur la  ${}^2$ sphère  ${}^2D$  qui passe par ces points.



formules de la trigonométrie sphérique sont applicables aux *triangles-images rectangles*.

En effet, soit  $\cos(C) = 0$ ; nous pouvons faire glisser <sup>4</sup>I sur elle-même de manière que C vienne en 0, 0, 1 et que <sup>2</sup>b coïncide avec  $y = 0$ . Alors <sup>2</sup>a coïncidera avec  $x = 0$ , de sorte qu'en appelant A', B', C' les transformés de A, B, C, etc., l'on peut poser:

$${}^2a' \equiv x = 0,$$

$${}^2b' \equiv y = 0,$$

$${}^2c' \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \Sigma |\alpha|^2 = 1,$$

ce qui donne:

$$A' \equiv \frac{\gamma}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\gamma|^2}}, \quad 0, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\gamma|^2}},$$

$$B' \equiv 0, \quad \frac{\gamma}{\sqrt{|\beta|^2 + |\gamma|^2}}, \quad \frac{\beta}{\sqrt{|\beta|^2 + |\gamma|^2}},$$

$$C' \equiv 0, \quad 0, \quad 1.$$

Il s'en suit:

$$1^{\circ} \quad \cos(a') = \frac{|\beta|}{\sqrt{|\beta|^2 + |\gamma|^2}},$$

$$\cos(b') = \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\gamma|^2}},$$

$$\cos(c') = \frac{|\alpha\beta|}{\sqrt{(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)(|\beta|^2 + |\gamma|^2)}};$$

donc

$$\cos(c') = \cos(a') \cos(b'),$$

et 2<sup>o</sup>

$$\cos(A') = |\beta|,$$

$$\cos(B') = |\alpha|,$$

$$\text{donc } \cot(A') \cot(B') = \frac{|\alpha\beta|}{\sqrt{(1 - |\beta|^2)(1 - |\alpha|^2)}} =$$

$$= \frac{|\alpha\beta|}{\sqrt{(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)(|\beta|^2 + |\gamma|^2)}} = \cos(c').$$

Or, la substitution c-orthogonale ne changeant ni les dis-

tances rectilignes, ni les angles, on a aussi dans le triangle-image ABC :

$$(17) \quad \cos(c) = \cos(a) \cos(b),$$

$$(18) \quad \cos(c) = \cot(A) \cot(B).$$

Par un raisonnement tout à fait analogue au „pentagone” connu de Napier, on déduit de (17) et (18) les autres formules du triangle rectangle.

13. Quant aux triangles-images non rectangles, les formules de la trigonométrie sphérique cessent d'être généralement applicables, dès que leur démonstration en trigonométrie sphérique ordinaire exige l'addition d'arcs de cercles. En effet, si  ${}_1P, {}_2P, {}_3P$  sont trois points de  ${}^4I$  situés sur une  ${}^2$ sphère  ${}^2D$ , on n'a pas en général

$$({}_1P_2P) + ({}_2P_3P) = ({}_1P_3P).$$

La règle des sinus p. ex. sera applicable, mais non celle des cosinus.

La  ${}^3$ surface-image  ${}^2I$ .

14. Après ce qui précède, il est très-facile de généraliser les résultats obtenus et de construire des  ${}^3$ surfaces-images  ${}^2I$ , représentant les systèmes des rapports de  $n + 1$  variables homogènes complexes

$${}_1x, {}_2x, \dots, {}_{n+1}x.$$

Pour ne pas trop me répéter, je me borne aux remarques suivantes :

En partant de la formule fondamentale pour la distance de deux points :

$$(19) \quad {}_aP_bP = 4 \left( 1 - \left| \sum_{k=1}^{n+1} a x_k \bar{b} x_k^c \right| \right)^2$$

et de la transformation  $c$  orthogonale

$$\dots \dots \dots$$

$$y_k = k_1 L x_1 + k_2 L x_2 + \dots + k_{n+1} L x_{n+1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left( \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n+1} k_j L_{mj} L^c = 0 \text{ pour } k \geq m, \\ = 1 \text{ pour } k = m, \end{array} \right)$$



ÜBER EINE ZIEMLICH VERBREITETE UNRICHTIGE BEHANDLUNGS-  
WEISE EINES PROBLEMES DER ROLLENDEN BEWEGUNG, ÜBER  
DIE THEORIE DIESER BEWEGUNG, UND INS BESONDERE  
ÜBER KLEINE ROLLENDE SCHWINGUNGEN UM  
EINE GLEICHGEWICHTSLAGE

VON

DR. D. J. KORTEWEG.

---

Einleitung.

1. Als ich mich neuerdings, dazu veranlasst durch das Gutachten, das ich über eine Preisantwort <sup>1)</sup> der Frau KERKHOVEN—WIJTHOFF abzugeben hatte, mit der Theorie des Rollens beschäftigte, war ich nicht wenig verwundert zu entdecken, dass von mehreren sehr tüchtigen Mathematikern <sup>2)</sup> auf diesem Gebiete eine unrichtige Methode angewandt worden ist.

Zwar hat sich dann später beim Nachschlagen der Literatur herausgestellt, dass schon im Jahre 1892 von ALFRED VIERKANDT gegen den Gebrauch dieser Methode ausdrücklich gewarnt worden ist <sup>3)</sup>. Wo aber der Irrthum sich so lebensfähig

---

<sup>1)</sup> Sie wird in eine der nächstfolgenden Lieferungen dieser Zeitschrift aufgenommen werden.

<sup>2)</sup> Ich citire hier die betreffenden Arbeiten in chronologischer Folge:

a. G. SCHOUTEN. No. 3 der prijsvragen voor het jaar 1887. *Nieuw Archief*, deel XV, p. 188—232.

b. G. SCHOUTEN. Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak, toegepast op de beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zijne as. *Versl. en meded. der Kon. Ak. van Wet. 3e reeks*, deel V, p. 292—335. (1888).

c. P. MOLENBROEK. Over de zuiver rollende beweging van een lichaam over een willekeurig oppervlak. *Nieuw Archief*, deel XVII, p. 130—157. (1890).

d. E. LINDELÖFF. Sur le mouvement d'un corps de révolution roulant sur un plan horizontal. *Acta soc. scient. Fennicae*, T. XX, No. 10. (1895).

e. P. APPELL. *Traité de mécanique rationnelle*. Tome II, p. 344—349. (§ 452). (1896).

<sup>3)</sup> A. VIERKANDT. Ueber gleitende und rollende Bewegung. *Monatshefte der Math. und Phys.* III Jahrgang 1892. p. 31—54. Sieh dort § 4, p. 52—54.

gezeigt hat, dass er sich selbst in APPELL's Lehrbuch, das voraussichtlich wegen seiner vielen vortrefflichen Eigenschaften eine weite Verbreitung finden wird, eingeschlichen hat, scheint es mir doch nicht überflüssig, noch einmal auf diese Sache zurückzukommen und die betreffende Methode und die Ursachen ihrer Unrichtigkeit etwas ausführlicher zu besprechen als es durch VIERKANDT geschehen ist.

## Geometrische Eigenthümlichkeit der rollenden Bewegung.

2. Wir denken uns irgend einen Mechanismus der aus verschiedenen körperlichen Theilen von unveränderlicher Gestalt besteht, von denen einige der Bedingung unterworfen sind, dass sie über einander rollen müssen. Wir können dann jede solche Bedingung des Rollens als aus zwei andern Bedingungen zusammengesetzt betrachten, von welchen die *eine* aussagt, dass die beiden Körper mit einander *in Berührung* bleiben, die *andere*, dass sie über einander *rollen* müssen, d. h. dass sie sich dergestalt bewegen müssen, dass der gemeinsame Berührungspunkt auf den beiden Oberflächen immer gleich lange Weg-elemente beschreibt, und dass die dabei entstehenden Contactcurven oder Spuren im Berührungspunkte stets eine gemeinsame Tangente besitzen.

Die erste dieser Bedingungen erfordert die Erfüllung einer gewöhnlichen Integralbeziehung zwischen den Coordinaten, welche die Lagen der beiden sich berührenden Körper bestimmen. Sie kann also dazu benutzt werden die Anzahl der zur Bestimmung der Lage des *ganzen* Mechanismus nothwendigen Coordinaten zu verringern. Anders aber steht es mit der zweiten Bedingung.

Es seien  $q_1, q_2 \dots q_n$  allgemeine Coordinaten, deren Anzahl so gewählt worden ist, dass sie gerade genügen die Lage des Mechanismus in jedem Augenblicke vollkommen zu bestimmen. Jede stetige Aenderung dieser Coordinaten wird dann von einer Bewegung des Mechanismus begleitet sein, bei welcher die betreffenden körperlichen Theile zwar mit einander in Berührung bleiben, aber im Allgemeinen nicht über einander rollen, sondern auch gleiten werden. Wir haben dann festzustellen,

zu welcher Art von Relationen zwischen den  $q_1, q_2 \dots q_n$  die Bedingungen des Rollens Veranlassung geben werden.

Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass die rein rollende Bewegung mit sich bringt, dass die beiden Contactpunkte im Augenblicke der Berührung sich gegen einander in relativer Ruhe befinden, d. h. dass ihre absolute Geschwindigkeit die gleiche sein muss nach Richtung und Grösse. Zerlegen wir also diese Geschwindigkeit in drei Componenten, die sich bekanntlich für jeden materiellen Punkt des Mechanismus als lineare homogene Functionen der  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n$  darstellen lassen, so müssen diese Componenten für die beiden Contactpunkte übereinstimmen. Das würde uns also zu *drei* Relationen führen von der Form:

$$(1) \quad \dots \dots \dots {}_1A_1\dot{q}_1 + {}_1A_2\dot{q}_2 + \dots \dots + {}_1A_n\dot{q}_n = 0$$

wo die Coefficienten  ${}_1A_1$ , etc. im Allgemeinen Functionen sind der Variablen  $q_1, q_2 \dots q_n$ . Bedenken wir aber, dass die Gleichheit der auf den beiden berührenden Oberflächen senkrecht stehenden Componenten schon daraus hervorgeht, dass diese Oberflächen mit einander in Berührung bleiben müssen und also ohne Weiteres durch die Einführung der Coordinaten  $q_1, q_2 \dots q_n$  gesichert ist, so sinkt die Zahl der unabhängigen Relationen (1), die aus jeder Bedingung des Rollens entstehen, auf *zwei* herab.

3. Aus den Relationen (1) kann die Zeit durch Multiplication mit  $dt$  eliminirt werden. Sie erhalten dann die Form:

$$(2) \quad \dots \dots \dots {}_1A_1dq_1 + {}_1A_2dq_2 + \dots \dots + {}_1A_ndq_n = 0$$

und können also characterisirt werden als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variablen  $q$ , die im Allgemeinen nicht integrabel sind und also nicht durch Integralbeziehungen von der Form:

$$\phi(q_1, q_2 \dots q_n, C_1, C_2 \dots) = 0$$

ersetzt werden können.

Bei diesem letztern Umstande werden wir einen Augenblick stehen bleiben, um uns auch seiner geometrischen Bedeutung klar zu werden.

Wir wählen dazu ein bestimmtes Beispiel und denken uns

einen Körper von gegebener Gestalt der sich, von einer gegebenen Anfangslage ausgehend, über eine gegebene Fläche nur durch Rollung fortbewegen kann.

Die Lage eines solchen Körpers kann durch fünf Coordinaten vollkommen bestimmt werden. Wir wählen dazu 1<sup>o</sup> zwei Coordinaten  $u_1$  und  $v_1$ , welche die Lage des Berührungspunktes auf der gegebenen Fläche, 2<sup>o</sup> zwei andre  $u_2$  und  $v_2$ , welche die Lage dieses Punktes auf der Oberfläche des bewegenden Körpers angeben, 3<sup>o</sup> eine Coordinate  $w$ , welche die spinnende Bewegung des Körpers bedingen muss; wozu wir also z. B. den Winkel zwischen einer gegebenen mit dem Körper sich mitbewegenden und einer festen Ebene im Raume verwenden können.

Zwischen diesen Coordinaten bestehen dann, wie wir gesehen haben, zwei Differentialbeziehungen von der Form:

$$(3) \quad \begin{aligned} {}_1A_1 du_1 + {}_1A_2 dv_1 + {}_1A_3 du_2 + {}_1A_4 dv_2 &= 0 \\ {}_2A_1 du_1 + {}_2A_2 dv_1 + {}_2A_3 du_2 + {}_2A_4 dv_2 &= 0 \end{aligned}$$

welche die Gleichheit, nach Länge und Richtung, der sich berührenden Bogenelemente der beiden Spuren zum Ausdruck bringen.

Nehmen wir jetzt für einen Augenblick an, dass diese Gleichungen integrabel wären und also durch zwei Relationen

$$\begin{aligned} \phi_1(u_1, v_1, u_2, v_2, w) &= 0 \\ \phi_2(u_1, v_1, u_2, v_2, w) &= 0 \end{aligned}$$

ersetzt werden könnten, bei welchen dann die Integrationsconstanten durch die Anfangslage des Körpers gegeben sein würden.

In diesem Falle würden drei der fünf allgemeinen Coordinaten die zwei uebrigen bestimmen.

Dass dem nun nicht so ist, dass im Gegentheil, von einer gegebenen Anfangslage ausgehend, *jede andre Lage* durch rollende Bewegung erreicht werden kann, ist auf folgendem Wege einzusehen. Es seien (Fig. 1) A der Berührungspunkt in der Anfangslage, P und Q gegebene Punkte der Fläche und der Oberfläche des Körpers,  $p$  und  $q$  gegebene Tangenten. Man ziehe dann, was immer möglich ist, zwischen A und P so wie zwischen A und Q auf den betreffenden Flächen zwei Curven gleicher Bogenlänge, welche ausserdem in P und Q die gegebenen Geraden tangiren und lasse jetzt eine rollende Bewegung

stattfinden, bei welcher die Curven AP und AQ die Rolle der Spuren spielen. Deutlich ist es, dass auf diese Weise der Körper aus seiner Anfangslage in jede andre versetzt werden kann, und dass dabei nicht nur die Variablen  $u_1, v_1, u_2, v_2$  sondern auch, bei geeigneter Wahl der Tangenten  $p$  und  $q$ , die Variable  $w$  jeden beliebigen Werth erhalten kann.

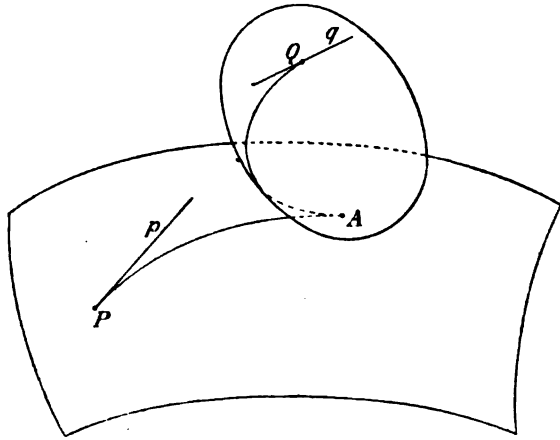


Fig. 1.

Daraus ergibt sich also:

- 1°. dass die Gleichungen (3) kein Integral besitzen können,
- 2°. dass wir durch *endliche* Bewegungen die fünf Variablen willkürliche Aenderungen erleiden lassen können.

Anders ist es nun aber bei *unendlich kleinen* Bewegungen. Dann können nur drei der fünf Variablen willkürliche Aenderungen erleiden, die der uebrigen zwei sind dann durch die Bedingungen (3) gegeben. Es lässt sich also die hauptsächlichste Eigenthümlichkeit der rollenden Bewegung rein geometrisch so definiren, dass wir sagen: *Die Anzahl der Freiheitsgrade sei bei ihr eine andre (kleinere) für unendlich kleine wie für endliche Verrückungen.*

Ueber die richtige Behandlungsweise des Problems der rollenden Bewegung.

4. Wir gehen jetzt dazu über, die Bewegungsgleichungen aufzustellen eines materiellen Systemes, dessen Lage durch die







kraft unterworfenen Rotationskörpers über eine horizontale Ebene. Folgen wir der von APPELL benutzten Bezeichnungsweise, die übrigens aus unsrer Fig. 2 leicht abzulesen ist, so kann für die lebendige Kraft des Systemes geschrieben werden:

$$(10) \quad T = \frac{1}{2}M[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + f'(\theta)^2 \cdot \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \\ + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2,$$

wo  $f(\theta) = \zeta$  die Höhe des Schwerpunktes über der gegebenen horizontalen Ebene bedeutet.

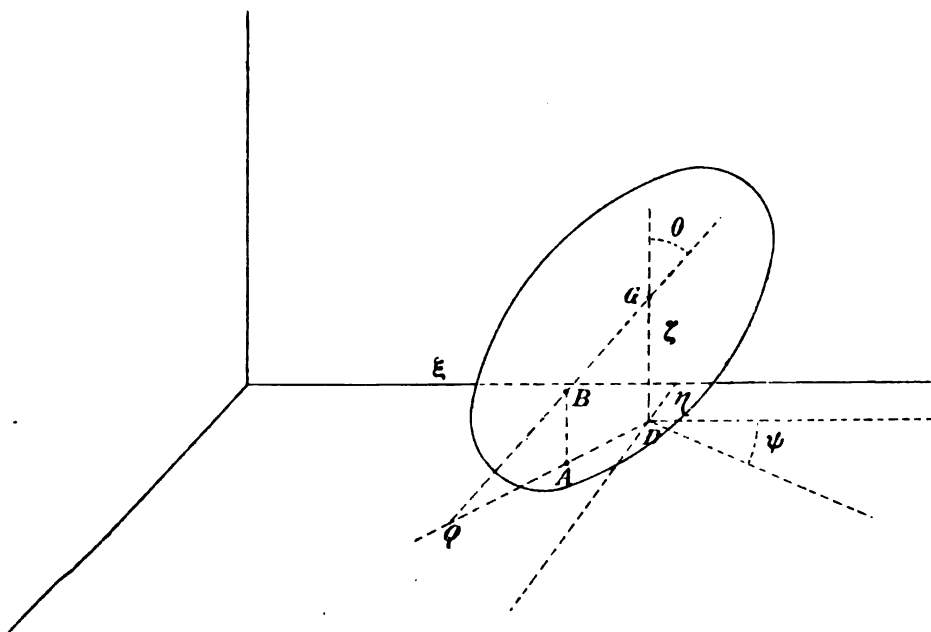


Fig. 2.

Daneben gelten nun bei rein rollender Bewegung die Relationen <sup>1)</sup>:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\theta) \cdot \dot{\theta} \sin \psi - [f'(\theta) \cdot (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) + f(\theta) \dot{\phi} \sin \theta] \cos \psi \\ \dot{\eta} &= -f(\theta) \cdot \dot{\theta} \cos \psi - [f'(\theta) (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) + f(\theta) \cdot \dot{\phi} \sin \theta] \sin \psi \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Diese Bedingungsgleichungen sind identisch mit den beiden ersten der von APPELL, l. c., p. 346 unter (2) angeführten.

Was thut nun APPELL? Er substituirt diese Relationen in den Ausdruck (10) für die lebendige Kraft, wodurch dieser in einer Gestalt:

$$(12) \quad T' = \frac{1}{2} M [(\dot{f}(\theta)^2 + f'(\theta)^2 \dot{\theta}^2 + (f'(\theta) \dot{\psi} + (f'(\theta) \cos \theta + f(\theta) \sin \theta) \dot{\phi})^2] + \\ + \frac{1}{2} A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} C (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2,$$

erhalten wird, bei welcher von den fünf zur vollständigen Bestimmung der Lage des Körpers nothwendigen Coordinaten  $\xi, \eta, \theta, \psi, \phi$  die beiden ersten spurlos verschwunden sind, und behandelt dann weiter das Problem, wie wenn diese verschwundenen Coordinaten gar nicht existirten, d. h. er schreibt für  $\phi$  und  $\psi$  die beiden Lagrange'schen Gleichungen aus, wobei er sich des Ausdruckes (12) bedient, und combinirt diese mit der Integralgleichung der lebendigen Kraft. Bei der Berechnung der partiellen Arbeiten wird dabei nur auf die Schwerkraft, nicht auf die Reactionskräfte im Berührungspunkte geachtet, weil die betreffende kleine Verrückung als eine rollende Bewegung betrachtet wird.

Fragt man sich nun ob diese Benutzung in den LAGRANGE'schen Gleichungen des Ausdruckes (12) statt (10) ohne Weiteres, d. h. ohne nähere Begründung, zugelassen werden kann, so muss die Antwort schon desswegen verneinend sein, weil in diesen Gleichungen *partielle* Differentiationen auftreten, welche also voraussetzen, dass die lebendige Kraft nicht nur ihren richtigen *Werth* erhält, sondern auch in einer bestimmten *Form* ausgeschrieben ist. Diese Form aber ist keine andre als diejenige, welche erhalten wird wenn in dem Ausdrucke  $\frac{1}{2} \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  für die  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  eines jeden materiellen Punktes, deren Werth als Function der fünf Variablen  $\xi, \eta, \theta, \psi, \phi$  substituirt wird, also in unserm Falle die Form (10).

6. Verallgemeinern wir jetzt die Fragestellung, zu welcher das APPELL'sche Verfahren Veranlassung giebt!

Es sei also für ein gegebenes System:

$$(13) \quad T = \frac{1}{2} (1r_1 \dot{q}_1^2 + 2r_2 \dot{q}_2^2 + \dots + 2_1 r_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots).$$

Durch bestimmte Verbindungen, die keine Reibungsarbeit mit sich bringen, sei dieses System genöthigt bei seinen Bewegungen die Bedingungsgleichungen:

$$(14) \quad \begin{aligned} & {}_1\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + {}_1\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{q}}_2 + \dots = 0 \\ & {}_2\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \dots = 0 \\ & \dots \\ & {}_n\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \dots = 0 \end{aligned}$$

nicht gegeben werden kann, weil die betreffende Methode wirklich zu unrichtigen Resultaten führen kann. Später sind dann von HADAMARD<sup>1)</sup> die speziellen Bedingungen festgestellt worden, unter denen gewisse dem Systeme (14) entlehnte Substitutionen *ausnahmsweise* zugelassen werden können.

7. Wenn also die Methode *im Allgemeinen* unzuverlässig ist, so wäre es doch noch immer möglich, dass sie in den von den im § 1 citirten Autoren gemachten Anwendungen zu richtigen Lösungen geführt hätte. Hauptsächlich beziehen sich diese Anwendungen auf das einzige Problem der rollenden Bewegung eines schweren Rotationskörpers über eine horizontale Ebene. Dass nun aber hier wirklich unrichtige Resultate erhalten worden sind, kann an einem wichtigen besondern Falle leicht gezeigt werden. Die Gleichungen, zu welchen der allgemeine Fall dieses Problems Veranlassung giebt, sind sehr verwickelt, wenn aber der Rotationskörper mit einem scharfen kreisförmigen Rande versehen ist, der mit der horizontalen Ebene in fortwährender Berührung bleibt, und wenn der Schwerpunkt des Körpers mit dem Mittelpunkte dieses Randes zusammenfällt, so vereinfachen sich diese Gleichungen. Die richtige Lösung (vergleiche § 12) ergibt dann bei Anwendung der schon besprochenen Bezeichnungsweise, wenn überdies  $R$  der Radius des Kreisrandes,  $K_1$  eine Constante bezeichnet, und  $r$  statt  $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$  geschrieben wird:

$$(16) \frac{1}{2}(MR^2 + A)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(MR^2 + C)r^2 + Mgr \sin \theta = K_1$$

$$\begin{vmatrix} \ddot{w}; & -k\ddot{w}\dot{w} - k\dot{w}^2 + \ddot{v}; & \ddot{w} + k\dot{v}\dot{w} \\ 1; & -k\dot{w} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn wir die zwei einfachsten unabhängigen Gleichungen ausschreiben und die Bedingungsleichung hinzufügen:

$$\ddot{w} + k\dot{v}\dot{w} = 0; \quad -k\dot{w}^2 + \ddot{v} = 0; \quad \dot{w} - k\dot{w}\dot{v} = 0.$$

Durch Integration erhält man hieraus, ohne viel Schwierigkeit, die allgemeine Lösung in der Gestalt:

$$u = \frac{C_1}{k} \int \text{Th. } (C_1 t + C_2) \{ \text{Arctan Sh. } (C_1 t + C_2) + kC_2 \} dt + C_3;$$

$$v = \frac{1}{k} \text{ l. Ch. } (C_1 t + C_2) + C_4; \quad w = \frac{1}{k} \text{ Aroctan Sh. } (C_1 t + C_2) + C_5.$$

<sup>1)</sup> I. HADAMARD. Sur les mouvements de roulement. Mémoires de Bordeaux, 4e Série, T. V, p. 397.

$$(17) \dots (MR^2 + C)\dot{r} - MR^2 \sin \theta \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$(18) \dots AR \frac{d \cdot \dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} - RCr \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0.$$

Dahingegen erhalten APPELL <sup>1)</sup> und SCHOUTEN <sup>2)</sup> für diesen Fall:

$$(20) \dots \dot{r} = 0.$$

Dass nun diese letztere Gleichung mit (17) in offenbarem Widerspruch steht, ist leicht zu zeigen. Aus (17) und (20) zusammen würde man nämlich schliessen müssen, dass während der rollenden Bewegung immer entweder  $\dot{\theta}$  oder  $\dot{\psi}$  fortwährend Null bleiben müsse. Dass dem nicht so sein *kann*, geht schon daraus hervor, dass man den Anfangszustand der Bewegung solchermassen annehmen kann dass  $\dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\psi}_0$  und  $\dot{\phi}_0$  willkürliche Werthe bekommen. Nothwendig ist es doch nur, dass die augenblickliche Rotationsaxe durch den Contactpunkt des Kreisrandes mit der horizontalen Ebene geführt wird, für die Rotationscomponenten aber, und also auch für  $\dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\psi}_0$ ,  $\dot{\phi}_0$ , können beliebige Werthe angenommen werden.

#### Ueber die eigentliche Ursache des begangenen Fehlers.

8. Indem bei APPELL die Substitution der Gleichungen (11) in den Ausdruck der lebendigen Kraft ausdrücklich angegeben wird, ist bei den andern angeführten Autoren von einer solchen Substitution keine Rede. Bei ihnen wird hingegen bei der Berechnung der lebendigen Kraft von vorn herein auf den Umstand Rücksicht genommen, dass der Contactpunkt des Rotationskörpers und der Ebene momentan in Ruhe ist.

Dass nun aber zwischen dieser Behandlungsweise und der von APPELL angewandten kein wesentlicher Unterschied besteht, ist deutlich; nur bleibt der Fehler im erstern Falle mehr versteckt. Weil dann nämlich die Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$  des Contactpunktes gar nicht auftreten liegt der Gedanke das ganze

<sup>1)</sup> l. c. pag. 349, Gleichung (6).

<sup>2)</sup> *Nieuw Archief*, l. c. p. 201 „n = standvastige“, wo n nach p. 190, Gleichung (1) den Werth  $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$  besitzt.

Problem vorläufig als ein Problem mit drei Freiheitsgraden aufzufassen viel näher; und wirklich lässt sich dann oberflächlich für diese Auffassung wohl etwas anführen. Wir haben ja gesehen, dass für kleine Bewegungen auch wirklich nur drei Freiheitsgrade vorhanden sind, und nun könnte man sagen, dass also für einen kleinen Theil der Bewegung diese Behandlungsweise als richtig erkannt werden muss. Wenn aber für jeden kleinen Theil der Bewegung die so erhaltenen LAGRANGE'schen Gleichungen richtig sind, dann sind sie es auch für die ganze Bewegung <sup>1)</sup>.

Wiewohl nun diese Schlussweise nicht richtig ist, schon deshalb nicht, weil bei den LAGRANGE'schen Gleichungen Differentialquotienten *zweiter* Ordnung vorkommen, welche sich also auf zwei aufeinanderfolgende kleine Verrückungen des Systemes beziehen, so ist es doch vielleicht nicht ohne Interesse hier zu zeigen, auf welche Schwierigkeiten man stößt wenn man versucht den LAGRANGE'schen Gleichungen eine solche Gestalt zu geben, dass sie auch auf den veränderten Ausdruck für die lebendige Kraft directe anwendbar werden.

9. Wir trennen dann zunächst die  $n$  Variablen, der besseren Uebersichtlichkeit wegen, in zwei Gruppen  $q_1, q_2, \dots q_{n-m}, u_1, u_2, \dots u_m$  und wir geben den  $m$  Differentialbedingungen die Gestalt:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= {}_1\alpha_1\dot{q}_1 + {}_1\alpha_2\dot{q}_2 + \dots + {}_1\alpha_{n-m}\dot{q}_{n-m} \\ \dot{u}_2 &= \\ &\vdots \\ \dot{u}_m &= {}_m\alpha_1\dot{q}_1 + {}_m\alpha_2\dot{q}_2 + \dots + {}_m\alpha_{n-m}\dot{q}_{n-m} \end{aligned} \quad (21)$$

oder auch:

$$\begin{aligned} du_1 &= {}_1\alpha_1 dq_1 + {}_1\alpha_2 dq_2 + \dots + {}_1\alpha_{n-m} dq_{n-m} \\ &\vdots \\ du_m &= {}_m\alpha_1 dq_1 + \dots + {}_m\alpha_{n-m} dq_{n-m} \end{aligned} \quad (22)$$

---

<sup>1)</sup> Dass dieser Gedanke in mehr oder weniger ausgesprochener Form den genannten Autoren vorgeschwebt hat, scheint mir wahrscheinlich. Die Ueberlegung dass die *absoluten* Werthe von  $\xi$  und  $\eta$  selbstverständlich für das vorliegende Problem ohne jede Bedeutung sind, wird wohl weiter dazu beigetragen haben den Fehler zu ermöglichen.



Bedeutet jetzt  $\frac{\delta}{\delta q_1}$ , im Gegensatz zu  $\frac{\partial}{\partial q_1}$ , welches letztere Symbol die Bedeutung einer gewöhnlichen partiellen Differentiation beibehalten soll, eine solche Differentiation, bei welcher alle Variablen der ersten Gruppe, ausser  $q_1$ , unverändert bleiben, die der zweiten Gruppe aber die den Bedingungen (22) entsprechenden Veränderungen:  ${}_1\alpha_1\delta q_1, {}_2\alpha_1\delta q_1, \dots, {}_n\alpha_1\delta q_1$  erleiden, so haben wir nur noch zu untersuchen, ob die Formel:

$$(23) \dots \dots \frac{d \cdot \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1}}{dt} - \frac{\delta T}{\delta q_1} = - \frac{\delta V}{\delta q_1}$$

wo  $V$  die potentielle Energie des Systemes bezeichnet, richtig ist oder nicht, denn es ist im Wesen der Sache *diese* Formel, und nicht die gewöhnliche LAGRANGE'sche, die bei der besprochenen Methode angewandt wird.

Es ist nun:

$$(24) \dots \dots T = \sum \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \sum \frac{1}{2} \mu [\dot{x}^2]$$

wo die Summation über alle materiellen Punkte des Systemes zu erstrecken ist,  $x, y, z$  Cartesische Coordinaten darstellen, und den eckigen Klammern die übliche Bedeutung beigelegt ist.

Man hat weiter:

$$(25) \dots \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1} = \sum \left[ \mu \dot{x} \frac{\delta x}{\delta \dot{q}_1} \right] = \sum \left[ \mu \dot{x} \frac{\delta x}{\delta q_1} \right]$$

weil nämlich:

$$(26) \dots \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \dots$$

und also:

$$(27) \frac{\delta \dot{x}}{\delta \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\delta u_1}{\delta \dot{q}_1} + \dots = \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial u_1} {}_1\alpha_1 + \dots = \frac{\delta x}{\delta q_1}.$$

Dann ist aber:

$$(28) \dots \frac{d \cdot \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1}}{dt} = \sum \left[ \mu \ddot{x} \frac{\delta x}{\delta q_1} \right] + \sum \left[ \mu \dot{x} \frac{d \frac{\delta x}{\delta q_1}}{dt} \right].$$

Hier ist nun wieder :

$$(29) \quad \sum \left[ m \ddot{x} \frac{\delta x}{\delta q_1} \right] = \sum \left[ X \frac{\delta x}{\delta q_1} \right] = - \frac{\delta V}{\delta q_1}.$$

Wäre nun auch noch

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \frac{\delta x}{\delta q_1} = \frac{\dot{\delta x}}{\delta q_1}$$

also :

$$(31) \quad \sum \left[ \mu \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\delta x}{\delta q_1} \right] = \sum \left[ \mu \dot{x} \frac{\dot{\delta x}}{\delta q_1} \right] = \sum \frac{\delta [\frac{1}{2} \mu \dot{x}^2]}{\delta q_1} = \frac{\delta T}{\delta q_1}$$

so wäre damit die Richtigkeit der Formel (29) bewiesen.

10. Es kommt also nur noch darauf an die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Formel (30) darzuthun.

Es ist :

$$(32) \quad \frac{d}{dt} \frac{\delta x}{\delta q_1} = \frac{\delta^2 x}{\delta q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\delta^2 x}{\delta q_2 \delta q_1} \dot{q}_2 + \dots$$

Andrerseits findet man aus (26) nach Ausführung der Substitutionen (21) :

$$(33) \quad \frac{\dot{\delta x}}{\delta q_1} = \frac{\delta \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \alpha_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \alpha_2 + \dots \right)}{\delta q_1} \dot{q}_1 + \\ + \frac{\delta \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial u_1} \alpha_2 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \alpha_2 + \dots \right)}{\delta q_1} \dot{q}_2 + \dots$$

oder auch

$$(34) \quad \frac{\dot{\delta x}}{\delta q_1} = \frac{\delta^2 x}{\delta q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\delta^2 x}{\delta q_1 \delta q_2} \dot{q}_2 + \dots$$

Die Coefficienten von  $\dot{q}_1$  sind also in beiden Ausdrücken (32) und (34) einander gleich; anders aber steht es mit den übrigen Coefficienten. Dass nämlich die Ausdrücke :

$$(35) \quad \frac{\delta^2 x}{\delta q_2 \delta q_1} = \frac{\delta \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial u_1} {}_1\alpha_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} {}_2\alpha_1 + \dots \right)}{\delta q_2}$$

und

$$(36) \quad \frac{\delta^2 x}{\delta q_1 \delta q_2} = \frac{\delta \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial x}{\partial u_1} {}_1\alpha_2 + \frac{\partial x}{\partial u_2} {}_2\alpha_2 + \dots \right)}{\delta q_1}$$

im Allgemeinen verschiedene Werthe besitzen, geht schon aus dem Umstande hervor, dass im ersten Ausdruck die Grössen  ${}_1\alpha_1, {}_2\alpha_1, {}_3\alpha_1 \dots$  im zweiten aber an ihrer Stelle die Grössen  ${}_1\alpha_2, {}_2\alpha_2, {}_3\alpha_2 \dots$  u. s. w. auftreten, welche zu einander in keiner bestimmten Beziehung zu stehen brauchen.

11. Nehmen wir als Beispiel wieder die rollende Bewegung eines schweren Rotationskörpers über die horizontale Ebene. Die erste Coordinaten-Gruppe bilden wir mittelst  $\theta, \psi$  und  $\phi$ ; die zweite bestehe aus  $\xi$  und  $\eta$ . Man hat dann für jeden materiellen Punkt des Körpers:

$$(37) \quad x = \xi + f_1(\theta, \psi, \phi); \quad y = \eta + f_2(\theta, \psi, \phi); \quad z = f_3(\theta, \psi, \phi).$$

Die Bedingungsgleichungen (11) schreiben wir der Kürze wegen:

$$(38) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= {}_\xi\alpha_\theta \cdot \dot{\theta} + {}_\xi\alpha_\psi \cdot \dot{\psi} + {}_\xi\alpha_\phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{\eta} &= {}_\eta\alpha_\theta \cdot \dot{\theta} + {}_\eta\alpha_\psi \cdot \dot{\psi} + {}_\eta\alpha_\phi \cdot \dot{\phi} \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$(39) \quad \frac{\delta x}{\delta \theta} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{\delta \xi}{\delta \theta} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + {}_\xi\alpha_\theta; \quad \frac{\delta x}{\delta \psi} = \frac{\partial f_1}{\partial \psi} + {}_\xi\alpha_\psi$$

also, weil  $\xi$  und  $\eta$  in  ${}_\xi\alpha_\theta$  und  ${}_\xi\alpha_\psi$  nicht auftreten:

$$(40) \quad \frac{\delta^2 x}{\delta \psi \delta \theta} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \theta} + \frac{\partial \cdot {}_\xi\alpha_\theta}{\partial \psi}; \quad \frac{\delta^2 x}{\delta \theta \delta \psi} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi \partial \theta} + \frac{\partial \cdot {}_\xi\alpha_\psi}{\partial \theta}$$

wo:

$$(41) \quad \frac{\partial \cdot {}_\xi\alpha_\theta}{\partial \psi} = f(\theta) \cdot \cos \psi$$

hingegen :

$$(42) \quad \frac{\partial \cdot \xi \alpha_{\psi}}{\partial \theta} = -f''(\theta) \cdot \cos \psi$$

Ebenso würde :

$$(43) \quad \frac{\delta^2 x}{\delta \phi \delta \theta} = \frac{\delta^2 x}{\delta \theta \delta \phi}$$

die Gleichheit erfordern der Ausdrücke :

$$(44) \quad \frac{\partial \cdot \xi \alpha_{\theta}}{\partial \phi} = 0 \text{ und } \frac{\partial \cdot \xi \alpha_{\phi}}{\partial \theta} = - \frac{d[\cos \theta \cdot f'(\theta) + \sin \theta \cdot f(\theta)]}{d\theta} \cdot \cos \psi,$$

weiter :

$$(45) \quad \frac{\delta^2 x}{\delta \phi \delta \psi} = \frac{\delta^2 x}{\delta \psi \delta \phi}$$

die von :

$$(45) \quad \frac{\partial \cdot \xi \alpha_{\psi}}{\partial \phi} = 0 \text{ und } \frac{\partial \cdot \xi \alpha_{\phi}}{\partial \psi} = [\cos \theta \cdot f'(\theta) + \sin \theta \cdot f(\theta)] \sin \psi.$$

Im allgemeinen Falle, bei der rollenden Bewegung eines willkürlichen Rotationskörpers, ist keine dieser Bedingungen erfüllt. Alle zusammen sind sie es nur, wenn :

$$(47) \quad f(\theta) = -f''(\theta)$$

und zugleich :

$$(48) \quad \cos \theta \cdot f'(\theta) + \sin \theta \cdot f(\theta) = 0$$

also :

$$(49) \quad f(\theta) = \zeta = a \cos \theta,$$

wo  $a$  eine Constante darstellt. Dann aber bleibt, wie man leicht aus Fig. 2 ansehen kann, ein gewisser in einer Entfernung  $a$  vom Schwerpunkte gelegener Punkt  $Q$  der Rotationsaxe in fortwährender Berührung mit der horizontalen Ebene, und die rollende Bewegung verändert sich in eine Bewegung um einen festen Punkt der Rotationsaxe. Für diesen Spezialfall können dann aber auch die Differentialbedingungen (11) durch die Integralbedingungen :

$$(50) \quad \begin{aligned} \xi &= x_1 + a \sin \theta \sin \psi \\ \eta &= y_1 - a \sin \theta \cos \psi \end{aligned}$$

ersetzt werden, wo  $x_1$  und  $y_1$  die Coordinaten des festen Punktes bezeichnen.

Ueber die richtige Auflösung des Problem  
der rollenden Bewegung eines schweren  
Rotationskörpers über eine horizontale  
Ebene.

12. Indem ich mir vorbehalte später in dieser Zeitschrift oder an andrer Stelle auf die richtige Lösung des angedeuteten Problem zurückzukommen, gebe ich hier schon ganz im Kurzen einige erhaltene Resultate. Es hat sich mir nämlich gezeigt:

1<sup>o</sup>. dass im allgemeinen Falle andre erste Integrale, mit Ausnahme der Integralgleichung der lebendigen Kraft und Arbeit, nicht zu erhalten sind <sup>1)</sup>.

2<sup>o</sup>. dass sich die Auflösung auf die Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung mit im allgemeinen Falle sehr verwickelten Coefficienten und auf nicht weniger verwickelten Eliminationen und Quadraturen zurückführen lässt.

3<sup>o</sup>. dass in dem Falle wo die Berührung zwischen Körper und Ebene durch Vermittlung eines scharfen Kreisrandes, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, stattfindet, diese Differentialgleichung in der einfacheren Gestalt

$$(51) \dots (1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2x \frac{dz}{dx} - kz = 0 \quad 2)$$

erhalten werden kann, wo:

$$x = \cos \theta; \quad z = r = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta; \quad k = \frac{MR^2}{MR^2 + C} \cdot \frac{C}{A},$$

<sup>1)</sup> In einem wichtigen Specialfalle, dem der rollenden Bewegung eines nicht homogenen Rotationskörpers dessen Oberfläche eine Kugelfläche bildet, besteht noch eine zweite Integralgleichung von sehr einfacher Gestalt. Diese Bemerkung finde ich auch bei ROUTH, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Advanced Part, Macmillan 1884, p. 143. Ex. 4.

<sup>2)</sup> Für den noch speciellern Fall der rollenden Kreisscheibe ( $k = \frac{1}{2}$ ) gelangt auch VIERKANDT (l. c. S. 127) zu einem Gleichungssysteme, aus welchem leicht eine einfache homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, von deren Integration die Lösung des Problem abhängig ist, hergeleitet werden kann. Er hat aber diese Gleichung nicht ausgeschrieben und also auch ihren Zusammenhang mit der hypergeometrischen Gleichung nicht erkannt.

und  $k$  immer zwischen 0 und 2 gelegen ist. ( $R$  Radius des Kreisrandes,  $M$  Masse,  $A$  und  $C$  Trägheitsmomente des Körpers).

4<sup>o</sup>. dass diese letzte Differentialgleichung mittelst hypergeometrischer Functionen <sup>1)</sup> integrirt werden kann. Wir können z. B. der Lösung eine der beiden folgenden Gestalten geben:

$$(52) \dots r = K_2 \cdot F\{\kappa + \tfrac{1}{2}, \kappa' + \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}(1-x)\} + \\ + K_3 \cdot F\{\kappa + \tfrac{1}{2}, \kappa' + \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}(1+x)\}$$

oder:

$$(53) \quad r = K'_2 \cdot F\{\kappa, \kappa', \tfrac{1}{2}, x^2\} + K'_3 x F\{\kappa + \tfrac{1}{2}, \kappa' + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x^2\},$$

wo  $K_2, K_3, K'_2, K'_3$  willkürliche Constanten darstellen, und

$$(54) \dots \kappa = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - k}; \quad \kappa' = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - k}.$$

### Ueber kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage.

13. Nachdem ich die Unzuverlässigkeit eingesehen hatte der Methode, auf welche auch Frau KERKHOVEN—WIJTHOFF sich bei der Auflösung der Preisaufgabe über kleine rollende Schwingungen zweier über einander gelagerter Halbkugeln gestützt hatte, blieb mir noch die Frage zu beantworten übrig, ob für solche kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage die Methode vielleicht doch als eine *in erster Annäherung* richtige erkannt werden könnte.

Glücklicherweise ist das wirklich der Fall, spezielle Fälle, wo z. B. gewisse Differentialquotienten <sup>2)</sup> in der Gleichgewichtslage unendlich gross werden, vielleicht ausgenommen.

Um dieses zu beweisen theilen wir wieder die  $n$  Variabeln, die so gewählt werden, dass sie in der Gleichgewichtslage alle gleich Null sind, in zwei Gruppen  $q_1, q_2, \dots, q_{n-m}$  und  $u_1, u_2, \dots, u_m$  ein, und bringen wir die zwischen ihnen bestehenden Differentialbedingungen auf die Form (21) oder (22), nämlich:

<sup>1)</sup> Weil die Gleichung (51) sich mit der Differentialgleichung der Kugelfunctionen identificirt wenn  $k$  durch  $-n(n+1)$  ersetzt wird, würde sie sich auch mittelst Kugelfunctionen mit irrationalen und complexen Indices integriren lassen.

<sup>2)</sup> Die partiellen Differentialquotienten der  ${}_1a_1, u. s. w.$

$$(21) \quad \dot{u}_1 = {}_1\alpha_1\dot{q}_1 + {}_1\alpha_2\dot{q}_2 + \dots + {}_1\alpha_{n-m}\dot{q}_{n-m}$$

$$\dot{u}_m = {}_m\alpha_1\dot{q}_1 + {}_m\alpha_2\dot{q}_2 + \dots + {}_m\alpha_{n-m}\dot{q}_{n-m},$$

oder:

$$du_1 = {}_1\alpha_1 dq_1 + \dots + {}_1\alpha_{n-m} dq_{n-m}$$

$$(22) \quad \dots$$

$$du_m = {}_m\alpha_1 dq_1 + \dots + {}_m\alpha_{n-m} dq_{n-m}.$$

Daneben führen wir nun weiter die neuen Variablen  $v_1, v_2, \dots, v_m$  ein, welche mit den  $u_1, u_2, \dots, u_m$  in folgender Beziehung stehen mögen:

$$u_1 = {}_1a_1q_1 + {}_1a_2q_2 + \dots + {}_1a_{m-n}q_{m-n} + v_1 + c_1$$

$$(55) \quad u_2 = {}_2a_1q_1 + {}_2a_2q_2 + \dots + {}_2a_{m-n}q_{m-n} + v_2 + c_2$$

$$\dots$$

$$u_m = {}_ma_1q_1 + {}_ma_2q_2 + \dots + {}_ma_{m-n}q_{m-n} + v_m + c_m$$

wo  $a$ , den Werth von  $\alpha$ , für  $q_1 = 0, q_2 = 0$ , etc., also in der Gleichgewichtslage, darstellen soll, und  $c_1, c_2, \dots, c_m$  als Integrationsconstanten zu betrachten sind.

Diese Integralgleichungen (55) verwenden wir nun dazu aus dem Ausdrücke der lebendigen Kraft die  $u_1, u_2, \dots$ , und auch die  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots$  zu eliminiren. Es sei  $T'$  der so erhaltene Ausdruck,  $T''$  derjenige welcher aus  $T'$  entsteht wenn wir überall die  $v_1, \dots, v_m$  und auch die  $\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_m$  gleich Null setzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wir schon bei der Elimination statt der Gleichungen (55), die vereinfachten Gleichungen:

$$u_1 = {}_1a_1q_1 + {}_1a_2q_2 + \dots + {}_1a_{m-n}q_{m-n} + c_1$$

$$(56) \quad u_2 = {}_2a_1q_1 + {}_2a_2q_2 + \dots + {}_2a_{m-n}q_{m-n} + c_2$$

$$\dots$$

$$u_m = {}_ma_1q_1 + {}_ma_2q_2 + \dots + {}_ma_{m-n}q_{m-n} + c_m$$

anwenden.

Wir haben dann mit vollkommener Strenge (vergl. § 4)

$$(57) \quad \dots \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T'}{\partial q_1} = F'_{q_1} + \phi'_{q_1}.$$

wo  $\phi'_{q_1} dq_1 + \dots + \phi'_{q_m} dq_m + \phi'_{v_1} dv_1 + \dots + \phi'_{v_n} dv_n$  die Elementararbeit der Reaktionskräfte,

$F'_{q_1} dq_1 + \dots + F'_{q_m} dq_m + F'_{v_1} dv_1 + \dots + F'_{v_n} dv_n$  diejenige der übrigen Kräfte bedeutet.

14. Wir bemerken nun zuerst, dass wenn wir, was noch erlaubt ist, die  $v_1, v_2, \dots$  für die Anfangslage, also für  $t = 0$ , verschwinden lassen, z. B.

$$v_1 = \int_0^t \dot{v}_1 dt = \int_0^t (\dot{u}_1 - {}_1a_1 \dot{q}_1 - {}_1a_2 \dot{q}_2 - \dots - {}_1a_{m-n} \dot{q}_{m-n}) dt = \int_0^t [({}_1\alpha_1 - {}_1a_1) \dot{q}_1 + \dots + ({}_1\alpha_{m-n} - {}_1a_{m-n}) \dot{q}_{m-n}] dt$$

dass also, wenn man sich auf endliche Zeiträume beschränkt, in der Nähe der Gleichgewichtslage, wo die  $\alpha$  noch wenig von den  $a$  verschieden sind, die  $v$  kleine Grössen zweiter Ordnung sind, welche gegen die  $q$  vernachlässigt werden können. Gleicherweise kann man die  $\dot{v}$  gegen die  $\dot{q}$ , und die

$$\ddot{v}_1 = ({}_1\alpha_1 - {}_1a_1) \ddot{q}_1 + \dots + \frac{\partial {}_1\alpha_1}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1^2 + \dots$$

gegen die  $\ddot{q}$  vernachlässigen.

Dann ist es aber deutlich, dass in erster Annäherung

$$T' = T'', \quad \frac{\partial T'}{\partial q_1} = \frac{\partial T''}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T''}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T''}{\partial \dot{q}_1},$$

wovon man sich übrigens durch Ausschreiben dieser Formen <sup>1)</sup> noch näher überzeugen kann.

Wir können also die Formel (57) schon durch die angenäherte Formel

$$(58) \quad \dots \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T''}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T''}{\partial q_1} = F'_{q_1} + \phi'_{q_1}$$

ersetzen, und wenn wir nun auch noch zeigen können, dass mit gleicher Annäherung  $F'_{q_1} + \phi'_{q_1}$  durch  $F''_{q_1}$  ersetzt werden

<sup>1)</sup>  $T' = \frac{1}{2} ({}_1r_1 \dot{q}_1^2 + \dots + {}_1r_2 \dot{v}_1^2 + \dots + 2 {}_1r_2 \dot{q}_1 \dot{v}_1 + \dots + 2 {}_2r_1 \dot{q}_1 \dot{v}_1 + \dots + 2 {}_2r_2 \dot{v}_1 \dot{v}_2 + \dots)$  u. s. w.



kann, wo  $F_1'' dq_1 + F_2'' dq_2 + \dots + F_n'' dq_{m-n}$  die totale Elementararbeit darstellt, welche geleistet wird bei solchen Verrückungen, die mit den Differentialbedingungen (22) im Einklange sind, so haben wir die Anwendbarkeit der betreffenden Methode bewiesen, weil diese eben auf die Benutzung in erster Linie der  $m - n$  Gleichungen:

$$(59) \quad \frac{d \cdot \frac{\partial T''}{\partial \dot{q}_1}}{dt} - \frac{\partial T''}{\partial q_1} = F''_{q_1}$$

$$\frac{d \cdot \frac{\partial T''}{\partial \dot{q}_{m-n}}}{dt} - \frac{\partial T''}{\partial q_{m-n}} = F''_{q_{m-n}}$$

zwischen den  $m - n$  Variablen  $q_1, q_2, \dots, q_{m-n}$  beruht.

15. Um diese annähernde Gleichheit von  $F''_{q_1} + \phi'_{q_1}$  und  $F''_{q_1}$  zu beweisen, schreiben wir zuerst für die totale Elementararbeit bei einer ganz willkürlichen Verrückung:

$$(60) \quad (F'_{q_1} + \phi'_{q_1})dq_1 + (F'_{q_2} + \phi'_{q_2})dq_2 + \dots + (F'_{q_{m-n}} + \phi'_{q_{m-n}})dq_{m-n} + (F'_{v_1} + \phi'_{v_1})dv_1 + \dots$$

Dann aber bemerken wir, dass wenn bei der Verrückung die Differentialbedingungen (22) erfüllt sind, und also z. B.

$$(61) \quad dv_1 = du_1 - {}_1a_1 dq_1 - {}_1a_2 dq_2 - \dots = ({}_1\alpha_1 - {}_1a_1) dq_1 + ({}_1\alpha_2 - {}_1a_2) dq_2 + \dots$$

ist, dann in diesem Falle für die Elementararbeit geschrieben werden kann:

$$(62) \quad \{ (F'_{q_1} + \phi'_{q_1}) + (F'_{v_1} + \phi'_{v_1}) ({}_1\alpha_1 - {}_1a_1) + (F'_{v_2} + \phi'_{v_2}) ({}_2\alpha_1 - {}_2a_1) + \dots \} dq_1 + \dots + \{ (F'_{q_{m-n}} + \phi'_{q_{m-n}}) + (F'_{v_1} + \phi'_{v_1}) ({}_1\alpha_{m-n} - {}_1a_{m-n}) + \dots \} dq_{m-n}$$

Es ist also:

$$(63) \quad F''_{q_1} = (F'_{q_1} + \phi'_{q_1}) + (F'_{v_1} + \phi'_{v_1}) ({}_1\alpha_1 - {}_1a_1) + (F'_{v_2} + \phi'_{v_2}) ({}_2\alpha_1 - {}_2a_1) + \dots ^1)$$

<sup>1)</sup> Zur näheren Erläuterung dieser Gleichung machen wir noch folgende Bemerkungen:

1<sup>o</sup>. Weil bei jeder Verrückung, welche die Bedingungen (22) erfüllt, die

und in erster Annäherung:

$$(64) \quad F''_{q_1} = F'_{q_1} + \phi'_{q_1}$$

w. z. b. w.

Arbeit der Reaktionskräfte verschwinden muss, so spaltet sich die Gleichung (63) in die beiden noch vollkommen strengen Gleichungen:

$$\phi'_{q_1} + \phi'_{v_1} \cdot (1a_1 - 1a_1) + \phi'_{v_2} (2a_1 - 2a_1) + \dots = 0$$

und

$$F''_{q_1} = F'_{q_1} + F'_{v_1} \cdot (1a_1 - 1a_1) + F'_{v_2} \cdot (2a_1 - 2a_1) + \dots$$

Es sind also die  $\phi'_q$  kleine Größen im Vergleich zu den  $\phi'_v$ .

2°. Schreiben wir die Elementararbeit in der Gestalt:

$$(F_{q_1} + \phi_{q_1}) dq_1 + (F_{q_2} + \phi_{q_2}) dq_2 + \dots + (F_{u_1} + \phi_{u_1}) du_1 + \dots$$

so finden wir durch Substitution der differenzirten Relationen (55), Vergleichung mit (60) und Spaltung:

$$\phi'_{q_1} = \phi_{q_1} + \phi_{u_1} \cdot 1a_1 + \phi_{u_2} \cdot 2a_1 + \dots$$

$$\phi'_{v_1} = \phi_{u_1}$$

$$F'_{q_1} = F_{q_1} + F_{u_1} \cdot 1a_1 + F_{u_2} \cdot 2a_1 + \dots$$

$$F'_{v_1} = F_{u_1}$$

Hieraus kann man dann leicht erkennen dass die  $F'_v + \phi'_v = F_u + \phi_u$  im Allgemeinen Größen sind von derselben Ordnung wie

$$F'_{q_1} + \phi'_{q_1} = F_{q_1} + \phi_{q_1} + 1a_1 (F_{u_1} + \phi_{u_1}) + \dots$$

und namentlich wie wir sofort zeigen werden, kleine Größen erster Ordnung. Dabei bedenke man dass die Eintheilung der Coordinaten in zwei Gruppen  $q_1, q_2 \dots q_{m-n}$  und  $u_1, u_2 \dots u_m$  eine ganz willkürliche war.

3°. Was nun die Größenordnung der verschiedenen hier vorkommenden Ausdrücke anbelangt, hat man zu bedenken dass in der Gleichgewichtslage die  $F$  und  $\phi$ , oder auch die  $F'$  und  $\phi'$ , nicht nothwendig einzeln und getrennt zu verschwinden brauchen. Um das einzusehen stelle man sich z. B. die rollenden Schwingungen einer Halbkugel vor, welche auf einer *geneigten* Ebene ruht und durch die gleitende Reibung an Ort und Stelle gehalten wird. Bei einer Verschiebung über die Ebene verschwindet dann die durch die Schwerkraft bedingte  $F$  im Allgemeinen ebenso wenig wie die aus der Reaktionskraft entspringende  $\phi$ , wohl aber ihre *Summe*.

Dass nämlich die *Summen*  $F'_{q_1} + \phi'_{q_1}$ ,  $F'_{q_2} + \phi'_{q_2}$ ,  $\dots$   $F'_{v_1} + \phi'_{v_1}$ ,  $\dots$  oder auch  $F_{q_1} + \phi_{q_1}$ ,  $\dots$  u. s. w. alle in der Gleichgewichtslage verschwinden müssen, ist deutlich, wenn man sich in dieser Lage die Verbindungen, welche die Differentialbedingungen (22) verursachen, aufgehoben und durch die von ihnen hervorgerufenen Reaktionskräfte ersetzt denkt. Das Gleichgewicht bleibt dann bestehen, und das Princip der virtuellen Verrückungen erfordert also das Verschwinden dieser Summen. In der Nahe der Gleichgewichtslage erhalten diese Summen dann aber im Allgemeinen kleine Werthe erster Ordnung. Dahingegen sind die einzelnen  $F$  und  $F'$ ,  $\phi$  und  $\phi'$ , mit Ausnahme der  $F'_q$  und  $\phi'_q$ , im Allgemeinen endliche Größen. Diese letztere, so wie die  $F''$ , sind kleine Größen erster Ordnung.





nur Verrückungen, die zu der zweiten Grössenordnung gehören, erleiden wird, dass dahingegen, so bald gleiten eintritt oder eine endliche Rotation um die Normale des Contactpunktes stattfindet, Verrückungen von der ersten Grössenordnung auftreten müssen.

Die Bedingung des Rollens ist also, bei Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung, gleichbedeutend mit der Bedingung dass ein gewisser in der Nähe des Contactpunktes gelegener Punkt des einen Körpers sich auf einer gegebenen mit dem andern Körper fest verbundenen Geraden (die senkrecht auf der anfänglichen Berührungsebene stehende projecirende Gerade) bewegen muss.

Diese letztere Bedingung stellt aber selbstverständlich eine Integralbeziehung dar, und diese Integralbeziehungen müssen mit den Bedingungen (66) identisch sein.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

---

Cours de problèmes de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'école navale, à l'école centrale et à l'école polytechnique par G. de LONGCHAMPS, ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, professeur de mathématiques spéciales au lycée Condorcet. Drie deelen in 8° (I, 295 p., 80 fig., 1898, 5 fr.; II, 435 p., 106 fig., 1899, 7. fr. 50; III, 582 p., 51 fig., 1899, 10 fr.). Parijs, 15 rue Soufflot, Ch. Delagrave.

Zooals bekend is, komen er in de voornaamste leerboeken der analytische meetkunde belangrijke reeksen van vraagstukken voor. Zij verhoogden het nut dier leerboeken in bijzondere mate; want eerst door het oplossen dier vraagstukken maakt men zich de theorie volkomen eigen. Van deze vraagstukken reeksen hebben zeker wel die van Briot en Bouquet's leerboek hier te lande het meest de aandacht getrokken; althans mij is bekend, dat naast de door Korteweg uitgegeven oplossingen, die alleen op de eerste hoofdstukken betrekking hebben, drie stel oplossingen, waaronder zich over alle reeksen uitstrekkende voorkomen, in portefeuille gebleven zijn <sup>1)</sup>. Doch dit neemt niet weg, dat aan het nut, dat deze vraagstukken in wijden kring zouden kunnen stichten, een onoverkomelijk bezwaar in den weg staat, hierin gelegen, dat ze òf te gemakkelijk òf te moeilijk zijn; in het eerste geval wordt de oplossing wel verkregen, doch brengt zij geen ontwikkeling aan, terwijl in het tweede geval eveneens alle tijd en moeite verloren is.

Aan dit bezwaar tracht de verzameling van vraagstukken, waarvan de titel hierboven gegeven is, te gemoet te komen.

---

<sup>1)</sup> Uit de nagelaten papieren van Prof. F. J. van den Berg is gebleken, dat de Delftsche hoogleeraar Dr. R. W. van Goens een volledig stel oplossingen bezat. En naast mijn eigen verzameling is thans een eveneens volledige van Dr. F. J. van den Berg tijdelijk onder mijn berusting.

Hiertoe is ieder hoofdstuk van elk der drie deelen in twee stukken gesplitst, waarvan het eerste algemeene wenken omtrent de oplossing der onder den titel van het hoofdstuk thuis behoorende vraagstukken groep en de toepassing van deze op enkele vraagstukken dier groep bevat, terwijl in het tweede omtrent de oplossing van een groot aantal meerendeels nieuwe vraagstukken korte aanwijzingen worden gegeven. Van de drie deelen zijn er twee aan het platte vlak gewijd; het derde, dat bijna dubbel zoo massief is als het eerste, behandelt vraagstukken der ruimte. Ten einde een denkbeeld van den inhoud te geven vermelden we de titels der hoofdstukken met hun omvang in bladzijden en voorgestelde vraagstukken.

*Eerste deel.* I. Les généralités, p. 1—42, 62 vr. II. La classification des problèmes, p. 43—74, 32 vr. III. La décomposition du résultant, p. 75—106, 19 vr. IV. Les problèmes élémentaires, p. 107—149, 65 vr. V. Les problèmes généraux, p. 150—181, 30 vr. VI. Les coniques rapportées à leurs axes, p. 182—209, 38 vr. VII. Le problème des tangentes, p. 210—259, 29 vr. VIII. Les poles et polaires. Les lieux de centres, p. 260—295, 35 vr.

*Tweede deel.* IX. Le problème des normales (le pole normal), p. 1—50, 28 vr. X. Le problème de cordes (l'équation en  $\lambda$ ), p. 51—98, 40 vr. XI. Les problèmes à relations métriques, p. 99—166, 62 vr. XII. Les coniques et la forme normale, p. 167—198, 13 vr. XIII. Les problèmes de foyers. Les problèmes de sommets. (Les axes et les directrices), p. 199—236, 32 vr. XIV. Les problèmes de simple contact, p. 237—262, 9 vr. XV. Les problèmes de contact supérieur, p. 263—286, 18 vr. XVI. Coniques inscrites et circonscrites. Coniques conjuguées, p. 287—327, 26 vr. XVII. Les coordonnées barycentriques et les coordonnées tangentielles, p. 328—379, 69 vr. XVIII. Les transformations et les problèmes de la géométrie analytique, p. 380—435, 36 vr.

*Derde deel.* I. Les généralités, p. 1—74, 39 vr. II. Les problèmes élémentaires, p. 75—137, 40 vr. III. Les tangentes et les plans tangents, p. 138—177, 13 vr. IV. Les centres, les poles et les plans polaires, p. 178—223, 21 vr. V. Les problèmes de cordes et de plans sécants, p. 224—247, 16 vr. VI. Les normales, p. 248—311, 26 vr. VII. Les génératrices

rectilignes dans les quadriques et les problèmes qui s'y rattachent, p. 312—366, 19 vr. VIII. Les plans cycliques et les plans hypercycliques; les ombilics, p. 367—402, 9 vr. IX. Les problèmes d'axes et de sommets (dans la section plane et dans les quadriques, p. 402—444, 7 vr. X. Les surfaces de révolution. Les quadriques tangentes, p. 445—485, 14 vr. XI. Discussion des quadriques, p. 486—532, 6 vr. XII. Étude d'une surface (la surface romaine de Steiner), p. 533—582, 12 vr.

We zijn er van overtuigd, dat het belangwekkende werk van den heer de Longchamps in Frankrijk groot succes zal hebben. Ook in ons land wenschen wij het in veler handen. Werkelijk kan het in verschillende richting de grondslag worden van zelfstandig onderzoek. We raden hem, die zich door deze aankondiging opgewekt mocht voelen het werk aan te schaffen, aan vooral de voorrede voor het derde deel niet over te slaan en eindigen met den wensch, dat de begaafde schrijver, in strijd met hetgeen hijzelf waarschijnlijk acht, nog meer zulke nuttige boeken als het besprokene moge leveren <sup>1)</sup>. S.

Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens. Cours professé à l'école centrale des arts et manufactures par P. APPELL, Membre de l'Institut. Een deel in 8°, 695 p., 224 fig. Parijs, G. Carré en C. Naud, 3 rue Racine, 1898, 24 fr.

Zooals men weet is de kwestie der wiskundige vooropleiding van ingenieurs en physici thans meer dan ooit aan de orde en worden vooral in Duitschland hieromtrent verschillende meeningen verkondigd. Om zich hiervan te overtuigen heeft men slechts de „Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung” na te slaan en kennis te nemen van de opstellen van B. Schwalbe (V, 1896), A. Pringsheim (VI, 1897) en het zich hierbij en bij een voordracht van F. Klein in 1897 op het internationaal congres van wiskundigen te Zürich aansluitende, met zooveel courtoisie gevoerde spiegelgevecht tusschen beide laatstgenoemden. En hen, die aan meer gepeperde artikels de voorkeur geven, bevelen wij de lezing aan van P. von

<sup>1)</sup> Behalve de „Cours de mathématiques spéciales”, die ik in 1888 in het veertiende deel van het *Nieuw Archief* aankondigde, verscheen van de hand des schrijvers een „Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre”, Parijs, Delagrave, 1890.



Loosow's oordeel over de tegenwoordige inrichting der „technische Hochschulen” verschenen in de „Hochschul-Nachrichten”, van Januari 1899.

Indien een wiskundige als Appell tijdelijk zijn hoog standpunt verlaat om zich te verledigen met het schrijven van een leerboek over de beginselen der wiskundige analysis ten dienste van aanstaande ingenieurs en physici, mag men verwachten dat het brandende vraagstuk van maximum en minimum, waarover de aangevoerde strijd loopt, een stap nader tot de oplossing wordt gebracht. Met voorbijgang van de aan een gewoon leerboek te stellen eischen van strengheid en duidelijkheid, hebben we dus te onderzoeken 1<sup>o</sup> of in het voor ons liggende werk alle bespiegelingen zijn vermeden, die, hoe belangrijk ook voor den wiskundige, geen toepassing vinden in de technische wetenschappen en zonder het verband te schaden uit het geheel kunnen worden weggelaten en 2<sup>o</sup>. of daarentegen wel opgenomen zijn die in het geheel passende onderdeelen, welke de ingenieur of physicus niet kan ontberen. Natuurlijk is het resultaat van dit onderzoek subjectief, omdat de afbakening der leerstof altijd een kwestie van appreciatie blijft. Doch — im grossen und ganzen — kan zeker van Appell's werk worden getuigd, dat het in deze afbakening vrijwel is geslaagd. De theoretische ontwikkelingen, die gegeven worden, zijn tot een minimum beperkt en tamelijk eenvoudig gehouden. En wat de toepassingen aangaat teekenen we aan: het zwaartepunt, de regel van Guldin, de enkelvoudige slinger, de stelling van Green, de vergelijking van den neutralen vezel, galvanometer, krachtlijnen, niveauoppervlakken, de bewegingsvergelijkingen van een stoffelijk punt, de roulette Dupuy, de integraphen, de planimeter van Amsler, enz.

Men mene nu echter niet, dat men uit Appel's werk differentieeren leeren kan. In verband met de verdeeling der leerstof over de verschillende op elkaar volgende inrichtingen van onderwijs, zie o.a. mijne aankondiging van de Longchamps' „Cours de mathématiques spéciales” (Nieuw Archief, deel 14, p. 117), wordt bij den lezer de kennis van de allereerste gronden der differentiaalrekening ondersteld. Zoo vindt men in art. 13, getiteld „Tableau de différentielles usuelles” de differentialen van  $x^m$ ,  $\log x$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ , enz. zonder aanwijzing der afleiding opgegeven. Eveneens wordt men in art. 18 getiteld

„Dérivées et différentielles partielles” met betrekking tot de vergelijking  $f_{x,y}'' = f_{x,y}'$ , naar de stekunde verwezen.

Wij eindigen met de aandacht te vestigen op een meer uitvoerige beoordeeling van den nieuwen arbeid van Appell, door A. G. Greenhill in druk gegeven in het eerste nummer van „L'enseignement mathématique” van 15 Januari 1899. S°.

Calcul de généralisation par G. OLTRAMARE, doyen de la faculté des sciences de l'université de Genève. Een deel in 8°, 188 p. Parijs, 8 rue de la Sorbonne, A. Hermann, 1899, 6 fr.

In deze generalisatie-rekening gaat de schrijver van het denkbeeld uit eenwaardige functies zoodanig in een symbolischen vorm voor te stellen, dat de hoofdbewerkingen als differentiatie en integratie, waaraan zij kunnen worden onderworpen, door middel van zeer eenvoudige stekundige herleidingen op hen kunnen worden toegepast. De verwezenlijking van dit denkbeeld, die noch in uiteenzetting noch in toepassing met groote moeilijkheden gepaard gaat, leidt onmiddellijk tot de opstelling van algemeene formules ter bepaling van die bepaalde integralen, welke gedeeltelijk door Cauchy met behulp van de beschouwing der residus gevonden zijn, en levert voor de differentiatie en integratie met gebroken indices eenvoudiger formules dan de door Liouville afgeleide, voor de herleiding van reeksen tot bepaalde integralen zeer eenvoudige handelwijzen. Maar vooral met betrekking tot de integratie van differentiaalvergelijkingen kan de nieuwe rekenwijze diensten bewijzen. Na eenige algemeene beginselen vooropgesteld te hebben past de schrijver haar toe op de opsporing van bijzondere integralen van bepaalde differentiaalvergelijkingen als gedeeltelijke lineaire differentiaalvergelijkingen met standvastige coëfficiënten en een tweede lid, als gelijktijdige vergelijkingen, vergelijkingen met gemengde verschillen, enz. Daarbij blijkt dan verder, dat men in vele gevallen in staat is de functie te bepalen, die voorkomt in een bepaalde integraal, waarvan men de waarde kent.

Volgens den schrijver is de nieuwe rekenwijze voor de hoogere analysis wat de logaritmen zijn voor de beëijfering: zij vermindert in vele gevallen de aan differentiatie en integratie verbonden moeilijkheden. S°.

PETER GUTHRIE TAIT, M. A., Sec. R. S. E., honorary fellow of Peterhouse, Cambridge, professor of natural philosophy in the University of Edinburgh. *Scientific Papers*, I. In 4<sup>o</sup>, 498 p., Cambridge, University press, 1898.

Dit eerste deel der algemeene werken van den bekenden hoogleeraar bevat 60 tusschen de jaren 1859—1881 verschenen verhandelingen over zeer uiteenlopende onderwerpen van wis-, werktuig- en natuurkundigen aard. Met voorbijgang van de in gemeenschap met Dr. Andrews geschrevene en in diens „leven”, verschenen bij Macmillan te Londen, reeds uitgegevene geschriften wordt de hier opnieuw in het licht gegeven reeks geopend met eenige studies over quaternionen, door den schrijver opgesteld alvorens hij kennis maakte met Sir W. R. Hamilton, wiens „bekoorlijk boek hij op een vacantiereis eens meenam als medgezel bij regenachtige dagen.” Met de quaternionen staan 21 der 60 verhandelingen in rechtstreeks of meer verwijderd verband. Verder zullen den wiskunstenaar voornamelijk de door vele platen opgehelderde vier verhandelingen over de theorie der knopen, de beschouwing over het golfspel en het levensbericht van Clerk Maxwell aantrekken. S.

H. POINCARÉ. *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes*. (IV, 80). Georges Carré et C. Naud. Paris. Prijs 2 frs.

Deze monographie bevat eene korte uiteenzetting van de hoofdpunten der hedendaagsche electriciteitstheorie. Zij vormt de eerste aflevering van het recueil getiteld „Scientia”, waarin achtereenvolgens door erkende geleerden, de nieuwste ontdekkingen en de voornaamste theorieën op het gebied der natuurwetenschap zullen worden behandeld. De uitgave is gesplitst in een physisch-mathematisch en in een biologisch gedeelte. Tot degenen, die zich met de leiding dezer uitgave belasten behooren onder anderen Appell, Cornu, Poincaré. Kl.

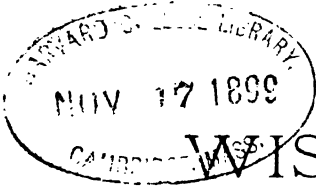
# I N H O U D.

	Blz.
D 1 b. J. C. KLUYVER. Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks ( <i>vervolg</i> ) . . . . .	81.
Q 2. G. MANNOURY Sphères de seconde espèce . . . . .	83.
P 4 g. P. H. SCHOUTE. On a cubic transformation in space. . . . .	90.
M' 2 a α, M' 5 a, b, e, i. JAN DE VRIES. Kubische Involutionen erster und zweiter Stufe auf kubischen Raumcurven . . . . .	101.
K 14 g. F. J. VAES. De regelmatige ruimteverdeeling door veertien-vlakkige lichamen . . . . .	107.
C 2 d, F 2 h. J. C. KLUYVER. De omkeering der elliptische integralen van de eerste soort . . . . .	109.
Q 2. G. MANNOURY. Surfaces-images . . . . .	112.
R 8 a, c γ, e β. D. J. KORTEWEG. Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung, und ins besondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage. . . . .	1
Bibliographie . . . . .	1
L, M' 1, 2. C. A. LAISANT. Cours de problèmes de géométrie analytique. Paris, Ch. Delagrave, 1898—1899.	
C, P. APPELL. Éléments d'analyse mathématique. Paris, Carré et Naud, 1898.	
C 5. G. OLTRAMARE. Calcul de généralisation. Paris, A. Herman, 1899.	
B 12 d, Q 4 c, V 9. P. G. TAIT. Scientific Papers, I. Cambridge, University press, 1898.	
T 5, 6, 7. H. POINCARÉ. La théorie de Maxwell et les oscillations Hertiennes, Édition Scientia. Paris, Carré et Naud.	

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie Dr. J. C. KLUYVER te Leiden.

62-900, 30

# NIEUW ARCHIEF



VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

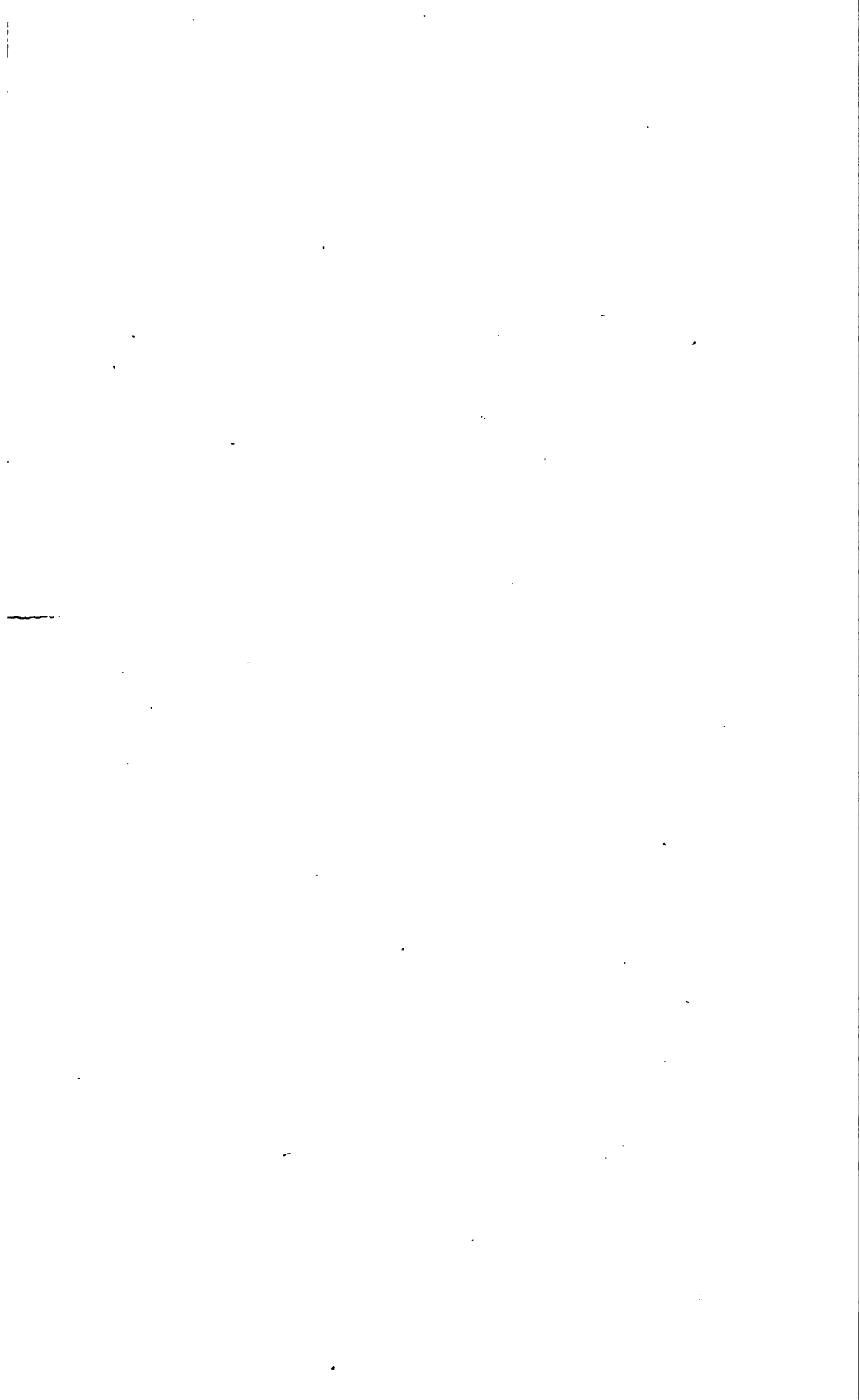
J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEDE REEKS  
DEEL IV  
DERDE STUK

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1899



PETER GUTHRIE TAIT, M. A., Sec. R. S. E., honorary fellow of Peterhouse, Cambridge, professor of natural philosophy in the University of Edinburgh. *Scientific Papers*, I. In 4<sup>o</sup>, 498 p., Cambridge, University press, 1898.

Dit eerste deel der algemeene werken van den bekenden hoogleeraar bevat 60 tusschen de jaren 1859—1881 verschenen verhandelingen over zeer uiteenlopende onderwerpen van wis-, werktuig- en natuurkundigen aard. Met voorbijgang van de in gemeenschap met Dr. Andrews geschrevene en in diens „leven”, verschenen bij Macmillan te Londen, reeds uitgegevene geschriften wordt de hier opnieuw in het licht gegeven reeks geopend met eenige studies over quaternionen, door den schrijver opgesteld alvorens hij kennis maakte met Sir W. R. Hamilton, wiens „bekoorlijk boek hij op een vacantiereis eens meenam als medgezel bij regenachtige dagen.” Met de quaternionen staan 21 der 60 verhandelingen in rechtstreeks of meer verwijderd verband. Verder zullen den wiskunstenaar voornamelijk de door vele platen opgehelderde vier verhandelingen over de theorie der knopen, de beschouwing over het golfspel en het levensbericht van Clerk-Maxwell aantrekken. S<sup>c</sup>.

H. POINCARÉ. *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertiennes*. (IV, 80). Georges Carré et C. Naud. Paris. Prijs 2 frs.

Deze monographie bevat eene korte uiteenzetting van de hoofdpunten der hedendaagsche electriciteitstheorie. Zij vormt de eerste aflevering van het recueil getiteld „Scientia”, waarin door erkende geleerden achtereenvolgens de nieuwste ontdekkingen en de voornaamste theorieën op het gebied der natuurwetenschap zullen worden behandeld. De uitgave is gesplitst in een physisch-mathematisch en in een biologisch gedeelte. Tot degenen, die zich met de leiding dezer uitgave belasten, behooren onder anderen Appell, Cornu, Poincaré. Kl.

# THE CLASSIFICATION OF QUADRICS IN $n$ -DIMENSIONAL SPACE

BY

DR. W. A. WYTHOFF.

## Introduction.

1. A *quadric* in  $n$ -dimensional space is the locus of points the co-ordinates (rectilinear or homogeneous) of which satisfy an equation of the second degree. It is a curved space of  $n - 1$  dimensions.

As I shall use homogeneous co-ordinates\*), the quadric will be represented by a homogeneous equation between the  $n + 1$  co-ordinates:

$$F = \Sigma \Sigma a_{pq} x_p x_q = 0, \dots \dots \dots (1)$$

in which  $a_{pq} = a_{qp}$ , while the symbols  $\Sigma \Sigma$  indicate summations from  $p = 1$  to  $p = n + 1$  and from  $q = 1$  to  $q = n + 1$ . As I scarcely shall make use of other summations than of those from 1 to  $n + 1$ , I shall henceforth abstain from indicating these limits and denote the index of summation ( $p$  or  $q$ ) only when its omission would give rise to ambiguity.

I shall consider only that case in which the coefficients  $a_{pq}$  are real quantities.

2. The *space at infinity* is represented by a homogeneous equation of the first degree, which I shall write

$$\Sigma \rho_p x_p = 0. \dots \dots \dots (2)$$

---

\*) A classification of quadrics in which rectangular co-ordinates are used is given by

K. Hensel. Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 113, 1894, p. 303).



3. Every arbitrary point  $(x'_1 : \dots : x'_{n+1})$  has with respect to the quadric a *polar space* represented by the equation

$$\sum_q a_{pq} x_p x'_q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

and having the property that the line joining any point of that space to the "*pole*"  $(x'_1 : \dots : x'_{n+1})$  is cut harmonically by the quadric.

The polar space is indeterminate if the coefficients

$$\sum_q a_{pq} x'_q \quad (p = 1 \dots n+1)$$

of equation (3) be all zero.

If a point P be lying in the polar space of Q, Q reciprocally is lying in the polar space of P.

If a point be lying in its own polar space, it is lying also in the quadric. In this case the polar space is a *tangent space*.

4. Conversely every linear space of  $n - 1$  dimensions,

$$\sum_p \xi_p x_p = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

has in general one definite *pole* with respect to the quadric.

To find this pole the co-ordinates  $x'_1, \dots, x'_{n+1}$  should be so chosen that the equations (3) and (4) become identical. The co-ordinates of the pole therefore satisfy the conditions

$$\sum_q a_{pq} x_q + \xi_p \lambda = 0 \quad (p = 1 \dots n+1) \quad . \quad . \quad (5)$$

If not all of these equations be independent, the pole is indeterminate.

If all the equations (5) be independent, the co-ordinates of the pole are proportional to the determinants which we get by omitting in turn the 1<sup>st</sup> . . . . .  $n + 1$ <sup>st</sup> column of the matrix formed by the coefficients of  $x_1 \dots x_{n+1}$  and  $\lambda$  in (5) with signs alternatively positive and negative.

### Centres.

5. Centre of a quadric is every point that is a pole of the space at infinity. Hence the co-ordinates of every centre satisfy the equations

$$\sum_q a_{pq} x_q + \rho_p \lambda = 0 \quad (p = 1 \dots n+1) \quad . \quad . \quad (6)$$

If these equations be independent, the quadric has one single definite centre, the co-ordinates of which are proportional to the determinants which we get by omitting successively the 1<sup>st</sup> .....  $n + 1$ <sup>st</sup> column of the matrix

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & \rho_{n+1} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

with signs alternatively positive and negative.

6. If  $m$  of the equations (6) be a consequence of the others, the remaining  $n - m + 1$  equations determine,  $\lambda$  being eliminated, a linear space of  $m$  dimensions, every point of which is a centre of the quadric (*space of centres*).

7. For the classification of quadrics I shall in the first place make use of the properties of the centre or space of centres. Especially I shall distinguish:

1<sup>o</sup>. whether the centre be definite or indeterminate, and in the latter case, which be the number of dimensions of the space of centres;

2<sup>o</sup>. whether the centre (or space of centres) be lying in the space at infinity or not;

3<sup>o</sup>. whether the centre (or space of centres) be lying in the quadric or not.

#### Quadrics with a definite centre.

8. We now suppose the quadric to have one single centre. For this it is necessary that the equations (6) be independent, and therefore that of the determinants of the  $n + 1$ <sup>st</sup> degree which can be formed from the matrix  $M$ , § 5 (7), one at least be different from zero.

9. The condition that the centre may lie at infinity obviously is that the equations (6) be satisfied together with the equation of the space at infinity. This condition is:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & \rho_{n+1} \\ \rho_1 & \dots & \rho_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0 \dots (8)$$

In this case the quadric will be called a *paraboloid*.

It follows from the property mentioned in § 3 (last alinea), that every centre at infinity is lying in the quadric. Hence the centre of the paraboloid is lying in the paraboloid.

10. To find the condition that the centre be lying in the quadric (which necessarily embraces the case of a paraboloid) the co-ordinates of the centre should be substituted in the equation of the quadric. For this purpose we write this equation

$$F = \sum_p \{x_p \sum_q a_{pq} x_q\} = 0.$$

Substituting the co-ordinates of the centre (§ 5) in  $\sum_q a_{pq} x_q$ , we get

$$\sum_q a_{pq} x_q = \begin{vmatrix} a_{p,1} & \dots & a_{p,n+1} & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & \rho_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Subtracting the  $p + 1^{\text{st}}$  row from the first and denoting by  $\Delta$  the discriminant of the quadratic equation, we get:

$$\sum_q a_{pq} x_q = (-1)^n \rho_p \Delta,$$

and therefore

$$F = (-1)^n \Delta \cdot \sum_p \rho_p x_p.$$

Substituting again the co-ordinates of the centre we finally obtain:

$$F = (-1)^n \Delta \cdot (-1)^{n+1} D = -\Delta \cdot D.$$

Hence the condition required is

$$\Delta \cdot D = 0 \dots (9)$$

This condition can be satisfied in two different ways.

- 1°. by  $D = 0$  (paraboloid, § 9);  
 2°. by  $\Delta = 0$ .

11. I shall now proceed to investigate the case  $\Delta = 0$ .

This condition cannot be coexistent with  $D = 0$  unless the centre is indeterminate. For if  $\Delta$  and  $D$  be zero at the same time, it follows from a property of determinants \*) that all determinants of the  $n + 1^{\text{st}}$  degree that can be formed from  $M$  are zero (§ 8). We therefore assume that the centre does not lie at infinity.

Since  $\Delta$  can be obtained from  $M$  by omitting the last column we deduce from the equations (6):

$$\lambda = 0.$$

The co-ordinates of the centre therefore satisfy the equations

$$\sum_p a_{pq} x_q = 0 \quad (p = 1 \dots n + 1), \quad (10)$$

one of which is a consequence of the others.

Let now  $x_1' \dots x_{n+1}'$  be the co-ordinates of the centre,  $x_1'' \dots x_{n+1}''$  those of another (real or imaginary) point of the quadric. Substituting in  $F$  the coordinates of an arbitrary point  $(x_1' + kx_1'' : \dots : x_{n+1}' + kx_{n+1}'')$  of the line joining the point  $(x_1'' : \dots : x_{n+1}'')$  to the centre, we find

$$\begin{aligned} F &= \sum_p \sum_q a_{pq} (x_p' + kx_p'') (x_q' + kx_q'') = \\ &= \sum_p \sum_q a_{pq} x_p' x_q' + 2k \sum_p \{ x_p'' \sum_q a_{pq} x_q' \} + k^2 \sum_p \sum_q a_{pq} x_p'' x_q''. \end{aligned}$$

This will be found to be zero independent of the value of  $k$ . For the first and last term are zero because the points  $(x_1' : \dots : x_{n+1}')$  and  $(x_1'' : \dots : x_{n+1}'')$  are lying in the quadric, the middle term is zero in consequence of (10). Hence the whole line joining the centre to any other point of the quadric is lying in the quadric, which is therefore a locus of straight lines all passing through the centre.

I shall therefore in this case call the quadric a *cone of the first order*. The centre is its *vertex*.

\*) For this property and for some other properties of determinants I refer to:

A. E. Rahusen. Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à  $n$  dimensions (*Annales de l'école polytechnique de Delft*, vol. 4, 1838, p. 104).

The polar space of the vertex is found to be indeterminate (§ 3) and is therefore not *necessarily* the space at infinity.

### Quadrics with a space of centres.

12. We now suppose a certain number  $m$  of the equations (6) to be depending on the remaining. For this the condition is that all determinants of degree  $n - m + 2$  that can be formed from the matrix  $M$ , be zero.

For abridgment I introduce the notation

$$H_{(r)} = 0$$

to denote that all determinants of the  $r^{\text{th}}$  degree that can be formed from the matrix (or determinant)  $H$  are zero. If  $r$  be the highest degree of the determinants which can be formed from  $H$ , I simply write

$$H = 0.$$

We thus proceed to the case

$$M_{(n-m+2)} = 0. \quad \dots \dots \dots (11)$$

We further suppose the first  $n - m + 1$  of the equations (6),

$$\sum_q a_{pq} x_q + \rho_p \lambda = 0 \quad (p = 1 \dots n - m + 1), \dots (12)$$

to be independent of one another, and the remaining  $m$  equations,

$$\sum_q a_{pq} x_q + \rho_p \lambda = 0 \quad (p = n - m + 2 \dots n + 1), \dots (13)$$

to be a consequence of them.

Equations (12) then determine,  $\lambda$  being eliminated, the space of centres (of  $m$  dimensions).

13. If in the equations (12) we make  $\lambda = 0$ , they become

$$\sum_q a_{pq} x_q = 0 \quad (p = 1 \dots n - m + 1). \dots (14)$$

These equations represent in general a linear space of  $m - 1$  dimensions, which evidently is lying in the space of centres. I shall call it the *vertex space* of the quadric.

The particular case that of equations (14) one be depending

on the others is provisionally excluded. This occurs when the matrix of (14) is zero, which leads to the condition

$$\Delta_{(n-m+1)} = 0 \quad (\S 17).$$

The points of the vertex space obviously also satisfy the equations

$$\sum a_{pq} x_q = 0 \quad (p = n - m + 2 \dots n + 1), \dots (15)$$

obtained from (13) by substituting  $\lambda = 0$ .

It further follows from (11), that they also satisfy the equation of the space at infinity, which is depending on (14) and therefore that the vertex space is lying at infinity. Only in the particular case  $\Delta_{(n-m+1)} = 0$ , just excluded, this conclusion would be false.

Since the points at infinity of a linear space of  $m$  dimensions form together a linear space of  $m - 1$  dimensions, we find, that the vertex space generally contains all the centres at infinity. Only in that case are there centres at infinity not contained in the vertex space, when the whole central space is lying at infinity.

All the points of the vertex space (being centres at infinity), are lying in the quadric.

14. Let  $(x_1' : \dots : x_{n+1}')$  be any point of the vertex space,  $(x_1'' : \dots : x_{n+1}'')$  another arbitrary (real or imaginary) point of the quadric.

Following the same reasoning as in § 11, we deduce from (14) and (15), that the whole line joining the two points is lying in the quadric. If now we suppose the point  $(x_1'' : \dots : x_{n+1}'')$  to be fixed, we see that the locus of lines joining that point to all the points of the vertex space is lying in the quadric. This locus is a linear space of  $m$  dimensions. Hence the quadric is a locus of linear spaces of  $m$  dimensions all containing the vertex space and, since this is lying at infinity, all parallel \*) to each other.

I shall call the quadric in this case a *cylinder of the  $m^{\text{th}}$  order*.

---

\*) *Parallel to each other* will be called two linear spaces of  $m$  dimensions that intersect in a linear space of  $m - 1$  dimensions at infinity.

The linear spaces of  $m$  dimensions above mentioned are also parallel to the space of centres.

Only then does this reasoning not hold, when the quadric does not contain beside the vertex space any real or imaginary point at all. This occurs when the quadric degenerates into twice the space at infinity.

15. The condition that the space of centres may lie at infinity is evidently that the equation of the space at infinity depend on the equations (12). Taking this condition together with (11) and remembering that the equations (12) are supposed to be independent, we have

$$D_{(n-m+2)} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

In this case the quadric is a *paraboloidal cylinder of the  $m^{\text{th}}$  order*.

16. In analogy to § 10 can be found the condition that the space of centres be lying in the quadric.

We determine for that purpose any arbitrary centre by the equations (12) and by  $m$  arbitrary equations of the first degree independent of them and of each other:

$$\sum_q \xi_{pq} x_q = 0 \quad (p = 1 \dots m).$$

Performing the substitution of the coordinates of the centre in the same way as in § 10 we find:

$$\sum_q a_{pq} x_q = \begin{vmatrix} a_{p,1} \dots \dots \dots a_{p,n+1} & 0 \\ a_{1,1} \dots \dots \dots a_{1,n+1} & \rho_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-m+1,1} \dots \dots a_{n-m+1,n+1} & \rho_{n-m+1} \\ \xi_{1,1} \dots \dots \dots \xi_{1,n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{m,1} \dots \dots \dots \xi_{m,n+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

For the values of  $p \leq n - m + 1$  we subtract the  $p + 1^{\text{st}}$  row from the first. We thus get:

$$\sum_q a_{pq} x_q = (-1)^n \rho_p \Delta',$$

denoting by  $\Delta'$  the determinant obtained from the above mentioned by omitting the first row and the last column.

For the values of  $p > n - m + 1$ , we remember that the equation

$$\sum_i a_{pi} x_i + \rho_p \lambda = 0$$

is supposed to depend on the equations (12) and that therefore the quantities

$$a_{p,1} \dots a_{p,n+1} \quad \rho_p$$

can be obtained by adding the  $2^{\text{nd}} \dots n - m + 2^{\text{nd}}$  row of the above mentioned determinant each multiplied by a certain coefficient. We therefore may subtract these quantities from the first row of the determinant and find thus

$$\sum a_{pi} x_i = (-1)^s \rho_p \Delta',$$

being the same formula found for the other values of  $p$ .

Performing now the substitution in

$$F = (-1)^s \Delta' \cdot \sum \rho_p x_p,$$

we finally find the condition :

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-m+1,1} & \dots & a_{n-m+1,n+1} \\ \xi_{11} & \dots & \xi_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{m,1} & \dots & \xi_{m,n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-m+1,1} & \dots & a_{n-m+1,n+1} & \rho_{n-m+1} \\ \xi_{11} & \dots & \xi_{1,n+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{m,1} & \dots & \xi_{m,n+1} & 0 \\ \rho_1 & \dots & \rho_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

This condition can be satisfied by equating the first or the second factor to zero. We remember however, that the space of centres does not lie in the quadric unless all the centres be lying in it, and that therefore the condition must be satisfied for all possible values of the  $\xi$ 's. For this it is necessary, that the matrix obtained from one of the determi-



nants by omitting the rows containing the  $\xi$ 's be zero. Applying this to the last factor we find, combined with (11):

$$D_{(n-m+s)} = 0,$$

being the condition of the paraboloidal cylinder of the  $m^{\text{th}}$  order.

The first factor gives the condition:

$$\Delta_{(n-m+1)} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

This is the case provisionally excluded in § 13.

17. I now proceed to investigate the case  $\Delta_{(n-m+1)} = 0$ .

We easily show, that the equations (12) in this case cannot be satisfied by other values of  $\lambda$  than  $\lambda = 0$ . Substituting this value in (12) and (13) we find

$$\sum a_{pt} x_t = 0 \quad (p = 1 \dots n + 1), \dots (18)$$

$m + 1$  of which equations are depending on the other  $n - m$  equations, that determine the space of centres (of  $m$  dimensions), not lying at infinity.

By a reasoning analogous to that of §§ 11 and 14 we deduce from (18) that the whole line joining any centre to any other (real or imaginary) point of the quadric is lying in the quadric, which therefore is a locus of linear spaces of  $m + 1$  dimensions all containing the space of centres. I shall therefore call it a *cone of the  $m + 1^{\text{st}}$  order*. The space of centres is *vertex space* of the cone.

This reasoning evidently does not hold when the quadric with exception of the space of centres does not contain any real or imaginary point at all. This only occurs if the quadric degenerate into two coincident linear spaces of  $n - 1$  dimensions.

18. The cone of the  $m + 1^{\text{st}}$  order can also be considered to be a locus of linear spaces of  $m$  dimensions all parallel to the space of centres and is therefore a special case of the cylinder of the  $m^{\text{th}}$  order. Thus considered the space at infinity of the space of centres is the vertex space of the cylinder.

19. In the case

$$\Delta_{(3)} = 0, \dots \dots \dots (19)$$

the quadric is a cone of the  $n - 1^{\text{st}}$  order. The same condition

however indicates that the quadratic equation can be dissolved into two equations of the first degree. Hence the cone of the  $n - 1^{\text{st}}$  order degenerates into two linear spaces of  $n - 1$  dimensions. The space of intersection of these spaces is the vertex space.

The quadric degenerates also in all those cases that imply the condition  $\Delta_{(3)} = 0$ , such as  $M_{(3)} = 0$ ,  $D_{(3)} = 0$  etc. (§ 20, table).

### Summary of the classification of quadrics according to the properties of the centres.

20. The following table contains the different cases hitherto distinguished. I shall denote each case by a number  $\leq n$  placed between square brackets indicating the number of dimensions of the space of centres. To this number can be added the letter P (= paraboloidic) to indicate that the space of centres is lying at infinity, the letter C (= conic) to indicate that the space of centres is lying in the quadric without lying at infinity.

The supposition  $D_{(3)} = 0$  would lead to  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = 0$  and is therefore impossible. Hence the case  $[n - 1, P]$  is the last paraboloidic case.

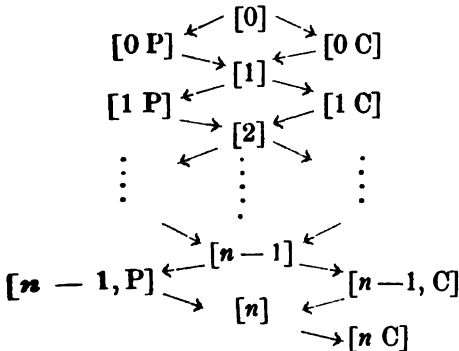
Condition.	Nature of the quadric.	
	[0]	(General case.)
$D = 0$	[0 P]	(Paraboloid.)
$\Delta = 0$	[0 C]	(Cone of the first order.)
$M = 0$	[1]	(Cylinder of the first order.)
$D_{(n+1)} = 0$	[1 P]	(Paraboloidical cylinder of the 1 <sup>st</sup> order.)
$\Delta_{(n)} = 0$	[1 C]	(Cone of the 2 <sup>nd</sup> order.)
$M_{(n)} = 0$	[2]	(Cylinder of the 2 <sup>nd</sup> order.)
etc.	etc.	
$M_{(n-m+3)} = 0$	[m]	(Cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
$D_{(n-m+3)} = 0$	[m P]	(Paraboloidical cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
$\Delta_{(n-m+1)} = 0$	[m C]	(Cone of the $m + 1^{\text{st}}$ order.)
etc.	etc.	

Condition.	Nature of the quadric.
$\Delta_n = 0$	$[n - 2, C]$ (Two intersecting spaces of $n - 1$ dimensions.)
$M_n = 0$	$[n - 1]$ (Two parallel spaces of $n - 1$ dimensions.)
$D_n = 0$	$[n - 1, P]$ (The space at infinity and another space of $n - 1$ dimensions.)
$\Delta_n = 0$	$[n - 1, C]$ (Two coinciding spaces of $n - 1$ dimensions.)
$M_n = 0$	$[n]$ (Twice the space at infinity.)
$D_n = 0$	$[n P]$ (Impossible.)
$\Delta_n = 0$	$[n C]$ (Indeterminate.)

21. As to the mutual connection between these cases it should be observed, that the case  $M = 0$  is a particular case as well of  $D = 0$  as of  $\Delta = 0$ , and that conversely the coincidence of both conditions last mentioned is sufficient to conclude to  $M = 0$  (§ 11).

The same connection exists between the cases  $M_{(n-m+1)} = 0$ ,  $D_{(n-m+1)} = 0$  and  $\Delta_{(n-m+1)} = 0$ .

The following scheme therefore indicates the connection between the different cases:



#### Polar cells.

22. *Polar cell* of a quadric in  $n$ -dimensional space is called every set of  $n + 1$  linear spaces of  $n - 1$  dimensions, of which

each one is the polar space to the point of intersection of all the remaining.

I provisionally limit myself in the following considerations to quadrics with a definite centre.

Let the  $n + 1$  spaces of a polar cell be represented by the equations

$$z_p = \sum_q \xi_{pq} x_q = 0 \quad (p = 1 \dots n + 1) \dots (20)$$

The condition has to be satisfied that the pole of any one of them lie on all the remaining. Hence, if  $r$  and  $s$  be two different values of  $p$  (§ 4):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, n+1} & \xi_{r, 1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1, 1} & \dots & a_{n+1, n+1} & \xi_{r, n+1} \\ \xi_{s, 1} & \dots & \xi_{s, n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0, \dots (21)$$

being  $\frac{1}{2} n (n + 1)$  equations.

We see that the first equation of (20) generally may be chosen completely arbitrarily, that the coefficients of the second have to satisfy one condition, those of the third two conditions, etc., and that finally the last equation is determined.

23. We now proceed to express the first member of the equation of the quadric,

$$F = \sum \sum a_{pq} x_p x_q, \dots (22)$$

in the first members of the equations (20),

$$z_p = \sum_q \xi_{pq} x_q \quad (p = 1 \dots n + 1). \dots (23)$$

For this purpose the co-ordinates  $x_1 \dots x_{n+1}$  have to be eliminated between the equations (22) and (23).

To perform this elimination we introduce  $n + 1$  auxiliary quantities  $u_1 \dots u_{n+1}$  defined by the equations

$$\sum_q a_{pq} x_q + \sum_q \xi_{qp} u_q = 0 \quad (p = 1 \dots n + 1). \dots (24)$$

Multiplying these equations successively with  $x_1 \dots x_{n+1}$  and adding we get:

$$\sum \sum a_{pq} x_p x_q + \sum_i \{u_i \sum_p \xi_{ip} x_p\} = 0,$$

or, in consequence of (22) and (23):

$$F + \sum u_i z_i = 0. \dots \dots \dots (25)$$

We now eliminate the  $2n + 2$  quantities  $x_1 \dots x_{n+1}$ ,  $u_1 \dots u_{n+1}$  between the  $2n + 3$  equations (23), (24) and (25) all of the first degree with respect to the quantities to be eliminated. We find:

$$\begin{vmatrix} -F & 0 \dots \dots \dots 0 & z_1 \dots \dots \dots z_{n+1} \\ 0 & a_{11} \dots \dots \dots a_{1, n+1} & \xi_{11} \dots \dots \dots \xi_{1, n+1, 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n+1, 1} \dots \dots \dots a_{n+1, n+1} & \xi_{1, n+1} \dots \dots \dots \xi_{n+1, n+1} \\ z_1 & \xi_{11} \dots \dots \dots \xi_{1, n+1} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n+1} & \xi_{n+1, 1} \dots \dots \dots \xi_{n+1, n+1} & 0 \dots \dots \dots 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

This equation determines  $F$  as a quadratic function of  $z_1 \dots z_{n+1}$ . We may easily show by means of the equations (21), that all the coefficients of the products of two different  $z$ 's are zero. Hence the quadratic function  $F$  is reduced to a sum of squares

$$F = \sum c_p z_p^2 \dots \dots \dots (27)$$

The values of the coefficients  $c_p$  can be found by reducing the equation (26). They are found in a more simple way by the following reasoning.

If in (27) we make zero all the  $z$ 's except one,  $z_r$ , we get

$$F = c_r z_r^2.$$

Hence  $c_r$  is the value of  $\frac{F}{z_r^2}$  for that point of space in which all the remaining  $z$ 's are zero. This point is the pole of the space  $z_r = 0$ .

It immediately appears from this, that  $c_r$  is completely determined by  $F$  and  $z_r$ , independent of the other  $z$ 's and that therefore  $c_r$  contains no other  $\xi$ 's than those which belong to the space  $z_r = 0$ .

Denoting by accents the quantities relating to the pole of the space  $z_r = 0$ , we have (§ 4):

$$\sum_p a_{pq} x_q' + \xi_{rp} \lambda = 0 \quad (p = 1 \dots n + 1). \dots (28)$$

We further have identically:

$$\sum_q \xi_{rq} x_q' = z_r'. \dots (29)$$

Multiplying the equations (28) successively with  $x_1' \dots x_{n+1}'$  and adding we find

$$\sum_p \sum_q a_{pq} x_p' x_q' + \sum_p \xi_{rp} x_p' \cdot \lambda = 0$$

or

$$F' + z_r' \lambda = 0. \dots (30)$$

Eliminating  $x_1' \dots x_{n+1}'$  and  $\lambda$  between (28), (29) and (30) we get:

$$\begin{vmatrix} -F & 0 & \dots & 0 & z_r' \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \xi_{r,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & \xi_{r,n+1} \\ z_r' & \xi_{r,1} & \dots & \xi_{r,n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0. (31)$$

If now we put

$$E_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & \xi_{r,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & \xi_{r,n+1} \\ \xi_{r,1} & \dots & \xi_{r,n+1} & 0 \end{vmatrix}, \dots (32)$$

equation (31) may be written

$$F'E_r + z_r'^2 \Delta = 0,$$

and therefore

$$c_p = - \frac{\Delta}{E_r} \dots (33)$$

Hence equation (26) or (27) may be written :

$$F = \sum - \frac{\Delta}{E_r} z_r^2. \dots \dots \dots (34)$$

24. Conversely it may be shown, that, if the equation of a quadric be thrown into the form

$$F = \sum c_p z_p^2 = 0, \dots \dots \dots (35)$$

in which  $z_1 \dots z_{n+1}$  denote independent homogeneous functions of the first degree of the co-ordinates,  $c_1 \dots c_{n+1}$  arbitrary constants, the spaces

$$z_p = 0 \quad (p = 1 \dots n+1) \dots \dots \dots (36)$$

form a polar cell of the quadric.

We therefore select one of the spaces (36),  $z_r = 0$ , and indicate by an accent all the quantities relating to the point of intersection of the  $n$  remaining spaces.

The polar space of this point of intersection is given by the formula (8) (§ 3), which may easily be reduced to the form

$$\sum c_p z_p z_p' = 0.$$

In this equation the quantities  $z_p'$  are all zero,  $z_r'$  only excepted. The equation of the polar space is therefore

$$c_r z_r z_r' = 0,$$

or,  $z_r'$  being different from zero :

$$z_r = 0.$$

Hence each one of the spaces  $z_p = 0$  is the polar space to the point of intersection of the remaining spaces.

25. Being given a homogeneous quadratic equation  $F$  and a homogeneous function of the first degree  $z_r$ , the formula (38) indicates by which coefficient  $c_r$  the square  $z_r^2$  has to be multiplied in order that  $c_r z_r^2$  may be one of the terms of  $F$  reduced to a sum of squares. This is only possible with a definite coefficient  $c_r$  whatever may be the further reduction to squares.

In one case only the formula is insufficient: in the case

$\Delta = E_r = 0$ ; or geometrically: if the quadric  $F = 0$  be a cone the vertex of which is lying in the space  $z_r = 0$ .

In one case the function  $z_r$  cannot be used: in the case  $E_r = 0$ ,  $\Delta \geq 0$ . In this case we find  $c_r = \infty$  and at least one of the other coefficients  $= \infty$ , the sum of squares is then indeterminate. The geometrical interpretation of this case is that the space  $z_r = 0$  is a tangent space of the quadric.

26. If all the signs of the coefficients of  $F$  be changed, it appears from (33) that the sign of  $c_r$  is also changed. Multiplication however of  $z_r = 0$  with any positive or negative quantity is without any influence whatever on the sign of  $c_r$ . Arbitrary change of the succession of the indices  $1 \dots n + 1$  is also without influence on the sign of  $c_r$ .

#### Classification of quadrics with a definite centre according to the properties of the conjugate diameters.

27. We now select a polar cell of the quadric, one of the spaces of which is the space at infinity.

We see that for the space at infinity the determinant  $E_p$  (32) is equal to  $D$ , and that therefore the equation of the quadric must be reduced to the form

$$F = \sum_1^n c_p z_p^2 - \frac{\Delta}{D} \{ \sum_p x_p \}^2 = 0, \dots (37)$$

a reduction which is always possible except when we have  $D = 0$  (§ 25). In the case  $D = 0$  (paraboloid) the reduction is impossible with finite coefficients, the case  $\Delta = D = 0$  (cylinder) being excluded.

28. If the functions  $z_1 \dots z_n$  be all made  $= 0$  except one,  $z_r$ , we obtain  $n - 1$  equations which represent a line passing through the centre and (at infinity) through the pole of the space  $z_r = 0$ .

Taking thus for the  $z$  which is not made equal to zero successively each one of the functions  $z_1 \dots z_n$ , we obtain  $n$  lines passing through the centre, which will be called a set of *conjugate diameters* of the quadric.



For determining the points of intersection of one of them with the quadric, we have the equations

$$c_r x_r^2 - \frac{\Delta}{D} \{\sum_p x_p\}^2 = 0$$

and

$$x_p = 0 \dots \begin{cases} p = 1 \dots r-1, \\ p = r+1 \dots n. \end{cases}$$

These equations evidently are satisfied by the co-ordinates of two *real* points when  $c_r$  and  $-\frac{\Delta}{D}$  have different signs and by those of two *imaginary* points when the signs of  $c_r$  and of  $-\frac{\Delta}{D}$  are the same.

Hence, when  $\Delta$  is different from zero, there are as many conjugate diameters intersecting the quadric in real points as there are quantities among  $c_1 \dots c_n$  which have the opposite sign of that of  $-\frac{\Delta}{D}$ .

29. I now make use of the following well known theorems concerning the reduction of a quadratic function to a sum of squares :

1°. The number of positive and of negative terms is for every quadratic function completely determined (law of inertia);

2°. The number of negative terms is equal to the number of variations of sign in the series

$$\Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2;$$

$$\dots \Delta_{n+1} = \Delta;$$

in which the indices  $1 \dots n+1$  are so chosen (which is always possible) that no two successive terms are zero at the same time;

3°. The reduction to  $n - m + 1$  squares is possible if  $\Delta_{(n-m+1)} = 0$ .

As we have supposed that there is a single centre, it appears

from the third theorem that there are at least  $n$  terms. This occurs in the special case  $\Delta = 0$  (cone of the first order).

30. It follows from the first theorem above mentioned in connection with §§ 26 and 28, that every set of conjugate diameters of a quadric not belonging to the case [1 C] or [1 P] does always contain the same number of diameters intersecting the quadric in real points. I shall call this number the *species* of the quadric. To indicate the species we adjoin this number to the mark [0] (§ 20); thus  $[0]_0, [0]_1, \dots, [0]_n$ .

To determine the species we have to know the number of variations  $v$  in the series  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta$  and the sign of  $D$ . The sign of  $\Delta$  is determined by  $v$  (+ when  $v$  is an even, — when it is an odd number). The rule given in § 28 then indicates the species.

We thus find the following four cases:

- 1°. When  $v$  is an even number and  $D$  positive, species  $n + 1 - v$ ;
- 2°. When  $v$  is an even number and  $D$  negative, species  $v$ ;
- 3°. When  $v$  is an odd number and  $D$  positive, species  $v$ ;
- 4°. When  $v$  is an odd number and  $D$  negative, species  $n + 1 - v$ .

31. If in equation (37) we put

$$\sum p_p x_p = 0,$$

i. e. if we seek the space of intersection of the quadric with the space at infinity, we find

$$\sum_1^n c_p z_p^2 = 0.$$

This equation cannot be satisfied by any real point when the quantities  $c_p$  have all the same sign. In the opposite case there are always real points satisfying the equation.

Every quadric that does not have any real point at infinity, will be called an *ellipsoid*, every other quadric belonging to  $[0]$  a *hyperboloid*.

There are two species of ellipsoids. In the first place the quantities  $c_p$  can have all the same sign as  $-\frac{\Delta}{D}$ ; in this case the quadric does not contain any real point at all ( $[0]_0 = ima-$

*inary ellipsoid*). In the second place the quantities  $c_p$  can have all the opposite sign ( $[0]_n = \text{real ellipsoid}$ ).

The hyperboloids are  $[0]_1 \dots [0]_{n-1}$ .

32. In the case  $v=0$  all the squares (and therefore also  $-\frac{\Delta}{D}$ ) are positive. The sign of  $\Delta$  is  $+$ . Hence  $D$  must be negative.

In the case  $v=n+1$  we find that  $\Delta$  and  $D$  have the same sign ( $+$  if  $n$  have an odd,  $-$  if  $n$  have an even value).

In both cases the quadric is an imaginary ellipsoid.

33. I now proceed to class the different species of ellipsoids and hyperboloids in such a manner that by continuous variation of the coefficients  $a_{11}, a_{12}$  etc. and thus by continuous deformation of the quadric they may change into one another.

It is obvious, that we can pass in such way from any quadratic function  $F$  to any other and thus as extreme cases from a quadratic function for which  $v=0$  to another for which  $v=n+1$ . By this variation it may always be avoided (as a particular case of the second order) that the determinants  $\Delta$  and  $D$  become zero at the same time. We may therefore provisionally exclude the quadrics with a space of centres.

The quantities  $c_1 \dots c_n$  obviously vary continuously simultaneously with the coefficients  $a_{11}, a_{12}$  etc. Hence a change of species can take place only by  $\Delta$  or  $D$  becoming zero. These two cases of transition have to be investigated separately.

1°.  $\Delta=0, [0\ C]$ .

By this transition the coefficient  $-\frac{\Delta}{D}$  changes sign, the signs of the quantities  $c_p$  remaining unaltered. For, if one of these quantities was to become zero at the same time, we should have in consequence of § 29, 3°  $\Delta_{(n)}=0$  and therefore also  $D=0$ .

Hence those quantities  $c_p$  which had the same sign as  $-\frac{\Delta}{D}$  before the transition, will have opposite sign thereafter, and conversely.

If therefore  $\mu$  and  $\nu$  indicate the species before and after the transition, we have

$$\mu + \nu = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

2°.  $D = 0$ ,  $[0 P]$ .

By this transition we have  $-\frac{\Delta}{D} = \infty$ . Hence on the moment of transition the form (37) cannot be used. Immediately before it and thereafter however the quantity  $-\frac{\Delta}{D}$  has opposite signs. Yet the whole number of positive and negative signs cannot have been altered,  $\Delta$  having remained different from zero.

Hence the numbers  $\mu$  and  $\nu$  satisfy the condition

$$\mu + \nu = n + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

34. By the rules hitherto given all possible changes of species of quadrics with definite centre are completely determined.

The following tables contain all these transitions from the case in which all the squares are positive to that in which they are all negative for a space of an even and of an odd number of dimensions.

The different paraboloidic and conic cases are distinguished by adding to the mark  $[0 P]$  or  $[0 C]$  two indices, indicating the species of the hyperboloids (ellipsoids) changing into one another in each case. These numbers indicate at the same time the number of squares of different sign to which the function  $F$  can be reduced in each case.

The sum of the two indices of  $[0 C]$  must be  $n$  in consequence of (38) or § 29, 3°, that of the two indices of  $[0 P]$  must be  $n + 1$  in consequence of (39).

All possible cases are found twice in both tables. This is obvious, if we remember that by multiplication of the equation with a negative quantity all the squares change sign. The second part of each table will be therefore, as to the nature of the quadrics, identical with the first part taken in opposite order. Only one term, the middle term, will be found but once in each table.

It may be further noticed, that the cone  $[0 C]_0, \dots$ , the case

of transition between both species of ellipsoids, contains no real points but the centre (vertex). We shall call therefore this case the *insulated point*.

35. Table of quadrics with a definite centre in a space of an *even* number of dimensions  $n$ .

$v$	Sign of $\Delta$	Sign of $D$	Nature of the quadric.
0	+	—	$[0]_0$ (Imaginary ellipsoid.)
	0	—	$[0\ C]_{0,n}$ (Insulated point.)
1	—	—	$[0]_n$ (Real ellipsoid.)
1	—	0	$[0\ P]_{n,1}$ (Paraboloid.)
1	—	+	$[0]_1$ (Hyperboloid.)
	0	+	$[0\ C]_{1, n-1}$ (Cone of the first order.)
2	+	+	$[0]_{n-1}$ (Hyperboloid.)
etc.	etc.	etc.	etc.
$\frac{1}{2}n$	$\pm$	$\pm$	$[0]_{\frac{1}{2}n+1}$ (Hyperboloid.)
$\frac{1}{2}n$	$\pm$	0	$[0\ P]_{\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n}$ (Paraboloid.)
$\frac{1}{2}n$	$\pm$	$\mp$	$[0]_{\frac{1}{2}n}$ (Hyperboloid.)
	0	$\mp$	$[0\ C]_{\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n}$ (Cone of the first order.)
$\frac{1}{2}n + 1$	$\mp$	$\mp$	$[0]_{\frac{1}{2}n}$ (Hyperboloid.)
$\frac{1}{2}n + 1$	$\mp$	0	$[0\ P]_{\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n+1}$ (Paraboloid.)
$\frac{1}{2}n + 1$	$\mp$	$\pm$	$[0]_{\frac{1}{2}n+1}$ (Hyperboloid.)
etc.	etc.	etc.	etc.
$n$	+	+	$[0]_1$ (Hyperboloid.)
$n$	+	0	$[0\ P]_{1,n}$ (Paraboloid.)
$n$	+	—	$[0]_n$ (Real ellipsoid.)
	0	—	$[0\ C]_{n,0}$ (Insulated point.)
$n + 1$	—	—	$[0]_0$ (Imaginary ellipsoid.)

36. Table of quadrics with a definite centre in a space of an *odd* number of dimensions  $n$ .

$v$	Sign of $\Delta$	Sign of $D$	Nature of the quadric.	
0	+	—	$[0]_0$	(Imaginary ellipsoid.)
	0	—	$[0 C]_{0,n}$	(Insulated point.)
1	—	—	$[0]_n$	(Real ellipsoid.)
1	—	0	$[0 P]_{n,1}$	(Paraboloid.)
1	—	+	$[0]_1$	(Hyperboloid.)
	0	+	$[0 C]_{1,n-1}$	(Cone of the first order.)
2	+	+	$[0]_{n-1}$	(Hyperboloid.)
etc.	etc.	etc.	etc.	
$\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$	$\pm$	$\mp$	$[0]_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}$	(Hyperboloid.)
	0	$\mp$	$[0 C]_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$	(Cone of the first order.)
$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$	$\mp$	$\mp$	$[0]_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$	(Hyperboloid.)
$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$	$\mp$	0	$[0 P]_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$	(Paraboloid.)
$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$	$\mp$	$\pm$	$[0]_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}$	(Hyperboloid.)
	0	$\pm$	$[0 C]_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}$	(Cone of the first order.)
$\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$	$\pm$	$\pm$	$[0]_{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}$	(Hyperboloid.)
etc.	etc.	etc.	etc.	
$n$	—	—	$[0]_1$	(Hyperboloid.)
$n$	—	0	$[0 P]_{1,n}$	(Paraboloid.)
$n$	—	+	$[0]_n$	(Real ellipsoid.)
	0	+	$[0 C]_{n,0}$	(Insulated point.)
$n + 1$	+	+	$[0]_0$	(Imaginary ellipsoid.)

37. Comparing the two preceding tables we observe the following differences:

1°. as to the signs of  $\Delta$  and  $D$ :

In a space of an even number of dimensions the sign of  $D$  is completely determined by the nature of the quadric; the sign of  $\Delta$  can be made as well + as — for every quadric. Conversely in a space of an odd number of dimensions the sign of  $\Delta$  is determined by the nature of the quadric, that of  $D$  can be taken arbitrarily + or — for every quadric.

2°. as to the middle term:

In the case of  $n$  even the middle term is a cone, in the other case it is a paraboloid. Hence in a space of an even number of dimensions there is always one — and only one —

kind of cone of the first order that can change by continuous deformation in only one species of hyperboloid. All other cones of the first order and all paraboloids have to be considered as forms of transition between two different species of hyperboloids (ellipsoids). In a space of an odd number of dimensions there is always one — and only one — kind of paraboloid that can change by continuous deformation in only one species of hyperboloid (for  $n = 1$  exceptionally ellipsoid). All other paraboloids and all cones of the first order have to be considered as forms of transition between two different species of hyperboloids (ellipsoids).

Further classification of quadrics with  
a space of centres.

38. We now assume that there is a space of centres of  $m$  dimensions and thus investigate the case  $[m]$  with the particular cases  $[m C]$  and  $[m P]$ .

Suppose we have an arbitrary linear space of  $n - m$  dimensions not intersecting the vertex space (in the case  $[m C]$  the vertex space of the cone considered as a cylinder, § 18).

The intersection of the quadric with this space is a quadric in that space. This quadric contains one point of each of the parallel  $m$ -dimensional spaces that form the given quadric. The point of intersection with the space of centres is its centre.

The quadric of intersection belongs to the cases  $[0]$ ,  $[0 P]$  or  $[0 C]$  according as the given quadric belongs to  $[m]$ ,  $[m P]$  or  $[m C]$ .

The given quadric is the locus of the linear  $m$ -dimensional spaces brought through the vertex space and through a point of the quadric of intersection. It is therefore completely determined by the quadric of intersection and the vertex space.

39. Suppose we have two spaces of  $n - m$  dimensions not intersecting the vertex space, we obtain two quadrics of intersection.

These two quadrics are related to each other in such a manner that to every point of one of them corresponds a point of the other lying with it and with the vertex space in one linear  $m$ -dimensional space. It may be easily shown that

the same relation exists between every polar cell of one of the two quadrics and a polar cell of the other and therefore that the species of both quadrics is the same. Hence this species may be considered to be a property of the given quadric.

The classification of the cylinders of the  $m^{\text{th}}$  order therefore completely agrees with that of quadrics with a definite centre in a space of  $n - m$  dimensions.

I therefore shall add to the symbols  $[m]$ ,  $[m P]$  or  $[m C]$  the same index (or indices) that should have to be added to the symbols  $[0]$ ,  $[0 P]$  or  $[0 C]$  to indicate the quadric of intersection.

40. We can choose as our space of  $n - m$  dimensions, which serves to determine the species, the space of intersection of  $m$  spaces of co-ordinates.

$$x_{n-m+2} = x_{n-m+3} = \dots = x_{n+1} = 0.$$

The equation of the quadric of intersection then becomes:

$$\sum_1^{n-m+1} \sum_1^{n-m+1} a_{pq} x_p x_q = 0.$$

The space at infinity of the  $n - m$  dimensional space considered is represented by the equation

$$\sum_1^{n-m+1} \rho_p x_p = 0.$$

If the chosen space of  $n - m$  dimensions intersect the vertex space, the following relation will be satisfied:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1, n-m+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-m+1, 1} & \dots & a_{n-m+1, n-m+1} & \rho_{n-m+1} \end{array} \right\| = 0$$

In this case it is necessary to choose another set of spaces of co-ordinates. It is always possible to choose from the spaces of co-ordinates a set of  $m$  spaces that can be used.

41. We now assume that the chosen  $n - m$ -dimensional space satisfies the condition.

To determine the species of the quadric of intersection we apply the method described for quadrics with definite centre.



The series  $\Delta_0 \Delta_1 \dots \Delta$  (§ 29, 2<sup>o</sup>) is then reduced to  $\Delta_0 \Delta_1 \dots \Delta_{n-m+1}$ ; the determinant  $D$  is replaced by

$$D_{n-m+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-m+1} & \rho_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-m+1,1} & \dots & a_{n-m+1,n-m+1} & \rho_{n-m+1} \\ \rho_1 & \dots & \rho_{n-m+1} & 0 \end{vmatrix}$$

We further replace  $n$  by  $n - m$  and thus apply the table of § 35 when  $n - m$  is an even, that of § 36 when it is an odd number.

When the quadric of intersection is found to be an imaginary ellipsoid, the given quadric is an insulated space of  $m - 1$  dimensions at infinity (the vertex space), when it is an insulated point the given quadric is an insulated space of  $m$  dimensions, etc.

#### 42. Table of quadrics with a central space of $m$ dimensions.

$v$	Sign of $\Delta_{n-m+1}$	Sign of $D_{n-m+1}$	Nature of the quadric.	
0	+	—	$[m]_0$	(Insulated space of $m - 1$ dimensions at infinity.)
1	0	—	$[m C]_{0,n-m}$	(Insulated space of $m$ dimensions.)
1	—	—	$[m]_{n-m}$	(Ellipsoidal cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
1	—	0	$[m P]_{n-m,1}$	(Paraboloidal cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
1	—	+	$[m]_1$	(Hyperboloidal cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
2	0	+	$[m C]_{1,n-m-1}$	(Cone of the $m + 1^{\text{st}}$ order.)
2	+	+	$[m]_{n-m-1}$	(Hyperboloidal cylinder of the $m^{\text{th}}$ order.)
etc.	etc.	etc.	etc.	

In the middle and at the end of this table we find for even and odd values of  $n - m$  similar differences as between the tables of §§ 35 and 36.

Application on the cases  $n=3$  and  $n=4$ .

43.  $n=3$ .

I.  $m=0$ .

[0]

[0 P]  $D=0$ ;

[0 C]  $\Delta=0$ .

$v$	Sign of $\Delta$	Sign of $D$	Nature of the quadric.
0	+	—	[0] <sub>0</sub> (Imaginary ellipsoid.)
	0	—	[0 C] <sub>03</sub> (Insulated point.)
1	—	—	[0] <sub>3</sub> (Real ellipsoid.)
1	—	0	[0 P] <sub>31</sub> (Elliptic paraboloid.)
1	—	+	[0] <sub>1</sub> (Hyperboloid of two sheets.)
	0	+	[0 C] <sub>12</sub> (Cone.)
2	+	+	[0] <sub>2</sub> (Hyperboloid of one sheet.)
2	+	0	[0 P] <sub>22</sub> (Hyperbolic paraboloid.)
2	+	—	[0] <sub>2</sub> (Hyperboloid of one sheet.)
	0	—	[0 C] <sub>21</sub> (Cone.)
3	—	—	[0] <sub>1</sub> (Hyperboloid of two sheets.)
3	—	0	[0 P] <sub>13</sub> (Elliptic paraboloid.)
3	—	+	[0] <sub>3</sub> (Real ellipsoid.)
	0	+	[0 C] <sub>30</sub> (Insulated point.)
4	+	+	[0] <sub>0</sub> (Imaginary ellipsoid.)

II.  $m=1$ .

[1]  $M=0$ ;

[1 P]  $D_{(4)}=0$ ;

[1 C]  $\Delta_{(3)}=0$ .

$v$	Sign of $\Delta_3$	Sign of $D_3$	Nature of the quadric.
0	+	—	[1] <sub>0</sub> (Insulated point at infinity.)
	0	—	[1 C] <sub>02</sub> (Insulated line.)
1	—	—	[1] <sub>2</sub> (Elliptic cylinder.)
1	—	0	[1 P] <sub>21</sub> (Parabolic cylinder.)
1	—	+	[1] <sub>1</sub> (Hyperbolic cylinder.)
	0	+	[1 C] <sub>11</sub> (Two intersecting planes.)
2	+	+	[1] <sub>1</sub> (Hyperbolic cylinder.)
2	+	0	[1 P] <sub>12</sub> (Parabolic cylinder.)
2	+	—	[1] <sub>2</sub> (Elliptic cylinder.)
	0	—	[1 C] <sub>20</sub> (Insulated line.)
3	—	—	[1] <sub>0</sub> (Insulated point at infinity.)

III.  $m = 2$ .

[2]  $M_{(3)} = 0$ ;

[2 P]  $D_{(3)} = 0$ ;

[2 C]  $\Delta_{(3)} = 0$ .

	Sign of $\Delta_2$	Sign of $D_2$	Nature of the quadric.
0	+	—	$[2]_0$ (Insulated line at infinity.)
	0	—	$[2 C]_{04}$ (Two coinciding planes.)
1	—	—	$[2]_1$ (Two parallel planes.)
1	—	0	$[2 P]_{11}$ (The plane at infinity and another plane.)
1	—	+	$[2]_1$ (Two parallel planes.)
	0	+	$[2 C]_{10}$ (Two coinciding planes.)
2	+	+	$[2]_0$ (Insulated line at infinity.)

IV.  $m = 3$ .

[3]  $M_{(3)} = 0$ ;

[3 C]  $\Delta_{(1)} = 0$ .

	Sign of $\Delta_1$	Sign of $D_1$	Nature of the quadric.
0	+	—	$[3]_0$ (Twice the plane at infinity.)
	0	—	$[3 C]_{00}$ (Indeterminate.)
1	—	—	$[3]_0$ (Twice the plane at infinity.)

44.  $m = 4$ .I.  $m = 0$ .

[0]

[0 P]  $D = 0$ ;

[0 C]  $\Delta = 0$ .

	Sign of $\Delta$	Sign of $D$	Nature of the quadric.
0	+	—	$[0]_0$ (Imaginary ellipsoid.)
	0	—	$[0 C]_{04}$ (Insulated point.)
1	—	—	$[0]_4$ (Real ellipsoid.)
1	—	0	$[0 P]_{41}$ (Paraboloid.)
1	—	+	$[0]_1$ (Hyperboloid.)
	0	+	$[0 C]_{13}$ (Cone of the first order.)
2	+	+	$[0]_3$ (Hyperboloid.)
2	+	0	$[0 P]_{32}$ (Paraboloid.)
2	+	—	$[0]_2$ (Hyperboloid.)
	0	—	$[0 C]_{22}$ (Cone of the first order.)

$v$	Sign of $\Delta$	Sign of $D$	Nature of the quadric.
3	—	—	$[0]_2$ (Hyperboloid.)
3	—	0	$[0 P]_{23}$ (Paraboloid.)
3	—	+	$[0]_3$ (Hyperboloid.)
	0	+	$[0 C]_{31}$ (Cone of the first order.)
4	+	+	$[0]_1$ (Hyperboloid.)
4	+	0	$[0 P]_{14}$ (Paraboloid.)
4	+	—	$[0]_4$ (Real ellipsoid.)
	0	—	$[0 C]_{40}$ (Insulated point.)
5	—	—	$[0]_0$ (Imaginary ellipsoid.)

II.  $m = 1$ .

$$[1] \quad M = 0;$$

$$[1 P] \quad D_{(5)} = 0;$$

$$[1 C] \quad \Delta_{(4)} = 0.$$

$v$	Sign of $\Delta_4$	Sign of $D_4$	Nature of the quadric.
0	+	—	$[1]_0$ (Insulated point at infinity.)
	0	—	$[1 C]_{03}$ (Insulated line.)
1	—	—	$[1]_3$ (Ellipsoidal cylinder.)
1	—	0	$[1 P]_{31}$ (Elliptic-paraboloidal cylinder.)
1	—	+	$[1]_1$ (Two-sheeted-hyperboloidal cylinder.)
	0	+	$[1 C]_{12}$ (Cone of the second order.)
2	+	+	$[1]_2$ (One-sheeted-hyperboloidal cylinder.)
2	+	0	$[1 P]_{22}$ (Hyperbolic-paraboloidal cylinder.)
2	+	—	$[1]_2$ (One-sheeted-hyperboloidal cylinder.)
	0	—	$[1 C]_{21}$ (Cone of the second order.)
3	—	—	$[1]_1$ (Two-sheeted-hyperboloidal cylinder.)
3	—	0	$[1 P]_{13}$ (Elliptic-paraboloidal cylinder.)
3	—	+	$[1]_3$ Ellipsoidal cylinder.)
	0	+	$[1 C]_{30}$ (Insulated line.)
4	+	+	$[1]_0$ (Insulated point at infinity.)

III.  $m = 2$ .

[2]  $M_{(4)} = 0$ ;

[2 P]  $D_{(4)} = 0$ ;

[2 C]  $\Delta_{(3)} = 0$ .

$v$	Sign of $\Delta_3$	Sign of $D_3$	Nature of the quadric.
0	+	-	[2] <sub>0</sub> (Insulated line at infinity.)
	0	-	[2 C] <sub>02</sub> (Insulated plane.)
1	-	-	[2] <sub>2</sub> (Elliptic cylinder of the second order.)
1	-	0	[2 P] <sub>21</sub> (Parabolic cylinder of the second order.)
1	-	+	[2] <sub>1</sub> (Hyperbolic cylinder of the second order.)
	0	+	[2 C] <sub>11</sub> (Two intersecting spaces.)
2	+	+	[2] <sub>1</sub> (Hyperbolic cylinder of the second order.)
2	+	0	[2 P] <sub>12</sub> (Parabolic cylinder of the second order.)
2	+	-	[2] <sub>2</sub> (Elliptic cylinder of the second order.)
	0	-	[2 C] <sub>20</sub> (Insulated plane.)
3	-	-	[2] <sub>0</sub> (Insulated line at infinity.)

IV.  $m = 3$ .

[3]  $M_{(3)} = 0$ ;

[3 P]  $D_{(3)} = 0$ ;

[3 C]  $\Delta_{(2)} = 0$ .

$v$	Sign of $\Delta_2$	Sign of $D_2$	Nature of the quadric.
0	+	-	[3] <sub>0</sub> (Insulated plane at infinity.)
	0	-	[3 C] <sub>01</sub> (Two coinciding spaces.)
1	-	-	[3] <sub>1</sub> (Two parallel spaces.)
1	-	0	[3 P] <sub>11</sub> (The space at infinity and another space.)
1	-	+	[3] <sub>1</sub> (Two parallel spaces.)
	0	+	[3 C] <sub>10</sub> (Two coinciding spaces.)
2	+	+	[3] <sub>0</sub> (Insulated plane at infinity.)

V.  $m = 4$ .

[4]  $M_{(3)} = 0$ ;

[4 C]  $\Delta_{(1)} = 0$ .

$v$	Sign of $\Delta_1$	Sign of $D_1$	Nature of the quadric.
0	+	-	[4] <sub>0</sub> (Twice the space at infinity.)
	0	-	[4 C] <sub>00</sub> (Indeterminate.)
1	-	-	[4] <sub>0</sub> (Twice the space at infinity.)

## BARYCENTRE PODAIRE ET BARYCENTRE SYMÉTRIQUE

PAR

J. NEUBERG.

Soient données dans un plan  $n$  droites  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , affectées respectivement des poids  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . D'un point quelconque  $M$  du plan abaissons sur ces droites les perpendiculaires  $MM_1 = d_1, MM_2 = d_2, \dots, MM_n = d_n$ , et posons

$$\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2 + \dots + \lambda_n d_n^2 = u.$$

Si  $x, y$  sont les coordonnées rectangulaires de  $M$ , et  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  l'équation de  $D^1$ ), l'égalité précédente prend la forme

$$\Sigma \lambda (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 = u. \quad (1)$$

Le lieu des points  $M$  où  $u$  a une valeur donnée, est une ellipse, dont le centre, la direction et le rapport des axes ne changent pas avec  $u$ . Ce centre est le point pour lequel  $u$  présente un minimum; on l'appelle le *centre des moindres carrés* ou le *point de Gauss* des droites  $D$  pour les poids  $\lambda$ . Il a donné lieu récemment à quelques travaux intéressants<sup>2)</sup>.

Nous généraliserons la question en supposant les quantités  $\lambda$  positives ou négatives, et nous étudierons la conique (1), que nous convenons de représenter par la lettre  $\Gamma$ . Si cette courbe est une hyperbole ou une parabole,  $u$  n'admet plus ni maximum

<sup>1)</sup> Pour simplifier l'écriture, nous sous-entendons les indices 1, 2,  $\dots, n$  lorsque la clarté du discours n'en souffre pas.

<sup>2)</sup> Voir par exemple les *C. R. de l'Ac. de Paris*, 1876, 1<sup>er</sup> sem., p. 636 (Bertot); *J. de l'Éc. Polyt.*, LXIII<sup>e</sup> Cahier, p.p. 1 et 22 (d'Ooagne, Laisant); *Intermédiaire des Math.*, 1899, p.p. 20 et 22 (Espanet, Duporcq); *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, t. XXIII, p. 26 (Neuberg).

ni minimum. Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, le centre et les axes seront désignés par K, KX, KY.

1. Les coordonnées de K vérifient les équations

$$\sum \lambda (x \cos a + y \sin a - p) \cos a = 0,$$

$$\sum \lambda (x \cos a + y \sin a - p) \sin a = 0;$$

de celles-ci on tire

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sum \lambda p \cos a, & \sum \lambda \cos a \sin a \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sum \lambda p \sin a, & \sum \lambda \sin^2 a \end{array} \right|} : \frac{\left| \begin{array}{cc} \sum \lambda \cos^2 a & , \sum \lambda \sin a \cos a \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sum \lambda \sin a \cos a, & \sum \lambda \sin^2 a \end{array} \right|}.$$

Les deux déterminants proviennent de la multiplication du système

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 \cos a_1 & \lambda_2 \cos a_2 & \dots & \lambda_n \cos a_n \\ \lambda_1 \sin a_1 & \lambda_2 \sin a_2 & \dots & \lambda_n \sin a_n \end{array} \right\|$$

respectivement par les systèmes

$$\left\| \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \sin a_1 & \sin a_2 & \dots & \sin a_n \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \cos a_1 & \cos a_2 & \dots & \cos a_n \\ \sin a_1 & \sin a_2 & \dots & \sin a_n \end{array} \right\|,$$

de sorte que

$$x = \frac{\sum \left| \begin{array}{cc} \lambda_r \cos a_r, & \lambda_s \cos a_s \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} p_r & , & p_s \\ \sin a_r, & \sin a_s \end{array} \right|}{\sum \left| \begin{array}{cc} \lambda_r \cos a_r, & \lambda_s \cos a_s \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} \cos a_r, & \cos a_s \\ \sin a_r, & \sin a_s \end{array} \right|},$$

$rs$  étant une combinaison binaire quelconque des nombres 1, 2, . . . n.

Par suite, si  $x_{rs}$ ,  $y_{rs}$  représentent les coordonnées du point d'intersection  $D_{rs}$  des droites  $D_r$ ,  $D_s$ , on a.

$$x = \frac{\sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s) x_{rs}}{\sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s)}, \quad y = \frac{\sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s) y_{rs}}{\sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s)}. \quad (2)$$

Ainsi, le centre de  $\Gamma$  est le centre de gravité des points  $D_{rs}$  pour les masses  $\lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s)$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Nous employons l'expression de *centre de gravité* (barycentre) de masses positives ou négatives pour désigner le centre de forces parallèles et proportionnelles de ces masses, le sens de ces forces changeant avec le signe des masses.

Les formules (2), si  $n=3$  et  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , montrent que le point de Lemoine d'un triangle ABC a pour coordonnées barycentriques  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ .

Si les droites  $D_1, D_2, \dots, D_i$  ( $i < n$ ) étaient parallèles, on les remplacerait, dans les formules (2), par une parallèle à  $D_1$ , affectée du poids  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$  et passant par le barycentre des poids  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$  placés aux points de rencontre de  $D_1, D_2, \dots, D_i$ , avec une transversale quelconque.

2. Développons l'équation (1). En posant

$$\begin{aligned} A &= \sum \lambda \cos^2 a, & B &= \sum \lambda \cos a \sin a, & C &= \sum \lambda \sin^2 a, \\ D &= \sum \lambda p \cos a, & E &= \sum \lambda p \sin a, & F &= \sum \lambda p^2 - u, \end{aligned}$$

nous aurons

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Dx - 2Ey + F = 0 \quad . \quad (3)$$

Le binôme caractéristique est

$$AC - B^2 = \begin{vmatrix} \sum \lambda \cos^2 a & \sum \lambda \cos a \sin a \\ \sum \lambda \sin a \cos a & \sum \lambda \sin^2 a \end{vmatrix} = \sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s);$$

suivant qu'il est positif, négatif ou nul, la conique  $\Gamma$  est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Lorsque  $n=3$ , on peut considérer  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  comme les coordonnées barycentriques d'un point  $L$  par rapport au triangle  $D_1 D_2 D_3$ , et l'équation  $AC - B^2 = 0$  représente la circonférence circonscrite à ce triangle. Donc, si  $L$  est sur cette circonférence,  $\Gamma$  est une parabole; s'il est intérieur ou extérieur,  $\Gamma$  est respectivement une ellipse ou une hyperbole.

Pour avoir un système de deux droites sécantes, le discriminant de l'équation (3) doit être nul; cette condition se ramène à

$$u \sum \lambda_r \lambda_s \sin^2 (D_r, D_s) + \sum \lambda_r \lambda_s \lambda_t \begin{vmatrix} \cos a_r & \cos a_s & \cos a_t \\ \sin a_r & \sin a_s & \sin a_t \\ p_r & p_s & p_t \end{vmatrix} = 0. \quad ^1)$$

Si  $A = C$ ,  $B = 0$ ,  $\Gamma$  devient une circonférence; ces égalités sont faciles à interpréter sous la forme

$$\sum \lambda \cos 2a = 0, \quad \sum \lambda \sin 2a = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

En effet, par l'origine  $O$  des coordonnées menons des perpendi-

<sup>1)</sup> Ce déterminant est égal à l'aire du triangle  $D_r D_s D_t$ , divisée par le rayon du cercle circonscrit.



culaires <sup>1)</sup> aux droites D, puis construisons les symétriques  $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ , par rapport à ces perpendiculaires, d'un point quelconque Q de l'axe des abscisses; les coordonnées de  $Q_r$  étant  $OQ \cos 2\alpha_r, OQ \sin 2\alpha_r$ , les égalités (4) expriment que O doit être le barycentre des points  $Q_1, Q_2, \dots Q_n$  chargés des masses  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ .

Si  $A = 0, B = 0, C = 0$   $\Gamma$  se réduit à une droite; on peut remplacer ces égalités par  $A - C = 0, B = 0, A + C = 0$ , ou par

$$\sum \lambda \cos 2\alpha = 0, \quad \sum \lambda \sin 2\alpha = 0, \quad \sum \lambda = 0.$$

On en conclut que les masses attachées aux points  $Q_1, Q_2, \dots Q_n$  définis ci-dessus sont en équilibre.

Enfin, on obtient pour  $\Gamma$  une hyperbole équilatère lorsque  $A + C = 0$ , ou  $\sum \lambda = 0$ .

3. Si nous plaçons l'origine des coordonnées en K, on a  $D = 0, E = 0$ ; donc

$$\sum \lambda p \cos \alpha = 0, \quad \sum \lambda p \sin \alpha = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Or  $p_r \cos \alpha_r, p_r \sin \alpha_r$  sont les coordonnées de la projection de l'origine sur  $D_r$ ; par suite, si nous appelons avec M. d'Ocagne, *barycentre podaire* d'un point M par rapport aux droites D et aux poids  $\lambda$ , le barycentre M' de ces poids attachés aux projections de M sur les droites D, les équations (5) expriment que K coïncide avec son barycentre podaire.

Cependant, lorsque  $\sum \lambda = 0$ , le barycentre podaire d'un point quelconque M du plan est à l'infini dans une direction déterminée, et des forces parallèles, proportionnelles à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$  et appliquées en  $M_1, M_2, \dots M_n$  se réduisent à un couple. Il y a exception pour une certaine position de M; alors les forces se font équilibre et le barycentre podaire est indéterminé. Ce point est le centre de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation (3).

4. Pour déterminer géométriquement le point K, nous allons étudier la correspondance qui existe entre un point quelconque M et son barycentre podaire M'. L'hypothèse de  $\sum \lambda = 0$  est exclue.

<sup>1)</sup> Il reviendrait au même de mener des parallèles aux droites D.

Nous nous appuyons sur le lemme suivant:

*Si Q est le barycentre des points A, B, . . . F, G portant les masses a, b, . . . f, g, un déplacement rectiligne GG' de la masse g imprime au barycentre du système un déplacement QQ' parallèle à GG' et égal à  $g \cdot GG' : (a + b + \dots + g)$ . Carsi R est le barycentre des masses a, b, . . . f, les points Q, Q' divisent les droites RG, RG' dans le même rapport  $g : (a + b + \dots + f)$ .*

On peut énoncer autrement ce lemme. Prenons sur QQ' un segment  $QG_1 = GG'$ ; alors

$$QQ' : Q'G_1 = g : (a + b + \dots + f).$$

Donc l'effet du déplacement GG' de la masse g est le même que si, après avoir réuni les masses a, b, . . . f, g au barycentre Q, on imprimait à g un déplacement  $QG_1 = GG'$ . Plus généralement, si les différentes masses éprouvent les déplacements AA', BB', . . . GG', on trouve le déplacement correspondant de leur barycentre en réunissant ces masses en leur barycentre primitif Q et en leur imprimant ensuite des déplacements QA<sub>1</sub>, QB<sub>1</sub>, . . . QG<sub>1</sub> équipollents aux premiers.

Cela posé, considérons deux points quelconques S, M du plan; soient S<sub>r</sub> et M<sub>r</sub> leurs projections sur D, S' et M' leurs barycentres podaires. Pour passer de S' à M', on peut mener par S' des droites S'P<sub>1</sub>, S'P<sub>2</sub>, . . . S'P<sub>n</sub> équipollentes à S<sub>1</sub>M<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>M<sub>2</sub>, . . . S<sub>n</sub>M<sub>n</sub>; alors M' sera le barycentre des points P pour les poids λ.

Cette construction montre que, si M parcourt une droite SV, M' décrit également une droite SV'; de plus, les ponctuelles engendrées par M et M' sont semblables. Par conséquent, un point quelconque M du plan et son barycentre podaire M' se correspondent dans deux figures affines φ, φ' ayant K pour point double.

La construction précédente se simplifie si l'on fait coïncider S et S' avec K: Le barycentre podaire d'un point M par rapport aux droites D coïncide avec le barycentre podaire de M, pour les mêmes masses, par rapport à des parallèles menées par K aux droites D.

5. Nous appelons, avec M. d'Ocagne, *barycentre symétrique* d'un point M par rapport aux droites D affectées des masses λ,

le barycentre  $M''$  de ces masses placées respectivement aux points symétriques de  $M$  par rapport aux droites  $D$ . Il est évident que  $M''$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $M'$ .

La correspondance  $(M, M'')$  <sup>1)</sup> est plus simple que la correspondance  $(M, M')$ . En effet, pour passer d'un premier couple de points homologues  $SS''$  à un couple quelconque  $MM''$ , menons par  $S$  des parallèles  $s_1, s_2, \dots s_n$  aux droites  $D$ , prenons les symétriques  $m_1, m_2, \dots m_n$  de  $M$  par rapport à ces parallèles et déterminons le barycentre  $\mu$  des points  $m$  pour les masses  $\lambda$ ; les droites  $Sm_1, Sm_2, \dots Sm_n$  étant équipollentes aux déplacements qu'éprouvent les symétriques de  $M$  par rapport aux droites  $D$  dans le passage de  $S$  en  $M$ , la droite  $S''M''$  est égale et parallèle à  $S\mu$ . Or, lorsque  $M$  se déplace, les rayons  $Sm_1, Sm_2, \dots Sm_n$  sont toujours égaux à  $SM$  et tournent autour de  $S$  avec la même vitesse angulaire que  $SM$ , mais en sens contraire; par suite les rayons  $SM, S\mu$  ont un rapport constant et des directions symétriques par rapport à une droite fixe. Les droites  $SM, S''M''$  jouissant de la même propriété, les points  $M, M''$  se correspondent dans deux figures inversement semblables  $\phi, \phi''$  ayant les mêmes éléments doubles que les figures  $\phi, \phi'$ .

6. Ces éléments doubles se déduisent très simplement de la connaissance de deux couples de points homologues  $SS''$  et  $MM''$ . On divise les droites  $MM'', SS''$  additivement aux points  $M''', S'''$  et soustractivement aux points  $M^{iv}, S^{iv}$  dans le rapport de similitude  $MS : M''S''$ ; les droites  $M'''S''', M^{iv}S^{iv}$  sont les droites doubles, et leur intersection est le point double de  $\phi, \phi''$ .

Pour simplifier, prenons pour  $M$  le point  $S''$ . Les droites  $KM'', KS$  étant toutes deux symétriques de  $KS''$  par rapport à la droite double  $M'''S'''$ , la droite  $M''S$  passe par  $K$ . Les angles homologues  $KSS'', KS''M''$  étant égaux,  $S''K$  touche la circonférence circonscrite au triangle  $SS''M''$ . On peut aussi remarquer que  $M'''S'''$  est perpendiculaire au milieu de la bissectrice de l'angle  $SS''M''$  arrêtée à  $M''S$ .

<sup>1)</sup> Le caractère de cette correspondance a été signalé par M. Schols. M. d'Ocagne l'a établi analytiquement; nous n'avons pu consulter le travail du géomètre hollandais.

7. Avant d'examiner les cas particuliers, nous allons démontrer que les axes de  $\Gamma$  sont les droites doubles des figures  $\phi$ ,  $\phi''$ .

Ces axes seraient parallèles aux axes coordonnés  $Ox$ ,  $Oy$  si l'on avait  $B = 0$ . Supposons  $B \neq 0$ ; nous pouvons faire tourner les axes  $Ox$ ,  $Oy$  d'un angle  $\phi$  tel que le coefficient de  $xy$  dans la nouvelle équation de  $\Gamma$  soit nul. Nous aurons alors

$$\Sigma \lambda \sin 2(\alpha - \phi) = 0, \text{ d'où } \operatorname{tg} 2\phi = \frac{\Sigma \lambda \sin 2\alpha}{\Sigma \lambda \cos 2\alpha}. \quad (6)$$

Prenons sur l'ancien axe des  $x$  un point quelconque  $Q$ , et cherchons les symétriques  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  de  $Q$  par rapport aux perpendiculaires abaissées de l'origine  $O$  sur les droites  $D$ . Les coordonnées de  $Q_r$  étant  $OQ \cos 2\alpha_r, OQ \sin 2\alpha_r$ , celles du barycentre  $q$  des points  $Q$  pour les masses  $\lambda$  seront

$$OQ \frac{\Sigma \lambda \sin 2\alpha}{\Sigma \lambda}, OQ \frac{\Sigma \lambda \cos 2\alpha}{\Sigma \lambda}; \text{ la valeur de } \operatorname{tg} 2\phi \text{ indique que}$$

les axes de  $\Gamma$  sont parallèles aux bissectrices de l'angle  $qOQ$  et de son supplément adjacent.

Dans la construction précédente, on peut remplacer les perpendiculaires abaissées de  $O$  sur les droites  $D$  par des parallèles à ces droites; mais alors la correspondance  $(Q, q)$ , si l'on change la direction de l'axe  $Ox$ , devient la correspondance  $(M, \mu)$  rencontrée ci-dessus (5). Il en résulte que les axes de  $\Gamma$  sont les éléments doubles des figures  $\phi, \phi''$ .

Les directions des axes de  $\Gamma$  résolvent le problème suivant: Si  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  désignent les projections d'un segment  $AB$  sur les droites  $D$ , comment faut-il orienter  $AB$  pour que la somme

$$\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2 + \dots + \lambda_n \delta_n^2 = u_1$$

soit maximum ou minimum <sup>1)</sup> Soient  $\alpha$  et  $\phi$  les angles d'un axe  $Ox$  avec les normales à la droite  $D$  et à la direction  $AB$ ; on a en supposant  $AB = 1$ .

$$u_1 = \Sigma \lambda \cos^2(\alpha - \phi), \quad \frac{du_1}{d\phi} = \Sigma \lambda_1 \sin 2(\alpha - \phi);$$

<sup>1)</sup> Cette interprétation des axes de  $\Gamma$  nous a été suggérée par une correspondance avec M. Lemoine.

l'angle  $\phi$  résulte donc de l'équation

$$\Sigma \lambda \sin 2(a - \phi) = 0, \text{ ou } \operatorname{tg} 2\phi = \frac{\Sigma \lambda \sin 2a}{\Sigma \lambda \sin 2a}.$$

C'est la même égalité qui nous a servi à déterminer les directions des axes de  $\Gamma$ .

8. Passons à l'étude des cas particuliers, en supposant d'abord  $\Sigma \lambda \neq 0$  et en rappelant sommairement la solution générale du problème qui nous occupe.

Après avoir déterminé directement le barycentre symétrique  $S''$  d'un premier point  $S$ , nous avons construit (5) les symétriques  $m_1, m_2, \dots, m_n$  d'un point quelconque  $M$  par rapport aux parallèles menées par  $S$  aux droites  $D$ , puis cherché le barycentre  $\mu$  des points  $m$  pour les masses  $\lambda$ ; alors la droite  $S''M''$  est équipollente à  $S\mu$ . Or, il peut arriver que  $\mu$  coïncide avec  $S$ ; alors le barycentre symétrique de  $M$  coïncide avec  $S''$ , et  $S''$  est le point cherché  $K$ . De plus, les axes de  $\Gamma$  étant parallèles aux bissectrices de l'angle  $\mu SM$  et de son supplément, ces droites, dans le cas actuel, sont indéterminées. Ainsi, on peut prendre pour axes de  $\Gamma$  deux droites rectangulaires quelconques menées par  $K$ ; donc  $\Gamma$  est une circonférence, résultat qui a déjà été trouvé ci-dessus (2).

Supposons maintenant  $\mu$  distinct de  $S$ . Pour déterminer le point  $K$  et les axes  $KX, KY$ , nous avons divisé les droites  $MM''$  et  $SS''$ , aux points  $M''', M^{iv}, S''', S^{iv}$ , dans le rapport  $MS : M''S''$ ; les droites  $M'''S''', M^{iv}S^{iv}$  sont les lignes cherchées  $KX, KY$ .

Si les droites  $SM, S''M''$  sont égales, les figures  $\phi, \phi''$  deviennent symétriquement égales. Les points  $M''', S'''$  sont les milieux des droites  $MM'', SS''$  et les points  $M^{iv}, S^{iv}$  passent à l'infini. La courbe  $\Gamma$  est donc une parabole ayant pour axe principal la droite  $M'''S'''$ .

Si, en même temps que  $SM = S''M''$ , les droites  $SS'', MM''$  sont parallèles, les figures  $\phi, \phi''$  sont symétriques par rapport à la droite  $S'''M'''$ ; chaque point de cette droite étant un point double,  $\Gamma$  se réduit à deux parallèles.

9. Supposons maintenant  $\Sigma \lambda = 0$ .  $M_1', M_2', \dots, M_n'$  étant les symétriques d'un point quelconque  $M$  par rapport aux droites  $D$ , cherchons le barycentre  $N$  des points  $M_1', M_2', \dots, M_{n-1}'$  pour

les masses  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ . Le barycentre symétrique  $M''$  de  $M$  par rapport à  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n$  est à l'infini sur la direction  $NM'_n$ , à moins que  $N$  ne se confonde avec  $M'_n$ ; dans le dernier cas,  $M'_n$  est le centre cherché  $K$  de l'hyperbole équilatère  $\Gamma$ .

Lorsque  $M$  se déplace dans le plan, les points  $M$  et  $N$  se correspondent dans deux figures inversement semblables; de même  $M$  et  $M'_n$  se correspondent dans deux figures symétriques. Par suite,  $N$  et  $M'_n$  sont des points homologues de deux figures directement semblables  $\psi, \psi'$  ayant pour point double le point cherché  $K$ . Pour construire  $K$ , il suffit de connaître deux couples de points homologues de  $\psi, \psi'$ .

La direction des axes de  $\Gamma$  résulte de la méthode indiquée. Par un point quelconque  $O$ , menons des perpendiculaires aux droites  $D$ , et cherchons les symétriques  $A_1, A_2, \dots, A_n$  d'un point quelconque  $A$  par rapport à ces perpendiculaires; enfin, soit  $a$  le barycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  pour les masses  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ : les axes de  $\Gamma$  sont parallèles aux bissectrices des angles des droites  $O A, a A_n$ .

10. Nous allons établir les formules relatives aux correspondances  $(M_1 M')$ ,  $(M_1 M'')$ .

Soient  $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$  les coordonnées d'un point quelconque  $M$ , de son barycentre podaire  $M'$  et de son barycentre symétrique  $M''$ ; nous supposons d'abord deux axes rectangulaires quelconques  $Ox, Oy$ .

La projection de  $M$  sur  $D$  ayant pour coordonnées

$$x - (x \cos a + y \sin a - p) \cos a, y - (x \cos a + y \sin a - p) \sin a,$$

on trouve facilement

$$x' = x - \frac{\sum \lambda (x \cos a + y \sin a - p) \cos a}{\sum \lambda}, \text{ etc. ;}$$

d'où, en posant comme ci-dessus

$$A = \sum \lambda \cos^2 a, B = \sum \lambda \cos a \sin a, C = \sum \lambda \sin^2 a$$

et faisant  $\sum \lambda = L$ ,

$$x' = \frac{Cx - By + \sum \lambda p \cos a}{L}, y' = \frac{-Bx + Ay + \sum \lambda p \sin a}{L}.$$

Si la courbe  $\Gamma$  est une ellipse ou une hyperbole scalène,

on peut mettre l'origine O au centre K et prendre pour axes coordonnés les axes principaux KX, KY, ce qui réduit les formules précédentes à

$$x' = \frac{Cx}{L}, y' = \frac{Ay}{L}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On passe donc de M à M' en multipliant l'abscisse et l'ordonnée de M respectivement par les nombres constants  $\frac{C}{L}$ ,  $\frac{A}{L}$ .

L'affinité (M, M') est caractérisée par les propriétés que les droites doubles sont rectangulaires et que la somme des modules  $\frac{C}{L}$ ,  $\frac{A}{L}$  est égale à l'unité.

Soient P, P' les projections de M sur les axes KX, KY. Comme on a

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1,$$

le point M' est situé sur la droite Q'Q. De plus

$$\frac{Q'M'}{M'Q} = \frac{x'}{x - x'} = \frac{C}{A};$$

donc M' divise la droite Q'Q dans un rapport constant <sup>1)</sup>. Si la courbe  $\Gamma$  est une ellipse, A et C sont de même signe, et M' tombe entre Q' et Q; si  $\Gamma$  est une hyperbole, M' tombe en dehors du segment Q'Q.

Les formules de la correspondance (M, M'') sont

$$x'' = 2x' - x = \frac{C - A}{L} x, \quad y'' = \frac{A - C}{L} y;$$

les rapports  $\frac{x''}{x}$ ,  $\frac{y''}{y}$  étant égaux et de signes contraires, on voit facilement que ces formules se rapportent à deux figures inversement semblables.

Le rapport de similitude a pour valeur absolue

<sup>1)</sup> Ce rapport est égal au quotient des carrés des axes de  $\Gamma$ .

$$\frac{KM''}{KM} = \frac{C - A}{L} = \frac{C - A}{C + A} = \frac{1 - \frac{A}{C}}{1 + \frac{A}{C}},$$

il est plus petit ou plus grand que l'unité suivant que  $\Gamma$  est une ellipse ou une hyperbole.

11. Des développements qui précèdent, on déduit des conséquences intéressantes pour la géométrie du triangle.

Supposons donc  $n = 3$  et désignons par  $A_1, A_2, A_3$  les sommets du triangle formé par les droites  $D_1, D_2, D_3$ . La courbe  $\Gamma$  a même centre et mêmes directions des axes que la conique

$$\Sigma \lambda (x \cos \alpha + q \sin \alpha - p)^2 = 0,$$

qui correspond à  $u = 0$ . Celle-ci est autopolaire par rapport à  $A_1, A_2, A_3$ , de sorte que trois couples de diamètres conjugués ont les directions  $(KA_1, A_2A_3)$ ,  $(KA_2, A_3A_1)$ ,  $(KA_3, A_1A_2)$ .

Si l'origine des coordonnées cartésiennes coïncide avec le centre  $K$  de  $\Gamma$ , on a  $\Sigma \lambda p \cos \alpha = 0$ ,  $\Sigma \lambda p \sin \alpha = 0$ , d'où

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\sin A_1}{\lambda_1} : \frac{\sin A_2}{\lambda_2} = \frac{\sin A_3}{\lambda_3} \dots \quad (8)$$

Les quantités  $p_1, p_2, p_3$  sont évidemment les coordonnées normales de  $K$  par rapport à  $A_1, A_2, A_3$ .

Nous examinerons trois cas particuliers.

a) Pour que  $\Gamma$  soit une circonférence, les nombres  $\lambda$  doivent vérifier les équations  $\Sigma \lambda \cos 2 \alpha = 0$ ,  $\Sigma \lambda \sin 2 \alpha = 0$ ; d'où l'on tire

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \sin 2 A_1 : \sin 2 A_2 : \sin 2 A_3,$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\cos A_1} : \frac{1}{\cos A_2} : \frac{1}{\cos A_3}.$$

Le centre de  $\Gamma$  est donc l'orthocentre  $H$  de  $A_1A_2A_3$ , résultat connu. Ce point, d'après ce qu'on a vu, est le barycentre symétrique d'un point quelconque du plan. On a donc ce théorème élégant: *Si aux symétriques d'un point par rapport aux côtés d'un triangle  $A_1A_2A_3$  on place des poids proportionnels à  $\sin 2 A_1, \sin 2 A_2, \sin 2 A_3$ , le barycentre de ces poids coïncide constamment avec l'orthocentre de  $A_1A_2A_3$ .*



b) Supposons  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ; le centre de  $\Gamma$  est le point de Lemoine K de  $A_1A_2A_3$ . Le barycentre symétrique de M est le symétrique de M par rapport au point de concours des médianes de son triangle podaire. Les droites KM, KM" ont des directions symétriques par rapport à un axe KX de  $\Gamma$ .

Les barycentres symétriques des sommets  $A_1, A_2, A_3$  sont les points  $A_1'', A_2'', A_3''$  qui divisent les hauteurs  $A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3$  dans le rapport 2 : 1. Les triangles  $A_1A_2A_3, A_1''A_2''A_3''$  sont inversement semblables, et ont pour centre de similitude K, pour droites doubles les axes KX, KY de  $\Gamma$ . Donc K a les mêmes coordonnées barycentriques  $a_1^2, b_1^2, c_1^2$  dans les deux triangles; c'est aussi le barycentre des mêmes masses  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$  placées aux points divisant les droites  $A_1A_1'', A_2A_2'', A_3A_3''$  dans un même rapport. En particulier, K est le barycentre des pieds  $H_1, H_2, H_3$  des hauteurs, pour les masses  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ ; ce théorème est déjà connu.

Si l'on place M au centre O du cercle  $A_1A_2A_3$ , M" se confond avec le milieu O" de GH; donc un axe de  $\Gamma$  est la bissectrice de l'angle OKO".

Si l'on projette un segment de longueur donnée sur les côtés d'une triangle ABC, la somme des carrés de ses projections passe par un maximum ou par un minimum lorsque le segment est parallèle à un axe de  $\Gamma$ .

c) Considérons encore le cas de  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = a_1^2 : a_2^2 : a_3^2$ . D'après les formules (8), le centre de  $\Gamma$  se confond avec le point de concours G des médianes de  $A_1A_2A_3$ , et comme les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués à  $GA_1, GA_2, GA_3$ , parmi les ellipses comprises dans l'équation

$$\Sigma (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2 \sin^2 A = u$$

se trouvent les deux ellipses inscrite et circonscrite à  $A_1A_2A_3$ , ayant pour centre G; les valeurs correspondantes de  $u$  sont

$$\frac{S^2}{2R^2}, \frac{S^2}{R^2}, S \text{ et } R \text{ désignant l'aire des triangles } A_1A_2A_3 \text{ et}$$

le rayon du cercle circonscrit.

Le barycentre podaire de H pour les masses  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$  étant le point de Lemoine K, son barycentre symétrique est le symétrique H" de H par rapport à K; donc un axe de l'ellipse de Steiner est la bissectrice de l'angle HGH".

NOTE SUR LE MOUVEMENT DE ROULEMENT D'UN CORPS PESANT  
DE RÉVOLUTION SUR LE PLAN HORIZONTAL

PAR

DR. D. J. KORTEWEG.

---

M. APPELL, ayant pris connaissance de mon article, p. 130—155, sur la théorie du mouvement de roulement, vient de m'informer qu'il a reconnu lui aussi l'erreur de M. LINDELÖF reproduite dans son *Traité* au § 452 (voir la note (2) de mon article).

Dès l'année dernière il l'a corrigée dans tous les exemplaires restant en magasin, les pages 347, 348, 349, 350 ont été modifiées et un numéro 452<sup>bis</sup> ajouté. De plus il a fait au mois de Décembre 1898 une note dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* relative à cette question et en ce moment même il publie, dans la collection „Scientia” (Carré et Naud, éditeurs) un petit volume „*sur les mouvements de roulement*” qui paraîtra en Septembre 1899 au plus tard.

Dans la nouvelle version du § 452, qu'il a eu l'obligeance de me faire parvenir et qu'il s'empressera d'envoyer aux personnes qui la désirent, M. APPELL s'est borné à déduire les équations du mouvement dans le cas du cerceau. Alors le corps pesant est une circonférence homogène de rayon  $R$  et les équations auxquelles il arrive, sont, en effet, comme il est facile de le vérifier, conformes au système des formules (16), (17) et (18) de mon article, obtenues par une méthode différente.

Bentheim, 18 Juillet 1899.

---

ON A CASE OF SMALL OSCILLATIONS OF A SYSTEM ABOUT A  
POSITION OF EQUILIBRIUM.

*Answer to prize-question No. 6 for the year 1898*

BY

A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.

---

A heavy homogeneous hemisphere is resting in equilibrium on a perfectly rough horizontal plane with its spherical surface downwards. A second heavy homogeneous hemisphere is resting in the same way on the perfectly rough plane face of the first, the point of contact being in the centre of that circle. The equilibrium being slightly disturbed it is required to find the small oscillations of the system.

§ 1. *Deduction of the equations of motion.* If both bodies were free, their motion would be determined by 12 quantities, 6 for each body. As the surfaces are all perfectly rough there is no sliding at the points of contact and we have for both bodies the condition that at the point of contact the two surfaces have the same velocity. This gives us for each body three equations between the fluxions of the co-ordinates, in all six equations: the system has  $12 - 6 = 6$  degrees of freedom. The six equations cannot be integrated for finite motions, we cannot in general make use of them to reduce the number of independent variables to that of the degrees of freedom of the system and then, the kinetic and potential energy having been expressed in these six independent variables, use the method of Lagrange. That this cannot be done follows from the way in which the equations of Lagrange are deduced. [Routh, Elementary Rigid Dynamics, Ch. VIII § 396: The

independent variables in terms of which the motion is to be found may be any we please, with this restriction. that the co-ordinates of every particle of the body could, if required, be expressed in terms of them by means of equations which do not contain any differential coefficients with regard to the time.] In this case however, where the motion of the system consists of small oscillations, the six equations, which express the conditions of rolling, can be integrated and may be used to reduce the number of independent variables to six, the number of the degrees of freedom of the system.

We now express the kinetic and the potential energy in these six independent variables and we may then write down the equations of Lagrange.

I had not at first paid attention to the fact that this way of solving the problem of finding the motion of rocking bodies is not a general method, that it may be used only for small motions. That such is the case is fully demonstrated by prof. Korteweg in this number.

We take as axes of reference :

- firstly: a rectangular set of axes,  $Z_2 . XYZ$ , through the centre of gravity,  $Z_2$ , of the upper hemisphere and fixed in this body.
- secondly: a rectangular set of axes,  $Z_1 . \mathcal{X} HZ$ , through the centre of gravity,  $Z_1$ , of the lower hemisphere and fixed in that body, and
- thirdly: a rectangular set of axes,  $R . LMN$ , through the point of contact,  $R$ , of the lower hemisphere with the horizontal plane, in the position of equilibrium and fixed in space.

In the position of equilibrium the axes  $Z_2Z$ ,  $Z_1Z$  and  $RN$  are vertical and therefore coinciding; the axes  $Z_2X$  and  $Z_1\mathcal{X}$  are parallel to  $RL$ , an arbitrary line in the horizontal plane and in the same way the axes  $Z_2Y$  and  $Z_1H$  are parallel to  $RM$ , the line at right angles to  $RL$  and  $RN$ .

Throughout the motion we have for these different sets of axes the following transformation formulae :

$$\xi = a + a_1x + a_2y + a_3z,$$

$$\eta = \beta + \beta_1x + \beta_2y + \beta_3z,$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1x + \gamma_2y + \gamma_3z,$$

$$l = a + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta,$$

$$m = b + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta,$$

$$n = c + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta,$$

The last may be written:

$$l = a + a_1a + a_2\beta + a_3\gamma + (a_1a_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1)x + \\ + (a_1a_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2)y + (a_1a_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3)z,$$

$$m = b + b_1a + b_2\beta + b_3\gamma + (b_1a_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1)x + \\ + (b_1a_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2)y + (b_1a_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3)z,$$

$$n = c + c_1a + c_2\beta + c_3\gamma + (c_1a_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1)x + \\ + (c_1a_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2)y + (c_1a_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3)z.$$

The 24 quantities  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, \beta, \gamma, \alpha, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  are the co-ordinates by which the position of the system is determined. They are not independent, for, as the axes of both sets remain at right angles, we have the following relations between the quantities  $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$  and  $\gamma_3$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0, \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 &= 0, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

from which we deduce:

$$\frac{\gamma_1}{a_2\beta_3 - a_3\beta_2} = \frac{\gamma_2}{a_3\beta_1 - a_1\beta_3} = \frac{\gamma_3}{a_1\beta_2 - a_2\beta_1} = 1.$$

Corresponding relations exist between the quantities  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$  and  $c_3$ ; when these too are written down under (1) we have 12 relations between the 24 co-ordinates.

The quantities  $a_1, b_2, c_3, \alpha, \beta_2$  and  $\gamma_3$  are equal to unity for the position of equilibrium; they differ from unity by a small quantity of the second order when the system is performing small oscillations.

The quantities  $a, a_1, a_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1$  and  $c_2$  are small quantities of the first order when the system is oscillating, they are zero for the position of equilibrium.

For the position of equilibrium we have:  $c = R_1 - l_1$ ,  $\gamma = R_2 + l_1 - l_2$ ;  $l_1$  being the distance of the centre of gravity of the lower hemisphere from its plane face,  $R_1$  its radius,  $l_2$  and  $R_2$  the corresponding lengths relating to the upper hemisphere.

Let  $x_2, y_2, z_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$  be the co-ordinates of the point of contact of the upper hemisphere with the plane face of the lower. We remark that the centre of the upper hemisphere has the same  $\xi$  and  $\eta$  as this point of contact, and that  $\zeta_2$  is known, being equal to a constant quantity,  $l_1$ . We have for the centre  $x = 0, y = 0, z = l_2$ .

Substituting we get:

$$\xi_2 = a + a_1 l_2 = a + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2,$$

$$\eta_2 = \beta + \beta_1 l_2 = \beta + \beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 + \beta_3 z_2,$$

$$\zeta_2 = l_1 = \gamma + \gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 z_2$$

from which follows:

$$x_2 = (l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2) \gamma_1,$$

$$y_2 = (l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2) \gamma_2,$$

$$z_2 = l_2 + (l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2) \gamma_3.$$

As the point of contact is a point of the spherical surface of the upper hemisphere, we have:

$$x_2^2 + y_2^2 + (z_2 - l_2)^2 = R_2^2,$$

or

$$(l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2)^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = R_2^2,$$

or finally

$$l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2 = -R_2 \dots \dots \dots (2)$$

which relation may also be deduced by substituting in  $\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$  the co-ordinates of the centre of the upper hemisphere:  $\zeta = R_2 + l_1, x = 0, y = 0, z = l_2$ . Substi-

tuting  $l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2 = -R_2$  in the co-ordinates of the point of contact, we have :

$$x_2 = -R_2 \gamma_1$$

$$y_2 = -R_2 \gamma_2$$

$$z_2 = l_2 - R_2 \gamma_3.$$

We have for the lower hemisphere :

$$c + c_3 l_1 = R_1 . . . . . (3)$$

by substitution in  $n = c + c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta$  of the co-ordinates of its centre:  $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = l_1, n = R_1$ .

We have for the co-ordinates of the point of contact of the lower hemisphere with the horizontal plane :

$$\xi_1 = -R_1 c_1,$$

$$\eta_1 = -R_1 c_2,$$

$$\zeta_1 = l_1 - R_1 c_3.$$

The conditions that the point of contact of the upper hemisphere be at rest relatively to the lower hemisphere or to the set of axes  $L_1 \mathcal{E} H Z$  are :

$$\dot{a} + \dot{a}_1 x_2 + \dot{a}_2 y_2 + \dot{a}_3 z_2 = 0,$$

$$\dot{\beta} + \dot{\beta}_1 x_2 + \dot{\beta}_2 y_2 + \dot{\beta}_3 z_2 = 0,$$

$$\dot{\gamma} + \dot{\gamma}_1 x_2 + \dot{\gamma}_2 y_2 + \dot{\gamma}_3 z_2 = 0,$$

or :

$$\dot{a} - \dot{a}_1 R_2 \gamma_1 - \dot{a}_2 R_2 \gamma_2 + \dot{a}_3 (l_2 - R_2 \gamma_3) = 0, . . . (4)$$

$$\dot{\beta} - \dot{\beta}_1 R_2 \gamma_1 - \dot{\beta}_2 R_2 \gamma_2 + \dot{\beta}_3 (l_2 - R_2 \gamma_3) = 0, . . . (5)$$

$$\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_1 R_2 \gamma_1 - \dot{\gamma}_2 R_2 \gamma_2 + \dot{\gamma}_3 (l_2 - R_2 \gamma_3) = 0. . . (6)$$

The last equation may be written :

$$\dot{\gamma} - R_2 (\gamma_1 \dot{\gamma}_1 + \gamma_2 \dot{\gamma}_2 + \gamma_3 \dot{\gamma}_3) + l_2 \dot{\gamma}_3 = 0,$$

or

$$\dot{\gamma} + l_2 \dot{\gamma}_3 = 0.$$

It is the equation  $l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2 = -R_2$  differentiated.

The conditions that the point of contact  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  be at rest relatively to the axes fixed in space are :

$$\dot{a} - \dot{a}_1 R_1 c_1 - \dot{a}_2 R_1 c_2 + \dot{a}_3 (l_1 - R_1 c_3) = 0, \dots \quad (7)$$

$$\dot{b} - \dot{b}_1 R_1 c_1 - \dot{b}_2 R_1 c_2 + \dot{b}_3 (l_1 - R_1 c_3) = 0, \dots \quad (8)$$

$$\dot{c} - \dot{c}_1 R_1 c_1 - \dot{c}_2 R_1 c_2 + \dot{c}_3 (l_1 - R_1 c_3) = 0. \dots \quad (9)$$

We have from (4) and (5) as a first approximation :

$$\dot{a} = \dot{a}_3 (R_2 - l_2),$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_3 (R_2 - l_2),$$

which equations may be integrated to

$$a = a_3 (R_2 - l_2), \dots \quad (10)$$

$$\beta = \beta_3 (R_2 - l_2), \dots \quad (11)$$

if we make the initial values of  $a$ ,  $a_3$  and  $\beta_3$  equal to zero, which however is not a necessary condition; we may in every case use this mode of solution. If the initial values are not zero the right-hand side of the equations (16) and (18) is not zero, for to  $U$  has then to be added  $c_1$  and  $b_3$ , both multiplied by a constant small quantity of the first order. For the rest everything remains the same, the solution is of the same kind.

We now write in the same way

$$a = a_3 (R_1 - l_1) \dots \quad (12)$$

$$b = b_3 (R_1 - l_1) \dots \quad (13)$$

It is not necessary to make the initial values of  $a$ ,  $a_3$ ,  $b$  and  $b_3$  equal to zero as these values do not even enter into the equations of motion.

The fact that the equations which represent the conditions of rolling can be integrated, enables us to deduce the equations of motion by the method of Lagrange from the potential and kinetic energy expressed in six independent variables with the aid of those equations. If the equations (4) and (5) cannot be integrated it is impossible to express the potential energy in the same six independent variables as the kinetic energy so that there is no question of applying Lagrange's method. If the equations (4) and (5) can and the equations (7) and (8) cannot be integrated it is possible to express the potential and the kinetic energy in the same six independent variables, but these functions so expressed cannot serve to deduce the equations



of motion. If the oscillations of the system be finite there is certainly one of the equations (4), (5), (7) and (8) that cannot be integrated, therefore our method may be used for small oscillations only.

The equations (1) give as a first approximation:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 + a_2 = 0, & b_1 + a_2 = 0, \\ \gamma_1 + a_3 = 0, & c_1 + a_3 = 0, \\ \gamma_2 + \beta_3 = 0, & \text{and} \quad c_2 + b_3 = 0, \\ a_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1. & a_1 = b_2 = c_3 = 1. \end{array}$$

and as a second approximation:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + a_3^2), \quad \beta_2 = 1 - \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_3^2), \quad \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \\ a_1 &= 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + a_3^2), \quad b_2 = 1 - \frac{1}{2}(b_1^2 + b_3^2), \quad c_3 = 1 - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2). \end{aligned}$$

We are now able to express our 24 original co-ordinates in the following six:  $a_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\gamma_1$ ,  $a_2$ ,  $b_3$  and  $c_1$ ; thus:

$$\begin{array}{ll} a = \gamma_1 (l_2 - R_2), & a = c_1 (l_1 - R_1), \\ a_1 = 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + \gamma_1^2), & a_1 = 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + c_1^2), \\ a_2 = a_2, & a_2 = a_2 \\ a_3 = -\gamma_1, & a_3 = -c_1, \\ \beta = \beta_3 (R_2 - l_2), & b = b_3 (R_1 - l_1), \\ \beta_1 = -a_2, & b_1 = -a_2 \\ \beta_2 = 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + \beta_3^2), & b_2 = 1 - \frac{1}{2}(a_2^2 + b_3^2), \\ \beta_3 = \beta_3, & b_3 = b_3, \\ \gamma = R_2 + l_1 - l_2 \{ 1 - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \beta_3^2) \}, & c = R_1 - l_1 \{ 1 - \frac{1}{2}(c_1^2 + b_3^2) \} \\ \gamma_1 = \gamma_1, & c_1 = c_1 \\ \gamma_2 = -\beta_3, & c_2 = -b_3 \\ \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \beta_3^2). & c_3 = 1 - \frac{1}{2}(c_1^2 + b_3^2). \end{array}$$

In substituting the differential coefficients with regard to the time in the expression for the kinetic energy, we may in  $\dot{l}$ ,  $\dot{m}$  and  $\dot{n}$  omit all terms of the second order as  $T$  consists of terms of the second degree in  $\dot{l}$ ,  $\dot{m}$  and  $\dot{n}$ . In the expression for the potential energy on the contrary the co-ordinates  $n$  should be second approximations.

If  $\mu_1$  be a particle of the lower and  $\mu_2$  one of the upper hemisphere, we have:

$$U = g \Sigma \mu_1 n + g \Sigma \mu_2 n = M_1 g c + M_2 g (c + c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma),$$

or, omitting constant quantities and small quantities of an order higher than the 2<sup>nd</sup>:

$$U = \frac{1}{2} M_1 g l_1 (c_1^2 + b_3^2) + M_2 g \left[ \frac{1}{2} (l_2 - R_2) (c_1^2 + b_3^2) + \frac{1}{2} l_2 (\gamma_1^2 + \beta_3^2) + b_3 \beta_3 (l_2 - R_2) + c_1 \gamma_1 (l_2 - R_2) \right],$$

or, finally:

$$\begin{aligned} \frac{U}{g} = & b_3^2 (\frac{1}{16} R_1 M_1 - \frac{1}{16} R_2 M_2) - \frac{1}{8} M_2 R_2 b_3 \beta_3 + \frac{1}{16} \beta_3^2 M_2 R_2 + c_1^2 (\frac{1}{16} R_1 M_1 - \\ & - \frac{1}{16} R_2 M_2) - \frac{1}{8} M_2 R_2 c_1 \gamma_1 + \frac{1}{16} M_2 R_2 \gamma_1^2. \end{aligned}$$

We now proceed to find the kinetic energy, expressed in the same six independent variables as the potential energy.

We have for a particle of the upper hemisphere:

$$\dot{l} = \dot{a} + \dot{a} + \dot{a}_3 \gamma + (\dot{a}_2 + \dot{a}_2) y + (\dot{a}_3 + \dot{a}_3) z,$$

$$\dot{m} = \dot{b} + \dot{\beta} + \dot{b}_3 \gamma + (\dot{b}_1 + \dot{\beta}_1) x + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3) z,$$

$$\dot{n} = (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1) x + (\dot{c}_2 + \dot{\gamma}_2) y,$$

or:

$$\dot{l} = -\dot{c}_1 (R_1 + R_2 - l_2) - \dot{\gamma}_1 (R_2 - l_2) + (\dot{a}_2 + \dot{a}_2) y - (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1) z,$$

$$\dot{m} = \dot{b}_3 (R_1 + R_2 - l_2) - \dot{\beta}_1 (R_2 - l_2) - (\dot{a}_2 + \dot{a}_2) x + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3) z,$$

$$\dot{n} = (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1) x - (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3) y.$$

We find for the upper hemisphere:

$$\begin{aligned} \Sigma \mu_2 (\dot{l}^2 + \dot{m}^2 + \dot{n}^2) = & M_2 [\{ \dot{c}_1 (R_1 + R_2 - l_2) + \dot{\gamma}_1 (R_2 - l_2) \}^2 + \\ & + \{ \dot{b}_3 (R_1 + R_2 - l_2) + \dot{\beta}_3 (R_2 - l_2) \}^2] + \{ (\dot{a}_2 + \dot{a}_2)^2 + (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1)^2 \} \Sigma \mu_2 x^2 + \\ & + \{ (\dot{a}_2 + \dot{a}_2)^2 + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3)^2 \} \Sigma \mu_2 y^2 + \{ (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1)^2 + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3)^2 \} \Sigma \mu_2 z^2, \end{aligned}$$

and for the lower hemisphere:

$$\Sigma \mu_1 (\dot{l}^2 + \dot{m}^2 + \dot{n}^2) = M_1 [\dot{c}_1^2 (R_1 - l_1)^2 + \dot{b}_3^2 (R_1 - l_1)^2] +$$

$$+ (\dot{a}_2^2 + \dot{c}_1^2) \Sigma \mu_1 \xi^2 + (\dot{a}_2^2 + \dot{b}_3^2) \Sigma \mu_1 \eta^2 + (\dot{b}_3^2 + \dot{c}_1^2) \Sigma \mu_1 \zeta^2,$$

or, for the whole system:

$$\begin{aligned}
2T = & \dot{a}_2^2 \frac{2}{3} (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2) + \frac{4}{3} \dot{a}_2 \dot{a}_2 M_2 R_2^2 + \dot{a}_2^2 \frac{2}{3} M_2 R_2^2 + \\
& + \dot{b}_3^2 [\frac{1}{6} R_1^2 M_1 + M_2 \{\frac{1}{2} R_2^2 + \frac{2}{3} R_1 R_2 + R_1^2\}] + 2\dot{b}_3 \dot{\beta}_3 M_2 R_2 (\frac{1}{6} R_2 + \frac{2}{3} R_1) + \\
& + \dot{\beta}_3^2 \frac{1}{6} M_2 R_2^2 + \dot{c}_1^2 [\frac{1}{6} R_1^2 M_1 + M_2 \{\frac{1}{2} R_2^2 + \frac{2}{3} R_1 R_2 + R_1^2\}] + \\
& + 2\dot{c}_1 \dot{\gamma}_1 M_2 R_2 (\frac{2}{3} R_1 + \frac{1}{6} R_2) + \dot{\gamma}_1^2 \frac{1}{6} M_2 R_2^2.
\end{aligned}$$

In reducing the expressions for U and T use has been made of the formulae:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{2}{3} R_1, & l_2 &= \frac{2}{3} R_2, \\
\Sigma \mu_1 \xi^2 &= \frac{1}{3} M_1 R_1^2, & \Sigma \mu_2 x^2 &= \frac{1}{3} M_2 R_2^2, \\
\Sigma \mu_1 \eta^2 &= \frac{1}{3} M_1 R_1^2, & \Sigma \mu_2 y^2 &= \frac{1}{3} M_2 R_2^2, \\
\Sigma \mu_1 \zeta^2 &= \frac{1}{6} M_1 R_1^2, & \Sigma \mu_2 z^2 &= \frac{1}{6} M_2 R_2^2.
\end{aligned}$$

$b_3$  and  $c_1$  occur in the same way in both T and U, so do  $\beta_3$  and  $\gamma_1$ .

The equations of motion are:

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{a}_2 (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2) + \dot{a}_2 M_2 R_2^2 \} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{a}_2 + \dot{a}_2 \} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{6} R_1^2 M_1 + M_2 \{ R_1^2 + \frac{2}{3} R_1 R_2 + \frac{1}{6} R_2^2 \}] \ddot{b}_3 + M_2 R_2 (\frac{2}{3} R_1 + \frac{1}{6} R_2) \ddot{\beta}_3 + \\
+ g (\frac{2}{3} R_1 M_1 - \frac{1}{6} R_2 M_2) b_3 - g \frac{2}{3} M_2 R_2 \beta_3 = 0, \quad . \quad (16)
\end{aligned}$$

$$(\frac{2}{3} R_1 + \frac{1}{6} R_2) \ddot{b}_3 + \frac{1}{6} R_2 \ddot{\beta}_3 - \frac{2}{3} g b_3 + \frac{2}{3} g \beta_3 = 0, \quad . \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{6} R_1^2 M_1 + M_2 \{ R_1^2 + \frac{2}{3} R_1 R_2 + \frac{1}{6} R_2^2 \}] \ddot{c}_1 + M_2 R_2 (\frac{2}{3} R_1 + \frac{1}{6} R_2) \ddot{\gamma}_1 + \\
+ g (\frac{2}{3} R_1 M_1 - \frac{1}{6} R_2 M_2) c_1 - g \frac{2}{3} M_2 R_2 \gamma_1 = 0. \quad . \quad (18)
\end{aligned}$$

and

$$(\frac{2}{3} R_1 + \frac{1}{6} R_2) \ddot{c}_1 + \frac{1}{6} R_2 \ddot{\gamma}_1 - \frac{2}{3} g c_1 + \frac{2}{3} g \gamma_1 = 0. \quad . \quad (19)$$

§ 2. *Integration of the equations of motion.*  $a_2$  and  $a_2$  do not occur in U. This indicates the existence of other positions of equilibrium than the particular position which we have taken as our initial position. The equilibrium is not disturbed if one of the hemispheres or both be turned through an arbitrary angle about their axis of revolution.

The solution of the equations (14) and (15) is:

$$a_2 = (a_2)_0 + \left(\frac{da_2}{dt}\right)_0 t,$$

$$\dot{a}_2 = (\dot{a}_2)_0 + \left(\frac{d\dot{a}_2}{dt}\right)_0 t.$$

If  $\left(\frac{da_2}{dt}\right)_0$  and  $\left(\frac{d\dot{a}_2}{dt}\right)_0$  be infinitely small, it is only after an infinite time that the terms  $\left(\frac{da_2}{dt}\right)_0 t$  and  $\left(\frac{d\dot{a}_2}{dt}\right)_0 t$  cease to be infinitely small.  $(a_2)_0$  and  $(\dot{a}_2)_0$  may be supposed to be zero.

$\dot{a}_2 = 0$  and  $\ddot{a}_2 = 0$  means no relative angular velocity about the common normal at the point of contact, or no spinning.

To prove this algebraically we calculate the moment of momentum of the upper hemisphere about the common normal at the point of contact, which normal is parallel to the axis of Z. This moment of momentum is

$$\Sigma \mu_2 \{(\xi - \xi_2)(\dot{\eta} - \dot{\eta}_2) - (\eta - \eta_2)(\dot{\xi} - \dot{\xi}_2)\}.$$

$\dot{\eta}_2$  and  $\dot{\xi}_2$  are zero and the only term which is not a small quantity of the second order is  $-\dot{a}_2 \Sigma \mu_2 (x^2 + y^2)$ , which term is zero for  $\dot{a}_2 = 0$ .

The equations (16) and (17) form one set of differential equations and the equations (18) and (19) another.

To solve the system (16) and (17) we put:

$$b_3 = M \sin (pt + k),$$

$$\beta_3 = N \sin (pt + k),$$

and thus find for the determination of  $p$  the following determinantal equation:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} R_1^2 M_1 + \\ + M_2 (R_1^2 + \frac{1}{2} R_1 R_2 + \frac{1}{2} R_2^2) p^2 - \\ - g (\frac{1}{2} R_1 M_1 - \frac{1}{2} R_2 M_2) \\ \hline (\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2) p^2 + \frac{1}{2} g \\ \hline \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_2 R_2 (\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} R_2) p^2 + \\ + \frac{1}{2} g M_2 R_2 \\ \hline \frac{1}{2} R_2^2 p^2 - \frac{1}{2} g \\ \hline \end{vmatrix} = 0,$$

which is equal to:

$$R_1^2 R_2 \left[ \left( \frac{1}{10} \right)^2 M_1 + \left( \frac{1}{10} - \frac{7}{10} \right) M_2 \right] p^4 - g \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} R_1 (R_1 + R_2) M_1 + \left\{ \frac{1}{10} R_1^2 + \frac{1}{2} R_1 R_2 + \frac{1}{10} R_2^2 \right\} M_2 \right] p^2 + g^2 \left\{ \frac{1}{6} R_1 M_1 - \frac{1}{3} R_2 M_2 \right\} = 0.$$

The roots  $p^2$  of this equations are real. (Routh, Advanced Rigid Dynamics, p. 36).

They are positive for

$$\frac{9}{8} R_1 M_1 > \frac{1}{3} R_2 M_2$$

or

$$9 R_1 M_1 > 40 R_2 M_2$$

which is the only condition for the stability of the system as the set of equations (18) and (19) gives us the same equation for the determination of  $p^2$ .

If the two hemispheres be of the same material or have the same density this condition becomes:

$$R_1 > \frac{1}{3} R_2 \sqrt{360}.$$

If the two hemispheres be of the same dimensions, but the density of the lower hemisphere be  $k$  times that of the upper one, we find:

$$k > 4\frac{1}{3}.$$

The equation in  $p^2$  can be written:

$$R_1^2 R_2 [0.4225 M_1 + 0.259375 M_2] p^4 - g [0.24375 R_1 (R_1 + R_2) M_1 + \{0.375 R_1^2 + 1.25 R_1 R_2 + 0.65 R_2^2\} M_2] p^2 + g^2 \{0.140625 R_1 M_1 - 0.625 R_2 M_2\} = 0.$$

The complete solution of the differential equations (16) and (17) is, if  $p_1^2$  and  $p_2^2$  be the roots of the equation in  $p^2$ :

$$b_3 = M_1 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 \sin(p_2 t + k_2),$$

$$\beta_3 = N_1 \sin(p_1 t + k_1) + N_2 \sin(p_2 t + k_2).$$

The ratios  $\frac{M_1}{N_1}$  and  $\frac{M_2}{N_2}$  are equal to the ratios of the constituents of the same row in the determinantal equation if in those constituents for  $p^2$  be substituted  $p_1^2$  or  $p_2^2$ , thus:

$$M_1 : N_1 = \left\{ \left( \frac{1}{4} R_1 + \frac{1}{10} R_2 \right) p_1^2 + \frac{1}{2} g \right\} : \left\{ \frac{1}{10} R_2 p_1^2 - \frac{1}{3} g \right\}$$

and

$$M_2 : N_2 = \left\{ \left( \frac{1}{8} R_1 + \frac{1}{10} R_2 \right) p_2^2 + \frac{1}{2} g \right\} : \left\{ \frac{1}{10} R_2 p_2^2 - \frac{1}{3} g \right\}.$$

Putting  $N_1 = h_1 M_1$  and  $N_2 = h_2 M_2$ , we may write:

$$b_3 = M_1 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 \sin(p_2 t + k_2),$$

$$\beta_3 = h_1 M_1 \sin(p_1 t + k_1) + h_2 M_2 \sin(p_2 t + k_2).$$

The solution of the differential equations (18) and (19) is :

$$c_1 = M_3 \sin(p_1 t + k_3) + M_4 \sin(p_2 t + k_4),$$

$$\gamma_1 = h_1 M_3 \sin(p_1 t + k_3) + h_2 M_4 \sin(p_2 t + k_4).$$

In these formulae  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $h_1$  and  $h_2$  have everywhere the same value, which is for  $h_1$  and  $h_2$  a function of  $p_1$  and  $p_2$ .  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  and  $k_4$  have constant values which are functions of the initial conditions.  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $k_1$  and  $k_2$  are the same functions of  $(b_3)_0$ ,  $(\dot{b}_3)_0$ ,  $(\beta_3)_0$  and  $(\dot{\beta}_3)_0$  as  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $k_3$  and  $k_4$  are of  $(c_1)_0$ ,  $(\dot{c}_1)_0$ ,  $(\gamma_1)_0$  and  $(\dot{\gamma}_1)_0$ .

As an example let us suppose that the system be put in motion by a blow, we have:  $(b_3)_0 = (\beta_3)_0 = (c_1)_0 = (\gamma_1)_0 = 0$ , and  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ .

$$\text{From } (\dot{b}_3)_0 = p_1 M_1 \cos(p_1 t)_0 + p_2 M_2 \cos(p_2 t)_0,$$

$$(\dot{\beta}_3)_0 = p_1 h_1 M_1 \cos(p_1 t)_0 + p_2 h_2 M_2 \cos(p_2 t)_0,$$

or:

$$(\dot{b}_3)_0 = p_1 M_1 + p_2 M_2,$$

$$(\dot{\beta}_3)_0 = p_1 h_1 M_1 + p_2 h_2 M_2,$$

follows :

$$M_1 = \frac{1}{p_1} \frac{h_2 (\dot{b}_3)_0 - (\dot{\beta}_3)_0}{h_2 - h_1}$$

and

$$M_2 = \frac{1}{p_2} \frac{(\dot{\beta}_3)_0 - h (\dot{b}_3)_0}{h_2 - h_1}.$$

We also find:

$$M_3 = \frac{1}{p_1} \frac{h_2 (\dot{c}_1)_0 - (\dot{\gamma}_1)_0}{h_2 - h_1}$$

and

$$M_4 = \frac{1}{p_2} \frac{(\dot{\gamma}_1)_0 - h_1 (\dot{c}_1)_0}{h_2 - h_1}.$$

§ 3. *Further examination of the motion.* It is easy to determine the trace of the lower hemisphere on the fixed horizontal plane.

We find for that trace by substituting in  $l$  and  $m$  the co-ordinates of the point of contact:

$$\begin{aligned} l_1 &= -c_1 R_1, \\ m_1 &= b_3 R_1, \end{aligned}$$

or:

$$\begin{aligned} l_1 &= -R_1 \{M_3 \sin(p_1 t + k_3) + M_4 \sin(p_2 t + k_4)\}, \\ m_1 &= R_1 \{M_1 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 \sin(p_2 t + k_2)\}. \end{aligned}$$

We find for the trace of the upper hemisphere on the plane face of the lower hemisphere:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -\gamma_1 R_2 = -R_2 \{h_1 M_3 \sin(p_1 t + k_3) + h_2 M_4 \sin(p_2 t + k_4)\}, \\ \eta_2 &= \beta_3 R_2 = R_2 \{h_1 M_1 \sin(p_1 t + k_1) + h_2 M_2 \sin(p_2 t + k_2)\}. \end{aligned}$$

Those two curves are not closed in general, they are harmonic curves, both having two principal oscillations of the same period.

We have for the trace on the curved surface of the lower hemisphere:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= l_1 \\ \eta_1 &= m_1 \end{aligned}$$

and for the trace on the upper hemisphere:

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_2, \\ y_2 &= \eta_2. \end{aligned}$$

That point of one of the hemispheres, which is the point of contact in the position of equilibrium, always remains in the same normal on the plane on which the surface is rolling. To prove this let us calculate  $\xi$  and  $\eta$  for this point of the upper hemisphere, by substituting  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = l_2 - R_2$ . This gives:

$$\begin{aligned} \xi &= a + a_3(l_2 - R_2) = 0, \\ \eta &= \beta + \beta_3(l_2 - R_2) = 0. \end{aligned}$$

The distance of the point from the plane is a small quantity of the second order, for:

$$\zeta = \gamma + \gamma_3(l_2 - R_2) = R_2 + l_1 - \gamma_3 l_2 + \gamma_3 l_2 - \gamma_3 R_2 = l_1 + (1 - \gamma_3)R_2$$

or:

$$\zeta - l_1 = (1 - \gamma_3)R_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \beta_3^2)R_2.$$

§ 4. *More than two hemispheres.* We now place a third hemisphere on the second, in the same way as this second hemisphere has been placed on the first. We use a fourth rectangular set of co-ordinates,  $Z_3$ . UVW, through  $Z_3$  the centre of gravity of the third hemisphere. The axes of this set are in the position of equilibrium parallel to the corresponding axes of the other sets. We have for a point ( $u, v, w$ ) of this third hemisphere:

$$x = A + A_1 u + A_2 v + A_3 w,$$

$$y = B + B_1 u + B_2 v + B_3 w,$$

$$z = C + C_1 u + C_2 v + C_3 w,$$

$$\xi = a + a_1(A + A_1 u + A_2 v + A_3 w) + a_2(B + B_1 u + B_2 v + B_3 w) + a_3(C + C_1 u + C_2 v + C_3 w),$$

$$\eta = \beta + \beta_1(A + A_1 u + A_2 v + A_3 w) + \beta_2(B + B_1 u + B_2 v + B_3 w) + \beta_3(C + C_1 u + C_2 v + C_3 w),$$

$$\zeta = \gamma + \gamma_1(A + A_1 u + A_2 v + A_3 w) + \gamma_2(B + B_1 u + B_2 v + B_3 w) + \gamma_3(C + C_1 u + C_2 v + C_3 w),$$

$$l = a + a_1 a + a_2 \beta + a_3 \gamma + (a_1 a_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) A + (a_1 a_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) B + (a_1 a_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) C + \{ (a_1 a_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) A_1 + (a_1 a_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) B_1 + (a_1 a_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) C_1 \} u + \{ (a_1 a_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) A_2 + (a_1 a_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) B_2 + (a_1 a_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) C_2 \} v + \{ (a_1 a_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1) A_3 + (a_1 a_2 + a_2 \beta_2 + a_3 \gamma_2) B_3 + (a_1 a_3 + a_2 \beta_3 + a_3 \gamma_3) C_3 \} w,$$

with similar expressions for  $m$  and  $n$ .

Differentiated they give as a first approximation:

$$\dot{l} = \dot{a} + \dot{a} + \dot{a}_3 \gamma + \dot{A} + (\dot{a}_3 + \dot{a}_3) C + (\dot{A}_2 + \dot{a}_2 + \dot{a}_2) v + (\dot{A}_3 + \dot{a}_3 + \dot{a}_3) w$$



or

$$\dot{l} = \dot{a}_3 (R_1 + R_2 + R_3 - l_3) + \dot{a}_3 (R_2 + R_3 - l_3) + \dot{A}_3 (R_3 - l_3), \\ + (\dot{a}_2 + \dot{a}_2 + \dot{A}_2) v + (\dot{a}_3 + \dot{a}_3 + \dot{A}_3) w$$

and also:

$$\dot{m} = \dot{b}_3 (R_1 + R_2 + R_3 - l_3) + \dot{\beta}_3 (R_2 + R_3 - l_3) + \dot{B}_3 (R_3 - l_3) + \\ + (\dot{b}_1 + \dot{\beta}_1 + \dot{B}_1) u + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3 + \dot{B}_3) w,$$

$$\dot{n}_1 = (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1 + \dot{C}_1) u + (\dot{c}_2 + \dot{\gamma}_2 + \dot{C}_2) v.$$

We find for the  $n$  of the centre of gravity of the third hemisphere:

$$c + c_1 a + c_2 \beta + c_3 \gamma + (c_1 a_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1) A + \\ + (c_1 a_2 + c_2 \beta_2 + c_3 \gamma_2) B + (c_1 a_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) C,$$

or, omitting terms of the third order:

$$c + c_1 a + c_2 \beta + c_3 \gamma + (c_1 + \gamma_1) A + (c_2 + \gamma_2) B + (c_1 a_3 + c_2 \beta_3 + c_3 \gamma_3) C,$$

or, finally, omitting constant terms:

$$- \frac{1}{2} (c_1^2 + b_3^2) (R_2 + R_3 - l_3) - \frac{1}{2} (\gamma_1^2 + \beta_3^2) (R_3 - l_3) - \\ - c_1 \gamma_1 (R_2 + R_3 - l_3) - b_3 \beta_3 (R_2 + R_3 - l_3) - (c_1 + \gamma_1) C_1 (R_3 - l_3) - \\ - (b_3 + \beta_3) B_3 (R_3 - l_3) + \frac{1}{2} l_3 (C_1^2 + B_3^2),$$

if we take into consideration, that between the A's, B's and C's and their differential coefficients similar relations exist as between the  $a$ 's,  $b$ 's and their differential coefficients and between the  $\alpha$ 's,  $\beta$ 's and  $\gamma$ 's and their differential coefficients.

$A_2$ ,  $B_3$  and  $C_1$  are the three new independent variables, our system has nine independent variables, as it ought to have and we can use the same method we have used for two hemispheres.

We have for the whole system:

$U$  = the value calculated for a system consisting of two hemispheres +  $M_3 g$  multiplied by the value just found for the  $n$  of the centre of gravity of the third hemisphere.

It is a function consisting of terms which contain separately:  $b_3^2$ ,  $\beta_3^2$ ,  $B_3^2$ ,  $c_1^2$ ,  $\gamma_1^2$ ,  $C_1^2$ ,  $b_3 \beta_3$ ,  $b_3 B_3$ ,  $\beta_3 B_3$ ,  $c_1 \gamma_1$ ,  $c_1 C_1$  and  $\gamma_1 C_1$ . Terms containing  $a_2$ ,  $a_2$  or  $A_2$  do not occur. As was the case for two hemispheres,  $b_3$  and  $c_1$  and also  $\beta_3$  and  $\gamma_1$  occur in the same way in  $U$ , so do  $B_3$  and  $C_1$ . None of the products of

one of the co-ordinates  $b_3$ ,  $\beta_3$  or  $B_3$  and one of the co-ordinates  $c_1$ ,  $\gamma_1$  or  $C_1$  occurs.

To the expression for  $2T$  is added for the third hemisphere:

$$\begin{aligned} M_3[(\dot{a}_3^2 + \dot{b}_3^2)(R_1 + R_2 + R_3 - l_3)^2 + (\dot{a}_3^2 + \dot{\beta}_3^2)(R_2 + R_3 - l_3)^2 + \\ + (\dot{A}_3^2 + \dot{B}_3^2)(R_3 - l_3)^2 + 2(\dot{a}_3\dot{a}_3 + \dot{b}_3\dot{\beta}_3)(R_1 + R_2 + R_3 - l_3)(R_2 + R_3 - l_3) + \\ + 2(\dot{a}_3\dot{A}_3 + \dot{b}_3\dot{B}_3)(R_1 + R_2 + R_3 - l_3)(R_3 - l_3) + 2(\dot{a}_3\dot{A}_3 + \dot{\beta}_3\dot{B}_3) \times \\ \times (R_2 + R_3 - l_3)(R_3 - l_3)] + \{(\dot{b}_1 + \dot{\beta}_1 + \dot{B}_1)^2 + (\dot{c}_1 + \dot{\gamma}_1 + \dot{C}_1)^2\} \Sigma \mu_3 u^2 + \\ + \{(\dot{a}_2 + \dot{a}_2 + \dot{A}_2)^2 + (\dot{c}_2 + \dot{\gamma}_2 + \dot{C}_2)^2\} \Sigma \mu_3 v^2 + \{(\dot{a}_3 + \dot{a}_3 + \dot{A}_3)^2 + \\ + (\dot{b}_3 + \dot{\beta}_3 + \dot{B}_3)^2\} \Sigma \mu_3 w^2. \end{aligned}$$

The co-ordinates have been so chosen, that the symmetry is greatest, for deriving the equations of motion we have to substitute the variables  $\dot{a}_2$ ,  $\dot{a}_2$ ,  $\dot{A}_2$ ,  $\dot{b}_3$ ,  $\dot{\beta}_3$ ,  $\dot{B}_3$ ,  $\dot{c}_1$ ,  $\dot{\gamma}_1$  and  $\dot{C}_1$ .

We shall not write down the equations of motion, but we shall determine their nature.

We have in the first place a set of differential equations, homogeneous and linear in  $\ddot{a}_2$ ,  $\ddot{a}_2$  and  $\ddot{A}_2$  and which do not contain any other co-ordinates.

The solution is:

$$a_2 = (a_2)_0 + \left( \frac{da_2}{dt} \right)_0 t,$$

$$a_2 = (a_2)_0 + \left( \frac{da_2}{dt} \right)_0 t,$$

$$A_2 = (A_2)_0 + \left( \frac{dA_2}{dt} \right)_0 t.$$

We further have two other sets of differential equations. The first set contains the co-ordinates  $b_3$ ,  $\beta_3$  and  $B_3$  and their second differential coefficients, the second set the co-ordinates  $c_1$ ,  $\gamma_1$  and  $C_1$  and their second differential coefficients. In the two sets the corresponding terms have the same coefficients.

The solution is:

$$b_3 = M_1 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 \sin(p_2 t + k_2) + M_3 \sin(p_3 t + k_3)$$

$$\beta_3 = M_1 h_1 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 h_2 \sin(p_2 t + k_2) + M_3 h_3 \sin(p_3 t + k_3)$$

$$B_3 = M_1 h_4 \sin(p_1 t + k_1) + M_2 h_5 \sin(p_2 t + k_2) + M_3 h_6 \sin(p_3 t + k_3)$$

$$c_1 = M_4 \sin(p_1 t + k_4) + M_5 \sin(p_2 t + k_5) + M_6 \sin(p_3 t + k_6)$$

$$\gamma_1 = M_4 h_1 \sin(p_1 t + k_4) + M_5 h_2 \sin(p_2 t + k_5) + M_6 h_3 \sin(p_3 t + k_6)$$

$$C_1 = M_4 h_4 \sin(p_1 t + k_4) + M_5 h_5 \sin(p_2 t + k_5) + M_6 h_6 \sin(p_3 t + k_6)$$

$p_1$ ,  $p_2$  and  $p_3$  are the roots of a cubic which always has real roots, the conditions that the roots be positive constitute the conditions for the stability of the equilibrium. We may now expect to find more than one condition.

The  $h$ 's are functions of  $p_1$ ,  $p_2$  and  $p_3$ .

The  $M$ 's and  $k$ 's are determined from the initial conditions and  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  and  $M_3$  are the same functions of  $(b_3)_0$ ,  $(\beta_3)_0$ ,  $(B_3)_0$ ,  $(\dot{b}_3)_0$ ,  $(\dot{\beta}_3)_0$ , and  $(\dot{B}_3)_0$  as  $k_4$ ,  $k_5$ ,  $k_6$ ,  $M_4$ ,  $M_5$  and  $M_6$  are of  $(c_1)_0$ ,  $(\gamma_1)_0$ ,  $(C_1)_0$ ,  $(\dot{c}_1)_0$ ,  $(\dot{\gamma}_1)_0$  and  $(\dot{C}_1)_0$ .

The motion has now three principal oscillations.

The different traces are all curves of three periods, the same for all the traces. Here also the system does not in general return to its initial position.

We shall now place a fourth hemisphere on the third and we shall for the sake of symmetry take other letters to designate the direction cosines of the axes and the position of the origin.

We shall corite  $a^I, a_1^I, \dots c_3^I$  for has been called in the above  $a, a_1 \dots c_3$

" " "  $a^{II}, a_1^{II}, \dots c_3^{II}$  " " " " " " " " "  $a, a_1 \dots \gamma_3$

" " "  $a^{III}, a_1^{III}, \dots c_3^{III}$  " " " " " " " " "  $A, A_1 \dots C_3$

and the corresponding co-ordinates for the fourth hemisphere will be  $a^{IV}, a_1^{IV}, \dots c_3^{IV}$ .

Between these quantities there exist similar relations as between the other  $a$ 's.

Let  $R.XYZ$  be the set of axes fixed in space,  $Z_1.X^IY^IZ^I$  the set which is fixed in the first hemisphere and so on, we then find for a point of the fourth hemisphere:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a}_3^I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - l_4) + \dot{a}_3^{II}(R_2 + R_3 + R_4 - l_4) + \dot{a}_3^{III}(R_3 + R_4 - l_4) + \\ &\quad + \dot{a}_3^{IV}(R_4 - l_4) + y^{IV}(\dot{a}_2^I + \dot{a}_2^{II} + \dot{a}_2^{III} + \dot{a}_2^{IV}) + z^{IV}(\dot{a}_3^I + \dot{a}_3^{II} + \dot{a}_3^{III} + \dot{a}_3^{IV}), \\ \dot{y} &= \dot{b}_3^I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - l_4) + \dot{b}_3^{II}(R_2 + R_3 + R_4 - l_4) + \dot{b}_3^{III}(R_3 + R_4 - l_4) + \\ &\quad + \dot{b}_3^{IV}(R_4 - l_4) + x^{IV}(\dot{b}_1^I + \dot{b}_1^{II} + \dot{b}_1^{III} + \dot{b}_1^{IV}) + z^{IV}(\dot{b}_3^I + \dot{b}_3^{II} + \dot{b}_3^{III} + \dot{b}_3^{IV}), \\ \dot{z} &= x^{IV}(\dot{c}_1^I + \dot{c}_1^{II} + \dot{c}_1^{III} + \dot{c}_1^{IV}) + y^{IV}(\dot{c}_2^I + \dot{c}_2^{II} + \dot{c}_2^{III} + \dot{c}_2^{IV}). \end{aligned}$$

We may expect to find for a point of the  $n^{\text{th}}$  hemisphere:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a}_3^I (R_1 + R_2 \dots + R_n - l_n) + \dot{a}_3^{II} (R_2 + \dots R_n - l_n) + \dot{a}_3^{III} (R_3 \dots R_n - l_n) + \\ &+ \dots + \dot{a}_3^n (R_n - l_n) + y^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{a}_2^\kappa + z^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{a}_3^\kappa, \\ \dot{y} &= \dot{b}_3^I (R_1 + R_2 + \dots R_n - l_n) + \dot{b}_3^{II} (R_2 + \dots R_n - l_n) + \dot{b}_3^{III} (R_3 + \dots R_n - l_n) + \\ &+ \dots + \dot{b}_3^n (R_n - l_n) + x^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{b}_1^\kappa + z^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{b}_3^\kappa, \\ \dot{z} &= x^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{c}_1^\kappa + y^n \sum_{\kappa=1}^n \dot{c}_2^\kappa. \end{aligned}$$

As to the  $z$  of the centre of gravity, it is for the fourth hemisphere:

$$\begin{aligned} &(c_1^I a_3^{IV} + c_2^I b_3^I) (R_2 + R_3 + R_4 - l_4) + \\ &(c_1^I a_3^{III} + c_1^{II} a_3^{III} + c_2^I b_3^{III} + c_2^{II} b_3^{III}) \times (R_3 + R_4 - l_4) + \\ &+ \{(c_1^I + c_1^{II} + c_2^{III}) a_3^{IV} + (c_2^I + c_2^{II} + c_3^{III}) b_3^{IV}\} (R_4 - l_4) - \\ &- \frac{1}{2} (c_1^{IV} + c_2^{IV}) (R_2 + R_3 + R_4 - l_4) - \frac{1}{2} (c_1^{III} + c_2^{III}) (R_3 + R_4 - l_4) - \\ &- \frac{1}{2} (c_1^{II} + c_2^{II}) \times (R_4 - l_4) + \frac{1}{2} l_4 (c_1^{IV} + c_2^{IV}). \end{aligned}$$

and for the fifth:

$$\begin{aligned} &(c_1^I a_3^{II} + c_2^I b_3^{II}) (R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - l_5) + \{(c_1^I + c_1^{II}) a^{III} + \\ &+ (c_2^I + c_2^{II}) b^{IV}\} \times (R_3 + R_4 + R_5 - l_5) + \{(c_1^I + c_1^{II} + c_1^{III}) a_3^{IV} + \\ &+ (c_2^I + c_2^{II} + c_3^{III}) b_3^{IV}\} (R_4 + R_5 - l_5) + \{(c_1^I + c_1^{II} + c_1^{III} + c_1^{IV}) a_3^V + \\ &+ (c_2^I + c_2^{II} + c_2^{III} + c_2^{IV}) b_3^V\} (R_5 - l_5) - \frac{1}{2} (c_1^{IV} + c_2^{IV}) (R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - l_5) - \\ &- \frac{1}{2} (c_1^{III} + c_2^{III}) (R_3 + R_4 + R_5 - l_5) - \frac{1}{2} (c_1^{II} + c_2^{II}) (R_4 + R_5 - l_5) - \\ &- \frac{1}{2} (c_1^{IV} + c_2^{IV}) (R_5 - l_5) + \frac{1}{2} l_5 (c_1^{IV} + c_2^{IV}). \end{aligned}$$

We have again chosen those co-ordinates that give the greatest regularity to the expression; for the deduction of the differential equations U and T should be expressed in the  $a_2$ 's,  $b_3$ 's and  $c_1$ 's only.

We can discuss for four and for five hemispheres the nature of the solution.

We have in the first place:

$$a_2^* = (a_2^*)_0 + (\dot{a}_2^*)_0 t,$$

of the other co-ordinates the  $b_3$ 's form one set and the  $c_1$ 's an other.

The motion has four principal oscillations if the system consist of four hemispheres and five if it consist of five hemispheres.

It is to be expected that also for more than five hemispheres the number of principal oscillations is equal to that of the hemispheres.

There is no reason why we should limit the application of this method to hemispheres. We may substitute for them segments of spheres and it is not necessary that each segment be the same part of the corresponding sphere. In this case also we expect to find the number of principal oscillations equal to that of the segments.

§ 5. *Two half ellipsoids of revolution.* We shall now substitute for the two hemispheres two half ellipsoids of revolution.

The equation of the upper one is:

$$\frac{x^2 + y^2}{p_2^2} + \frac{(z - l_2)^2}{q_2^2} = 1,$$

$l_2$  signifying the distance of the centre of gravity from the plane face.

The co-ordinates  $x_2$ ,  $y_2$  and  $z_2$  of the point of contact and  $\gamma$  are determined by:

$$\frac{a_1 x_2}{p_2^2} + \frac{a_2 y_2}{p_2^2} + \frac{a_3(z_2 - l_2)}{q_2^2} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$\frac{\beta_1 x_2}{p_2^2} + \frac{\beta_2 y_2}{p_2^2} + \frac{\beta_3(z_2 - l_2)}{q_2^2} = 0 \dots \dots \dots (21)$$

$$l_1 = \gamma + \gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 z_2 \dots \dots \dots (22)$$

and

$$\frac{x_2^2 + y_2^2}{p_2^2} + \frac{(z_2 - l_2)^2}{q_2^2} = 1 \dots \dots \dots (23)$$

From (20) and (21) we find :

$$x_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \cdot \frac{p_2^2}{q_2^2} (z_2 - l_2) \quad \text{and} \quad y = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \cdot \frac{p_2^2}{q_2^2} (z_2 - l_2).$$

Substitution of these values in (23) gives .

$$(z_2 - l_2)^2 = \frac{q_2^4 \gamma_3^2}{p_2^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_3^2 q_2^2}$$

or

$$z_2 - l_2 = -\frac{1}{q} \{q_2^2 - p_2^2 + p_2^2 \gamma_3\}.$$

We may write for the equation (22) :

$$l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2 = \gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 (z_2 - l_2).$$

If in this equation we substitute :

$$x_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_3} \frac{p_2^2}{q_2^3} (q_2^2 - p_2^2 + p_2^2 \gamma_3)$$

and

$$y_2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{p_2^2}{q_2^3} (q_2^2 - p_2^2 + p_2^2 \gamma_3)$$

it becomes :

$$l_1 - \gamma - \gamma_3 l_2 = -\frac{1}{q_2} \{p_2^2 + (q_2^2 - p_2^2) \gamma_3\}.$$

In the foregoing we have made use of :

$$\gamma_3 = 1 - \frac{1}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$

$$\frac{1}{\gamma_3} = 1 + \frac{1}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2).$$

The conditions that the point of contact has no velocity relatively to the axes  $Z_1 \mathcal{E} H Z$  are :

$$\dot{a} + \dot{a}_1 x_2 + \dot{a}_2 y_2 + \dot{a}_3 z_2 = 0,$$

$$\dot{\beta} + \dot{\beta}_1 x_2 + \dot{\beta}_2 y_2 + \dot{\beta}_3 z_2 = 0,$$

$$\dot{\gamma} + \dot{\gamma}_1 x_2 + \dot{\gamma}_2 y_2 + \dot{\gamma}_3 z_2 = 0.$$

The first two give as a first approximation :

$$\dot{a} = \dot{a}_3(q_2 - l_2),$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_3(q_2 - l_2).$$

Everything goes here as in the case of two hemispheres, it is unnecessary to complete the solution. What has been said about the principal periods in the case of hemispheres may be repeated here, we may also place a third and a fourth ellipsoid on the foregoing and it is not necessary that we take half ellipsoids, for the plane upper face may be taken an arbitrary section normal to the axis of revolution.

If instead of segments of ellipsoids of revolution we had taken two segments of arbitrary ellipsoids the products  $\dot{a}_2\dot{c}_1$ ,  $\dot{a}_2\dot{\gamma}_1$  etc. would have entered into the function T, if we had not taken the corresponding axes parallel to each other in the initial state and allowed no spinning. The consequence would have been that the 6 differential equations did not form three different sets and that we should find 6 principal oscillations.

FORMELN FÜR DIE KRÜMMUNG EINES SYSTEMS VON EBENEN  
CURVEN IN KRÜMMLINIGEN COORDINATEN. ERWEITERUNG  
DER ERHALTENEN RESULTATE AUF DEN RAUM

VON

DR. A. D. VAN DER HARST.

---

Ist die Gleichung einer ebenen Curve in rechtwinkligen oder im Allgemeinen in krummlinigen Coordinaten gegeben, so betrachtet man in den meisten Fällen die Rechnungsgrößen als Functionen *einer* unabhängig veränderlichen Coordinate. Man kann aber auch die gegebene Curve als zugehörige Curve eines *Systems* betrachten, also *beide* Coordinaten als unabhängig Veränderliche annehmen und erhält auf diese Weise viel symmetrischere Formeln. Wir wollen diese Methode auf die Krümmung ebener Curven anwenden, und gehen dabei von der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{da}{dx}, \text{ oder } \frac{1}{R} = \frac{db}{dy}$$

aus, wo mit  $R$  der Krümmungsradius, mit  $(x, y)$  der betrachtete Punkt der Curve und mit  $a$  und  $b$  die Richtungscoefficienten der Normale (d. h. der Cosinus und Sinus des Winkels, welchen diese mit der Axe  $OX$  bildet) bezeichnet sind. Bei dieser Differentiation ist vorausgesetzt, dass der Punkt *auf der Curve bleibt*; betrachtet man also die gegebene Curve als Teil des Systems

$$F(xy) = C,$$

so genügen  $dx$  und  $dy$  der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$$



Folglich ist

$$\frac{1}{R} = \frac{da}{dx} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a}{b} \frac{\partial a}{\partial y},$$

und, da  $a^2 + b^2 = 1$ , also  $a \frac{\partial a}{\partial y} + b \frac{\partial b}{\partial y} = 0$  ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Besonders sei erwähnt, dass man für  $a$  und  $b$  nur Ausdrücke substituieren kann, welche für das *System* gelten. Betrachtet man z. B. den Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  als Teil des Systems  $x^2 + y^2 = C$ , so sehe man in  $a = \frac{x}{r}$  und  $b = \frac{y}{r}$  die  $r$  *nicht* als Constante an; betrachtet man aber  $x^2 + y^2 = r^2$  als Teil des Systems  $x + \frac{y^2}{x} - \frac{r^2}{x} = C$ , so ist  $r$  wirklich eine *Constante*.

Es handelt sich nun darum, den Ausdruck  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$  auf beliebige krummlinige Coordinaten zu transformiren. Wir nennen diese Coordinaten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  und führen für alle folgenden Entwicklungen die Abkürzungen

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho_1} = y_1, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_2} = x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho_2} = y_2,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = k_{11}, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = k_{12}, \quad x_2^2 + y_2^2 = k_{22},$$

ein. Es gelten nun die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + x_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 1, \\ y_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und entsprechende für  $\frac{\partial \rho_1}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \rho_2}{\partial y}$ ; folglich giebt Auflösung:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{m_{11}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = \frac{m_{12}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{m_{21}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial y} = \frac{m_{22}}{\Delta}, \quad . \quad . \quad (3)$$

wo  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$  durch  $\Delta$  und ihre Minoren durch  $\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix}$  dargestellt sind. Aus diesen Formeln ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial \rho_1} \right) = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial \rho_2} \right) = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_2} \quad (4)$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach erst mit  $x_1$  und  $y_1$ , und dann mit  $x_2$  und  $y_2$ , und addirt die Produkte, so erhält man

$$k_{11} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = x_1,$$

$$k_{21} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = x_2,$$

und entsprechende Gleichungen für  $\frac{\partial \rho_1}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \rho_2}{\partial y}$ .

Die Determinante dieses Systems ist  $\Delta^2$ ; nennt man ihre Minoren  $M_{11}$ ,  $M_{12} = M_{21}$  und  $M_{22}$ , so ergibt sich durch Auflösung

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{M_{11}}{\Delta^2} x_1 + \frac{M_{12}}{\Delta^2} x_2, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{M_{21}}{\Delta^2} x_1 + \frac{M_{22}}{\Delta^2} x_2, \quad (5)$$

und entsprechende Gleichungen für  $\frac{\partial \rho_1}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \rho_2}{\partial y}$ , folglich für die Lamé'schen Functionen  $h_1$  und  $h_2$

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right)^2 = \frac{M_{11}}{\Delta^2}, \quad h_2^2 = \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial y} \right)^2 = \frac{M_{22}}{\Delta^2} \quad (6)$$

Der Ausdruck  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$  lässt sich nun wie folgt transformiren:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{\Delta_1 F} \Delta_2 F + \Sigma \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right).$$

wo

$$\Delta_1 F = \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}, \quad \Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

und  $\Sigma$  die Summe von je zwei Gliedern bezeichnet.

Nach Formeln (5) aber ist, wenn man zur Abkürzung

$$U_1 = \frac{1}{\Delta^2} \left( M_{11} \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + M_{12} \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right), \quad U_2 = \frac{1}{\Delta^2} \left( M_{21} \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + M_{22} \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right)$$

setzt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = U_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial y}{\partial \rho_2};$$

also gelten, wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $\frac{\partial F}{\partial x}$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , oder mit  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right)$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right)$  multiplicirt und die Produkte addirt, die Gleichungen

$$(\Delta_1 F)^2 = U_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + U_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_2},$$

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right) = U_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right) + U_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{1}{\Delta_1 F} \right);$$

mittels Differentiation und Anwendung der Formeln (4) erhält man

$$\Delta_2 F = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\Delta U_1) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\Delta U_2) \right]$$

und also

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{\Delta U_1}{\Delta_1 F} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{\Delta U_2}{\Delta_1 F} \right) \right], \quad (7)$$

Diese Formel, welche vom Zeichen des  $\Delta$  *unabhängig* ist, erhält eine einfachere Form, wenn man die Winkel  $\nu_1$  und  $\nu_2$  einführt, welche die Normale der gegebenen Curve resp. mit deren der  $\rho_1$ - und  $\rho_2$ -Curven bildet. Sieht man nämlich  $\frac{\partial \rho_1}{\partial x} : h_1, \frac{\partial \rho_1}{\partial y} : h_1$  und  $\frac{\partial \rho_2}{\partial x} : h_2, \frac{\partial \rho_2}{\partial y} : h_2$  (wo  $h_1$  und  $h_2$  *positiv* sind) als Richtungscoefficienten dieser Normalen an, so ist:

$$\cos \nu_1 = \frac{\sum \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}}{h_1 \Delta_1 F} = \frac{U_1}{h_1 \Delta_1 F}; \quad \cos \nu_2 = \frac{U_2}{h_2 \Delta_1 F},$$

also  $\frac{\Delta U_1}{\Delta_1 F} = h_1 \Delta \cos \nu_1$ ,  $\frac{\Delta U_2}{\Delta_1 F} = h_2 \Delta \cos \nu_2$ , oder da nach Formeln (6)  $h_1 \Delta = k_2$  und  $h_2 \Delta = k_1$  ist ( $\Delta$  ist *positiv* gewählt und ebenso sind  $k_1$  und  $k_2$  die *positiven* Quadratwurzeln von  $k_{11}$  und  $k_{22}$ ):

$$\frac{\Delta U_1}{\Delta_1 F} = k_2 \cos \nu_1 \quad \frac{\Delta U_2}{\Delta_1 F} = k_1 \cos \nu_2.$$

Die Grössen  $k_1$  und  $k_2$  lassen sich aus der Figur leicht berechnen;  $k_1 d\rho_1$  und  $k_2 d\rho_2$  nämlich sind die unendlich kleinen Bogenelemente der  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Curven, deren Richtungen für *wachsende*  $\rho_1$  und  $\rho_2$  durch  $\frac{x_1}{k_1} \frac{y_1}{k_1}$  und  $\frac{x_2}{k_2} \frac{y_2}{k_2}$  dargestellt werden. Auch  $\Delta$  hat eine geometrische Bedeutung, ist nämlich der Inhalt des aus  $k_1$  und  $k_2$  (in die ebengenannten Richtungen) construirten Parallelogramms, also  $\Delta = k_1 k_2 \sin \epsilon$ , wenn  $\epsilon$  den eingeschlossenen Winkel (oder dessen Supplement) bezeichnet. Deshalb erhält man aus (7):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{k_1 k_2 \sin \epsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} (k_2 \cos \nu_1) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} (k_1 \cos \nu_2) \right] \quad . \quad (8)$$

Zur Berechnung von  $\cos \nu_1$  und  $\cos \nu_2$  wollen wir noch bemerken, dass die *Tangente* der gegebenen Curve sich stets durch Parallelogrammconstruction aus  $k_1 d\rho_1$  und  $k_2 d\rho_2$  bestimmen lässt; hieraus ergibt sich durch Drehung um einen *rechten* Winkel sofort eine solche Construction für die *Normale*. In Bezug auf das *Zeichen* des Cosinus aber muss noch bestimmt werden, welche von zwei Richtungen in den Normalen der  $\rho_1$  und  $\rho_2$

Curven durch  $\frac{\partial \rho_1}{\partial x} : h_1$  u. s. w. dargestellt werden. Eine genaue

Betrachtung lehrt 1<sup>o</sup>. dass diese Richtungen, senkrecht auf die eine Curve, mit dem Bogenelemente der anderen einen *spitzen* Winkel bilden, 2<sup>o</sup>. dass das Seitenverhältniss im Parallelogramm der Normalen demjenigen im ersten Par. *entgegengesetzt*, also

$$\text{gleich} - \frac{k_2 d\rho_2}{k_1 d\rho_1} = + k_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} : k_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \text{ ist.}$$

Für den besonderen Fall, dass die Systeme von Curven *senkrecht* auf einander stehen, und die gegebene Curve einem

dieser Systeme z. B.  $\rho_2$  angehört, hat man  $\epsilon = \nu_1 = 90^\circ$  und  $\nu_2 = 0^\circ$  also:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial k_1}{\partial \rho_2} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \quad (9)$$

wie auch direct aus der Figur ersichtlich ist.

Die Formel (8) ist anwendbar in den Fällen, wo die Gleichung der Curve ihrer Entstehungsart entspricht oder durch die Wahl der Coordinaten eine einfache Form erhält. Wir wollen hiervon einige Beispiele anführen.

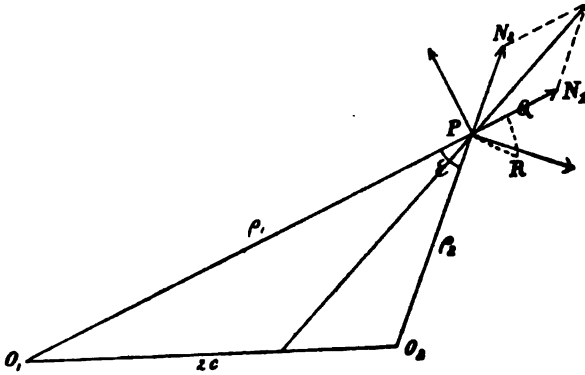


Fig. 1.

I. *Ellipse*. Als Coordinaten nehmen wir die Brennstrahlen, also als Gleichung der Curve:  $\rho_1 + \rho_2 = 2a$ , zugehörige Curve des Systems  $\rho_1 + \rho_2 = C$ . Sei P (siehe fig. 1) der betrachtete Punkt, PR das Bogenelement der  $\rho_2$ -Curve bei *wachsendem*  $\rho_1$ ; im rechtwinkligen Dreieck PQR ist nun:

$$PR = \frac{PQ}{\sin \epsilon} = \frac{d\rho_1}{\sin \epsilon} (\angle O_1 P O_2 = \epsilon) \text{ also } k_1 = \frac{1}{\sin \epsilon}.$$

Ebenso:  $k_2 = \frac{1}{\sin \epsilon}$ . Da  $k_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} : k_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} = 1$  ist (die *positiven* Richtungen der Tangenten und Normalen sind in der Figur angedeutet worden) *halbirt* die Normale  $\angle O_1 P O_2$ , daher erhält man nach Formel (8):

$$\frac{1}{R} = \sin \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{\cos \frac{1}{2} \epsilon}{\sin \epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{\cos \frac{1}{2} \epsilon}{\sin \epsilon} \right) \right].$$

Hierin ist  $\varepsilon$  eine Function von  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , nämlich, wenn man  $O_1O_2$  durch  $2c$  bezeichnet, ist  $4c^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \varepsilon$ , folglich erhält man durch Ausführung der Differentiation:

$$\frac{1}{R} = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \cos \frac{1}{2} \varepsilon}{2\rho_1\rho_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \cos \frac{1}{2} \varepsilon;$$

also die Eigenschaft: Die Krümmung der Ellipse ist gleich dem arithmetischen Mittel der Beiträge, welche jeder der Brennpunktskreise in die Richtung der Normale liefert.

Da die Halbirungslinie von  $\angle O_1PO_2$  d. h. die Länge  $N$  der Normale von  $P$  bis zum grossen Ase gleich  $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cos \frac{1}{2} \varepsilon$  ist, hat man auch  $R = N : \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon$ , welche Formel die bekannte Construction des Krümmungscentrums giebt.

Für die *Hyperbel* erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \sin \varepsilon \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) \right] = \frac{(\rho_1 - \rho_2) \sin \frac{1}{2} \varepsilon}{2\rho_1\rho_2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \sin \frac{1}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

also dieselbe Eigenschaft und Construction; ebenso für die *Parabel* als Grenzfall.

II. *Der Kegelschnitt im Allgemeinen.* Der Kegelschnitt stellt sich als Ort eines Punktes  $P$  (fig. 2) dar, dessen Abstände ( $PB$  und  $PQ$ ) zu einem festen Punkt  $B$  und einer festen Gerade ein constantes Verhältniss  $e$  haben. Entsprechend dieser Entstehungsart nehmen wir als Gleichung der Curve  $\rho_2 - e\rho_1 = 0$ , also  $\rho_2 - e\rho_1 = C$  als Gleichung des Systems, wo  $e$  eine Constante ist. Hätten wir  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = e$  als Gleichung der Curve, also  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = C$  als Gleichung des Systems angesehen, so wäre  $e$  keine Constante. Die Rechnung giebt in beiden Fällen:

$$\frac{1}{R} = d^2 : e \times BQ^2,$$

wo  $d$  der constante Abstand  $BD$  des Brennpunkts zur Directrix bezeichnet.  $BQ$  nun steht in einfacher Beziehung zur Normale

$N$ , gemessen von  $P$  bis zum Schnittpunkt  $A$  mit der grossen Axe;  $BQ$  und  $N$  nämlich sind homologe Seiten in den ähnlichen Dreiecken  $ABP$  und  $BPQ$ ; folglich ist  $N = e \times BQ$  und da  $\angle APB = \angle BQP = \angle DBQ$ ,

$$R = N \times \frac{BQ^2}{a^2} = N : \cos^2 \angle APB,$$

d. h. die schon erwähnte Construction ist allgemein gültig für alle Kegelschnitte.

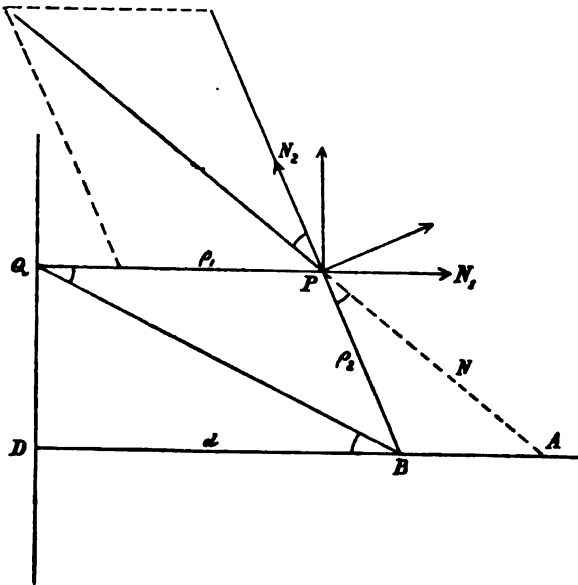


Fig. 2.

III. *Ellipse*. Wir denken uns die Ellipse als Ort eines festen Punktes  $P$  auf einer Geraden  $XY$  (fig. 3), welche sich mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels  $XOY$  bewegt; entsprechend dieser Entstehungsart betrachten wir die Abschnitte  $OX$  und  $OY$  als Coordinaten; also wird die Gleichung der Curve:  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = (a + b)^2$ , wo  $PY = a$  und  $PX = b$  die halben Axen der Ellipse darstellen. Wir sehen:  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = C$  als Gleichung des Systems an und setzen dabei voraus, dass der Punkt  $P$  die nun *veränderlich* gedachte Gerade  $XY$  stets im Verhältniss  $PY : PX = a : b$  theilt; folglich

ist  $k_1 = \frac{a}{a+b}$ ,  $k_2 = \frac{b}{a+b}$ , also  $k_2 \frac{\partial F}{\partial \rho_1} : k_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_2} = \frac{b}{a+b} \rho_1 : \frac{a}{a+b} \rho_2$ .

Dies giebt die bekannte Construction der Normale PM und ferner nach Formel (8):

$$\frac{1}{R} = \frac{ab}{PM^3}.$$

Man kann nun leicht zeigen, dass PM den halben conjugirten Durchmesser von OP darstellt (z. B. denke man sich  $\triangle MXY$

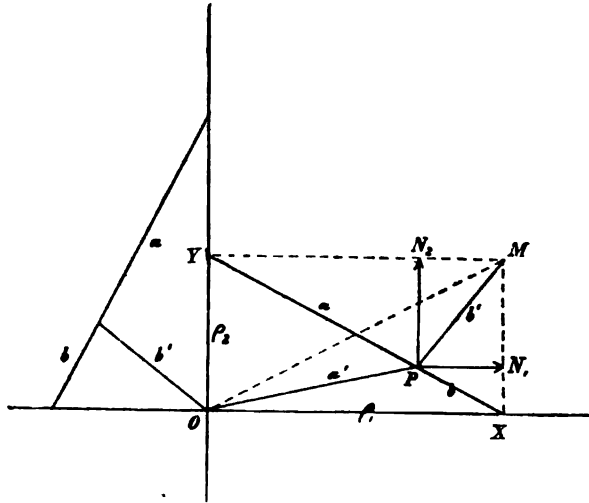


Fig. 3.

so gegen  $\triangle OXY$  gestellt, dass MY und OY *gleiche*, MX und OX aber *entgegengesetzte* Richtung haben; MP hat sich nun um einen *rechten* Winkel gedreht und ist also *parallel* der

Tangente in P); daher erhält man:  $\frac{1}{R} = ab : b'^2$ .

Ferner giebt die Figur eine Construction der Axen aus conjugirten Durchmessern; nämlich die *Axengrößen* bestimmen sich durch Addition und Subtraction der *halben* Seite OM des Dreiecks OPM und der Median auf diese Seite, die *Axenrichtungen* sind parallel den Winkelhalbirenden dieser Geraden.

IV. *Epicykloide*. Die Curve entsteht bekanntlich durch Abrollung eines Kreises  $C_2O = r_2$  (fig. 4) auf der Peripherie eines anderen festen Kreises  $C_1O = r_1$ ; der erzeugende Punkt



der Curve heisse P, und A sei die Lage dieses Punktes, in welcher er Berührungspunkt der beiden Kreise ist. Entsprechend dieser Entstehungsart nehmen wir  $\angle AC_1O = \varphi_1$  und  $\angle OC_2P = \varphi_2$  als Coordinaten,  $r_1\varphi_1 - r_2\varphi_2 = 0$  und  $r_1\varphi_1 - r_2\varphi_2 = C$  resp. als Gleichungen der Curve und des Systems an. Aus der Figur ist ersichtlich, dass:  $k_1 = C_1P$ ,  $k_2 = r_2$ , also  $k_2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} : k_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = r_1 : -C_1P$  ist, folglich geht die Normale durch den Berührungspunkt O.

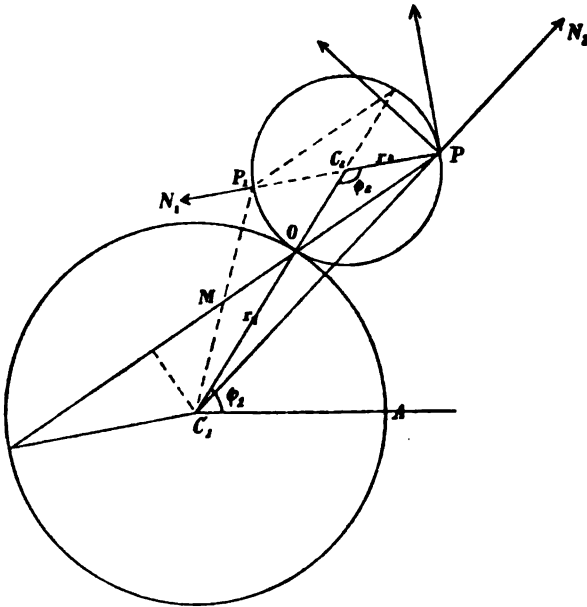


Fig. 4.

Man erhält also nach Formel (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{2\Delta C_1 C_2 P} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (r_2 \sin \frac{1}{2} \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} (C_1 P \cos C_1 P O) \right] = \\ &= - \frac{r_1 + 2r_2}{4r_2(r_1 + r_2) \sin \frac{1}{2} \varphi_2}, \end{aligned}$$

oder

$$R = -2r_2 \sin \frac{1}{2} \varphi_2 \left( 1 + \frac{r_1}{r_1 + 2r_2} \right).$$

Aus dem *negativen* Zeichen geht hervor, dass die Richtung vom Krümmungscentrum nach P der oben gewählten Richtung PO

in der Normale *entgegengesetzt* ist; demnach giebt die Grösse von R folgende Construction des Krümmungscentrums: Man ziehe vom diametral gegenüber P liegenden Punkte P' eine Gerade nach C<sub>1</sub>; der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Normale ist das Krümmungscentrum M.

Erweiterung der obigen Formeln auf den Raum.

Wir haben gesehen, dass der Ausdruck  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$  für die Krümmung *ebener* Curven gefunden, sich leicht auf krummlinige Coordinaten transformiren lässt; eine ähnliche Behauptung gilt für den Ausdruck  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$  im Raum. Analog den früheren Entwicklungen findet man nämlich:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \frac{\Delta U_1}{\Delta_1 F} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{\Delta U_2}{\Delta_1 F} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left( \frac{\Delta U_3}{\Delta_1 F} \right) \right]. \quad (10)$$

und

$$= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} (M_1 \cos \nu_1) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} (M_2 \cos \nu_2) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} (M_3 \cos \nu_3) \right] \quad (11)$$

$$\text{wo } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, U_1 = \frac{1}{\Delta^2} \left( M_{11} \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + M_{12} \frac{\partial F}{\partial \rho_2} + M_{13} \frac{\partial F}{\partial \rho_3} \right) \text{ u.s.w.}$$

und die positiven Quadratwurzeln von  $M_{11} M_{22} M_{33}$  mit  $M_1, M_2$  und  $M_3$  bezeichnet sind; *geometrisch* stellen  $M_1, M_2$  und  $M_3$  auch die Seitenflächen des Parallelepipedons aus  $k_1, k_2$  und  $k_3$ ,  $\Delta$  den Inhalt dieses Par. dar.

Ein einfacher Beweis der letzten Formel, der sich auch auf 2 oder mehr Veränderlichen anwenden lässt, ist der folgende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} &= \left( \frac{\partial a}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) + \\ &+ \left( \frac{\partial a}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho_3} \frac{\partial \rho_3}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \rho_3} \frac{\partial \rho_3}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \rho_3} \frac{\partial \rho_3}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

oder nach Formeln (3) für drei Veränderliche :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho_1} & \frac{\partial b}{\partial \rho_1} & \frac{\partial c}{\partial \rho_1} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{\partial a}{\partial \rho_2} & \frac{\partial b}{\partial \rho_2} & \frac{\partial c}{\partial \rho_2} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \frac{\partial a}{\partial \rho_3} & \frac{\partial b}{\partial \rho_3} & \frac{\partial c}{\partial \rho_3} \end{vmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a & b & c \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right], \end{aligned}$$

da von den durch Ausführung der Differentiation erhaltenen 9 Gliedern, dreimal 2 Glieder sich aufheben.

Sieht man nun wieder analog den früheren Voraussetzungen

$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} : h_1, \frac{\partial \rho_1}{\partial y} : h_1, \frac{\partial \rho_1}{\partial z} : h_1$  als Richtungscoefficienten der *positiven*

Normale auf den Flächen  $\rho_1 = C$  an, welche Normale mit dem Bogenelemente  $k_1 d\rho_1$  einen *spitzen* Winkel bildet, und macht man ähnliche Voraussetzungen in Beziehung auf die Normalen der  $\rho_2$ - und  $\rho_3$ -Flächen, so sind die 3 letzten Determinante bei positiver  $\Delta$  resp. gleich  $M_1 \cos \nu_1, M_2 \cos \nu_2, M_3 \cos \nu_3$ ; also ist die Formel (11) bewiesen.

Wir beantworten nun die Frage: Hat auch der Ausdruck

$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$  eine *geometrische* Bedeutung? Um dies zu lösen

betrachten wir den besonderen Fall, dass die  $\rho_1$ -,  $\rho_2$ - und  $\rho_3$ -Flächen einander *rechtwinklig* schneiden und die gegebene Fläche zu einem dieser Systeme z.B.  $\rho_3 = C$  gehört. Beide Formeln (10) und (11) geben alsdann :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \frac{\partial}{\partial \rho_3} (k_1 k_2) = \frac{1}{k_2 k_3} \frac{\partial k_2}{\partial \rho_3} + \frac{1}{k_1 k_3} \frac{\partial k_1}{\partial \rho_3}.$$

Nach Formel (9) stellen die letzteren Ausdrücke die Krümmungen der Schnittcurven dar, welche die  $\rho_1$ - und  $\rho_2$ -Flächen auf die gegebene Fläche  $\rho_3$  erzeugen; nach dem *Theorem von Dupin* sind dies die Hauptkrümmungen, also:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die vorhergehende Betrachtung war zur *Auffindung* der geometrischen Bedeutung sehr bequem, ist aber den besonderen Voraussetzungen wegen kein strenger Beweis. Wir wollen daher noch einen anderen Beweis anführen.

Wir betrachten die gegebene Fläche als zugehörige Fläche eines Systems und nehmen sofort  $x$ ,  $y$  und  $z$  als Coordinaten an.

Aus den beiden ersten Formeln von *Rodrigues* (siehe Darboux I, pag. 199)

$$\frac{da}{R} = dx \quad \frac{db}{R} = dy \quad \frac{dc}{R} = dz,$$

erhält man, da  $a$ ,  $b$  und  $c$  nun Functionen von 3 *unabhängig* Veränderlichen sind, die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{R}\right) dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{1}{R}\right) dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz = 0$$

Auch ist:  $adx + bdy + cdz = 0,$

da der Punkt  $(x, y, z)$  bei der unendlich kleinen Verschiebung auf der gegebenen Fläche bleibt.

Die Elimination von  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  giebt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{R} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{1}{R} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

folglich:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{c \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) - \left( a \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial z} \right)}{c},$$

oder da  $a \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial z} + c \frac{\partial c}{\partial z} = 0$  ist:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \dots \dots \dots (12)$$

Schon *Riemann* (Ges. W., 2e Aufl., pag. 329) hat  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$  als Bedingung für eine Minimalfläche angegeben; dieselbe Bedingung in *orthogonalen* krummlinigen Coordinaten findet man in *Darboux II*, pag. 463.

Betrachtet man die gegebene Fläche *nicht* als zugehörige Fläche eines Systems, also  $a$  und  $b$  als Functionen von 2 unabhängig Veränderlichen z.B.  $x$  und  $y$ , und schliesst man die unter der letzteren Annahme gebildeten partiellen Differentialquotienten in Klammern ein, so erhält man die Gleichung:

$$\left| \begin{array}{cc} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) & - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right) - \frac{1}{R} \end{array} \right| = 0$$

also:  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)$ . Dies giebt, gleich 0 gesetzt, die schon von *Lagrange* gegebene Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0.$$

Schliesslich bemerken wir noch, dass die in (8) gefundene Formel ein besonderer Fall derjenigen ist, welche *Bonnet* 1860 für die *geodetische* Krümmung von auf einer *willkürlichen* Fläche liegenden Curven gegeben hat und erwähnen noch einen Beweis, der sich den vorigen Betrachtungen anschliesst.

Seien wieder  $x$ ,  $y$  und  $z$  die rechtwinklige,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  und  $\rho_3$  die krummlinige Coordinaten und die gegebene Fläche zugehörige Fläche des Systems  $\rho_3 = C$ ; für das betrachtete System von Curven bleibt also  $\rho_3$  *constant*, während  $\rho_1$  und  $\rho_2$  sich ändern.

Es handelt sich zunächst darum, die Richtungscoefficienten und die Grösse der schiefen Krümmung zu bestimmen; die geodetische Krümmung  $\frac{1}{R_g}$  lässt sich alsdann durch Projection der schiefen Krümmung auf die Tangentialebene berechnen. Nennt man wieder  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Richtungscoefficienten der Flächennormale,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  diejenige der Curventangente, so sind

$$\frac{-d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} \quad \frac{-d\beta}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} \quad \frac{-d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}$$

(wo  $d\alpha$ ,  $d\beta$  und  $d\gamma$  vollständige Differentiale sind und die Richtung vom Krümmungscentrum nach P als die *positive* vorausgesetzt ist) die Richtungscoefficienten der schiefen Krümmung, während ihre Projection auf die Tangentialebene, weil sie auf  $(\alpha\beta\gamma)$  und  $(abc)$  *senkrecht* steht, die Minoren der fehlenden Reihe in  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$  als Richtungscoefficienten hat. Die

schiefe Krümmung ist  $\frac{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}{ds}$  also:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}}{ds}.$$

Aus dieser Gleichung gehen *drei* andere hervor, indem man im letzten Determinant die Columnen mit  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  multipliziert, die Producte addirt und auf den Gleichungen:

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0, \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Rücksicht nimmt; also erhält man:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \alpha a & b & c \\ \alpha^2 & \beta & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha ds} = \frac{\begin{vmatrix} d\beta & d\gamma \\ b & c \end{vmatrix}}{dx},$$

oder durch Ausführung der Differentiation, wo  $\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \lambda$  gesetzt wird:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{R_g} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_1} \\ b & c \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial \rho_2} & \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} \\ b & c \end{vmatrix}$$

und 2 analoge Gleichungen für  $y$  und  $z$ . Diese Gleichungen sind für den Beweis der Bonnet'schen Formel sehr geeignet.

Man multiplicire sie der Reihe nach mit den Minoren der fehlenden Reihe in  $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$  und addire die Producte; wenn

das  $\Sigma$  Zeichen eine Summe von 3 analogen Gliedern darstellt, bekommt man:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}}{R_\gamma} = \Sigma x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1} + \lambda \Sigma x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2},$$

oder da  $x_1 + \lambda x_2$ ,  $y_1 + \lambda y_2$ ,  $z_1 + \lambda z_2$  den  $\alpha \beta \gamma$  proportional sind und  $\Sigma \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2}$ , also auch  $\Sigma (x_1 + \lambda x_2) \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2} = 0$  ist:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}}{R_\gamma} = \Sigma x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1} - \Sigma x_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_2} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\Sigma x_2 \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho_2} (\Sigma x_1 \alpha).$$

Dies ist die Bonnet'sche Formel;  $\frac{x_2}{k_2} \frac{y_2}{k_2} \frac{z_2}{k_2}$  und  $\frac{x_1}{k_1} \frac{y_1}{k_1} \frac{z_1}{k_1}$  nämlich sind die Richtungscoefficienten der *positiven* Tangenten an den Schnittcurven, welche die  $\rho_1$ - und  $\rho_2$ -Flächen auf die

gegebene Fläche erzeugen, und  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}$ , also  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$

(wenn *positiv* gewählt)  $= k_1 k_2 \sin \epsilon$ .

Die Formel erhält aber die in (8) angegebene Gestalt, wenn man statt der Tangenten die *Normalen* der Curven betrachtet; und wieder als *positive* Richtung in den Normalen der Schnittcurven diejenige von zweien annimmt, welche mit der entsprechenden positiven Tangente einen *spitzen* Winkel bildet.

Alsdann sind bei positiver  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$  die Minoren der fehlenden

Reihe in  $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$  dividirt durch  $k_2$ , die Richtungscoefficienten für die positive Normale der von der  $\rho_1$ -Fläche erzeugte Schnittcurve, während für die andere Schnittcurve die Minoren

von  $\left\| \begin{smallmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{smallmatrix} \right\|$  durch  $k_1$  dividirt, als Richtungscoefficienten gelten.

Haben also  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die früher angegebene Bedeutung, so ist:

$$k_2 \cos \nu_1 = \left\| \begin{smallmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{smallmatrix} \right\| \times \left\| \begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{smallmatrix} \right\| = \Sigma x_2 \alpha$$

$$k_1 \cos \nu_2 = \left\| \begin{smallmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{smallmatrix} \right\| \times \left\| \begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{smallmatrix} \right\| = - \Sigma x_1 \alpha,$$

folglich:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{k_1 k_2 \sin \epsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} (k_2 \cos \nu_1) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} (k_1 \cos \nu_2) \right].$$


---



## SUR LA TRANSFORMATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE,

PAR

W. KAPTEYN.

Je me propose, dans cette note de démontrer l'identité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \sqrt{1-\mu^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{1-\mu^2 \sin^2 \varphi} \quad (\mu^2 < 1)$$

dont la démonstration directe présente quelques difficultés.

D'après la théorie des fonctions hypergéométriques on a

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, x)$$

et

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} (1-xv)^{-\alpha} dv}{\int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} dv}$$

(Forayth, p. 193 & p. 230). En substituant la dernière formule dans la première, on obtient

$$\frac{\int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} (1-xv)^{-\alpha} dv}{\int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} dv} =$$

$$= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} (1-xv)^{\beta-\gamma} dv}{\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} dv}.$$

Si, dans cette équation, on pose

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = n, \quad \gamma = n + 1, \quad x = \mu^2, \quad v = \sin^2 \varphi,$$

les dénominateurs se réduisent respectivement à

$$\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \pi$$

et les intégrales des numérateurs aux intégrales qui *figurent* dans les deux membres de l'équation proposée.

---

## SUR LA DIFFÉRENTIATION SOUS LE SIGNE D'INTÉGRATION,

PAR

|

W. KAPTEYN.

Considérant l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(z, \alpha, \beta) dz$$

la différentiation, d'après la méthode ordinaire, donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dz - f(\alpha, \alpha, \beta) \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} dz + f(\beta, \alpha, \beta) \end{array} \right.$$

Cette méthode implique que la fonction reste finie et continue entre et aux limites. Or, il y a des cas, où la fonction étant infinie aux limites, les dérivées de l'intégrale sont parfaitement déterminées. Dans ces cas les formules précédentes ne sont plus applicables; je me propose de faire voir qu'une légère transformation suffit pour lever cette difficulté.

Posons à cet effet

$$z = (\beta - \alpha)x + \alpha$$

l'intégral devient

$$I = (\beta - \alpha) \int_0^1 f\{(\beta - \alpha)x + \alpha, \alpha, \beta\} dx,$$

d'où

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = - \int_0^1 f\{(\beta - \alpha)x + \alpha, \alpha, \beta\} dx + (\beta - \alpha) \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_0^1 f\{(\beta - \alpha)x + \alpha, \alpha, \beta\} dx + (\beta - \alpha) \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) dx$$

la variable  $z$  étant remplacé par  $(\beta - \alpha) x + \alpha$  dans les dernières intégrales.

En revenant à la variable  $z$ , on aura

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(z, \alpha, \beta) dz + \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\beta - z}{\beta - \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) dz$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(z, \alpha, \beta) dz + \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) dz$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \{ (\beta - z) \frac{\partial f}{\partial z} + (\beta - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha} - f \} dz \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \{ (z - \alpha) \frac{\partial f}{\partial z} + (\beta - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \beta} + f \} dz \end{cases}$$

Il est bien évident que les formules (1) se déduisent aisément des formules (2), quand la fonction est continue aux limites.

Pour donner un exemple, considérons l'intégrale définie

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)}} = \pi$$

qui a une valeur déterminée, mais dont l'élément devient infinie aux limites. On ne peut appliquer à cette expression la règle de différentiation (1) : en l'appliquant on obtient une différence n'ayant aucun sens, de deux termes infinis. Cependant la règle de différentiation (2), bien applicable à ce cas, donne

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0$$

comme on pouvait s'y attendre.

De même l'intégrale définie

$$I = \int_a^\beta \frac{z dz}{V(z^2 - \alpha^2)(\beta^2 - z^2)} = \frac{\pi}{2}$$

conduit aux formules

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = - \frac{\beta}{\beta - \alpha} \int_a^\beta \frac{(z^2 - \alpha\beta) dz}{(z + \alpha)(z + \beta) V(z^2 - \alpha^2)(\beta^2 - z^2)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \int_a^\beta \frac{(z^2 - \alpha\beta) dz}{(z + \alpha)(z + \beta) V(z^2 - \alpha^2)(\beta^2 - z^2)}$$

dont la valeur commune est zéro.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

---

Beknopte elementaire theorie der elliptische functiën, door Dr. F. DE BOER, hoogleeraar te Groningen. Een deel in 8°, 206 p., Groningen, J. B. Wolters, 1899.

Een voor velen aantrekkelijk onderwerp der hoogere wiskunde is ongetwijfeld de leer der elliptische functiën. In de eerste plaats vormt die leer een min of meer afgerond geheel, dat de rechtstreeksche toepassing veroorlooft van een groot aantal stellingen der algemeene functietheorie, wier beteekenis juist daardoor in een helder licht wordt geplaatst. En in de tweede plaats doet zich de theorie der E. F. meer en meer voor als eene soort van hoogere trigonometrie, die bij de studie van talrijke en zeer uiteenlopende onderdeelen der wiskunde weldra even onmisbaar blijkt, als de gewone trigonometrie dit is bij de behandeling van meer elementaire problemen. Maar al wordt de theoretische en de practische waarde van de E. F. algemeen erkend, minder eenstemmigheid heerscht er aangaande de vraag, hoe men op de beste wijze tot de studie dezer functiën doordringt. Tot voor korten tijd wezen de leerboeken, die eene grondige behandeling der E. F. beoogden, bijna zonder onderscheid hier een weg aan, die zijn uitgangspunt nam in de algemeene functietheorie of in de leer der integralen met complexe grenzen, een weg ten slotte alleen bruikbaar voor de eigenlijke mathematici. Zooals de schrijver van het hier aan te kondigen leerboek in zijn Voorbericht opmerkt, zal het wellicht hieraan zijn toe te schrijven, dat het gebruik en de toepassing der E. F. bij de behandeling van mechanische en van mathematisch-physische problemen tot heden zoo beperkt is gebleven. Van groot belang is elke poging te achten, die de theorie der E. F. meer toegankelijk maakt voor hen, voor wie de wiskunde in de eerste plaats hulpwetenschap is, en van wie men niet mag vergen, dat zij aan eene theorie,

zooals bijv. die der complexen, veel aandacht hebben geschonken. Eene eerste poging in die richting is door Halphen gedaan, die in zijn beroemd leerboek er naar streefde te bewerkstellen, dat de leer der E. F. werd opgenomen onder de algemeene leerstof, waaronder hij verstaat: „ce que doivent retenir et savoir appliquer tous les hommes qui s'adonnent aux sciences exactes et, sans cultiver les Mathématiques, ont toujours besoin de les connaître”<sup>1)</sup>. Maar de poging van Halphen is niet afdoende geweest. Afgezien van den grooten omvang van zijn boek, welke op den beginner ontmoedigend werkt, is tengevolge van het eenigszins zonderlinge punt van uitgang de geheele voorstelling noodeloos omslachtig geworden. De studie van zijn boek wordt daardoor zeer bezwaarlijk voor iemand, die zich niet vooraf op andere wijze met de E. F. min of meer gemeenzaam heeft gemaakt.

Sedert zijn andere leerboeken van geringeren omvang verschenen (Bijv.: GREENHILL, *The applications of elliptic functions*, 1892; APPELL et LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, 1897), waarvan de schrijvers door eenvoud van voorstelling, door zoo elementair mogelijke bewijsvoering getracht hebben om de theorie der E. F. ook binnen het bereik te brengen van hen, die de aan de eigenlijke wiskunde verwante wetenschappen beoefenen. De thans te bespreken beknopte elementaire theorie gaat in deze voor velen gewenschte richting zoo mogelijk nog eene schrede verder. De schrijver onderstelt bij zijne lezers alleen eenige kennis van de theorie der oneindige reeksen en van de differentiaal- en integraalrekening. Op deze grondslagen bouwt hij zuiver algebraïsch, zooals hij zegt geheel rekenenderwijze, zijne theorie volledig op, en stelt daardoor een ieder, die met de beginselen der analyse vertrouwd is, in staat het uitgebreide veld der E. F. te betreden. Of nu het door den schrijver aangewezen pad minder bezwaarlijk is en het volgen er van minder inspanning vordert dan het begaan van den breeden weg, die tot heden de meeste wiskundigen gewoon zijn in te slaan, is eene vraag, waarover men slechts een subjectief oordeel hebben kan en die menigeen na het doorbladeren van schrijvers uitvoerigen arbeid niet onmiddellijk bevestigend zal

---

<sup>1)</sup> Halphen. *Traité des fonctions elliptiques*, 1886, Préface.

durven beantwoorden. Zeer zeker echter zal de lezer tot de gevolgtrekking komen, dat in dit boek de grondigheid en de strengheid niet hebben geleden en dat deze „elementaire” theorie niet is als zoovele andere, die door een voorgewend streven naar eenvoud en duidelijkheid tot oppervlakkige en verkeerde opvattingen aanleiding geven. Gerust kan men beweren, dat hier met een minimum van onderstelde hulpmiddelen een maximum van uitkomsten is verkregen, terwijl een ieder, die eenigszins met de theorie der E. F. bekend is, de vernuftige wijze zal waardeeren, waarop de schrijver langs eenvoudigen weg soms vrij ingewikkelde resultaten afleidt. De volgende mededeelingen mogen strekken om eenig denkbeeld te geven van den inhoud van het boek.

Gelijk Jacobi neemt de schrijver zijn uitgangspunt in de  $\mathcal{S}$ -reeksen. Alleen met behulp van algebraïsche herleidingen worden in Hoofdstuk I. Thetafunctiën hare eigenschappen onderzocht, waaronder ook die, welke op de transformatie, inzonderheid op de transformatie van de 2<sup>e</sup> orde, betrekking hebben. In Hoofdstuk II. Dubbelperiodieke functiën worden vervolgens de  $\mathcal{S}$ -quotienten en hunne kwadraten beschouwd. Deze laatste leiden tot de studie van de  $p$ -functie van Weierstrass. Men vindt de voornaamste eigenschappen en formules bijeen, waaronder ook die, welke de wortels en de invarianten met de  $\mathcal{S}$ -constanten in verband brengen. De ont-aardingen worden besproken evenals de beide, voor de toepassingen meest belangrijke, gevallen, nl. die van positieven of van negatieven discriminant. Voor beide gevallen wordt een duidelijk overzicht gegeven van het verloop van  $p u$  en  $p' u$ , voor zoover dit bestaanbaar of zuiver imaginaire waarden betreft. Eindelijk wordt een en ander aangaande de dikwijls aan te wenden kwadratische transformatie behandeld. Daarna komen de functiën  $s n v$ ,  $c n v$ ,  $d n v$  der oudere theorie aan de beurt. Ook zij worden met behulp der  $\mathcal{S}$ -quotienten geconstrueerd. In het bijzonder wordt stil gestaan bij het geval van den bestaanbaren modulus tusschen 0 en 1. De additietheorema's, de ont-aardingen en de samenhang met de  $p$ -functie worden aangegeven.

De schrijver gaat in Hoofdstuk III. Additieve functiën over tot de beschouwing der  $\zeta$ -functiën, wier differentiaal-quotienten dubbelperiodiek zijn. Opmerking verdienen de uit-



voorige aanwijzingen omtrent het verloop der  $\zeta$ -functiën in de beide onderstellingen van een positieven of negatieven discriminant, alsmede het overzicht van het gedrag der grootheden  $\eta$  bij veranderlijke periodenverhouding. Ook de  $\zeta$ -functie wordt in verband gebracht met de kwadratische transformatie, terwijl ten slotte de oudere functie  $E(\eta)$  en hare samenhang met de  $\zeta$ -functie worden behandeld.

Hoofdstuk IV. De functiën  $\sigma(u)$  en  $\sigma_a(u)$  geeft in de eerste plaats de op de  $\mathfrak{S}$ -functiën berustende definitie der  $\sigma$ -functie, daarna de met behulp van de identiteit  $p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3$  verkregen reeksontwikkelingen voor  $pu$ ,  $\zeta u$ ,  $\log \sigma u$  en  $\sigma u$  volgens machten van  $u$ . Uit  $\mathfrak{S}$ -formules leidt de schrijver vervolgens de gewichtige grondformule af, die voor  $\sigma u$  het additietheorema vervangt, waarna ook het verband tusschen de wortelfuncties  $\sqrt{pu - e_a}$  en de speciale  $\sigma$ -functiën kan worden aangegeven. Dan komen de verdere eigenschappen en de ont-aardingen, terwijl weder het verloop de  $\sigma$ -functiën bij positieven en bij negatieven discriminant nauwkeurig wordt beschreven. De elementaire elliptische integraal van de derde soort der oudere theorie wordt in het kort vermeld.

Hoofdstuk V. Berekening van  $\int f(pu, p'u) du$  leert, hoe men de hier genoemde integralen heeft te behandelen. Uitgewerkte voorbeelden verduidelijken de gegeven voorschriften. Als toepassing wordt beschouwd de integraal  $\int \frac{df}{f}$  en de uitkomst wordt aangewend om te doen inzien, hoe elke rationale functie van  $pu$  en van  $p'u$  als een quotient van twee producten van  $\sigma$ -functiën kan worden geschreven, en welke betrekkingen tusschen polen en nulpunten van dergelijke functiën er noodzakelijk moeten bestaan.

Hoofdstuk VI. Algemeene additiefomules, meer inzonderheid voor den mathematicus bestemd, bevat de afleiding van formules voor  $p(u_1 + u_2 + \dots u_n)$  en  $\zeta(u_1 + u_2 + \dots u_n)$ , voor  $pn u$  en  $\zeta n u$ . Het hoofdstuk eindigt met eenige mededeelingen omtrent de dubbelperiodieke functiën van de 2<sup>e</sup> soort en hare ontbinding.

In Hoofdstuk VII. Veranderlijke invarianten wordt de afhankelijkheid der E. F. van een paar onafhankelijke

constanten, hetzij perioden, hetzij invarianten, onderzocht. Algemeen wordt nagegaan de uitwerking der operatie-symbolen

$$D = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3} \text{ en } H = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3}. \text{ Als toe-}$$

passing wordt gegeven een onderzoek der uitdrukkingen  $G_a = (e_a^2 - \frac{1}{2} g_a) \omega_1 - e_a \eta_1$ , waarvan de behandeling, onder andere van belang voor de theorie van den conischen slinger, bij Halphen te wenschen overlaat. Ten laatste bevat dit hoofdstuk de afleiding en verdere beschouwing van de hypergeometrische differentiaal-vergelijkingen, waarvan de genormaliseerde perioden  $\omega \Delta^{\frac{1}{2}}$  en  $\eta \Delta^{-\frac{1}{2}}$  als functiën van den absooluten invariant  $J$  voldoen.

Hoofdstuk VIII. Invoering der elliptische functiën is voor de toepassingen der theorie wederom van meer belang. Het begin (dat desnoods bij de lezing kan worden overgeslagen) houdt eenige beschouwingen in over algebraïsche krommen van het geslacht één. Daarna volgt eene uitvoerige beschrijving van de invoering van het elliptisch argument in eene elliptische integraal volgens de regelen zoowel van de oudere als van de nieuwere theorie, waarbij weder in het bijzonder op het in de toepassing bijna steeds voorkomende geval van bestaانبare coëfficiënten wordt gelet.

Eindelijk vindt men in Hoofdstuk IX. Numerische berekening uiteengezet hoe men in bepaalde gevallen tot afleiding van de einduitkomsten in getallen te handelen heeft. Gewezen moet hier worden op eene door den schrijver uitgewerkte methode ter bepaling van  $q$  uit den absooluten invariant  $J$ . Vermeld wordt verder, welk gebruik van de kwadratische transformatie hier kan worden gemaakt. Als toepassing wordt gegeven de berekening van  $q'_1$  in het geval, dat bij negatieven discriminant een der maxima of minima van  $\zeta u$  nul is. Eene dergelijke vraag wordt ook behandeld voor  $\zeta_3 u$  en  $\zeta_2 u$ , evenzoo wordt bij negatieven discriminant eene maximumwaarde van  $\eta_2 \omega_2$  bepaald. Van de uitkomsten dezer berekeningen was reeds eerder door den schrijver gebruik gemaakt.

Een paar practische tabellen besluiten dit zorgvuldig bewerkte leerboek, dat tegelijkertijd beknopt en volledig mag heeten.

**Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques** par HENRI PINET suivi d'un appendice donnant le détail des opérations par EMILE KRAUSS, 4<sup>o</sup>, 45 p. Parijs, Librairie Nony & C<sup>ie</sup>, 63 Boulevard Saint-Germain, 1899.

Het doel der verhandeling is de meetbare wortels te vinden van eene algebraïsche vergelijking met geheele coëfficiënten volgens eene handelwijze sneller dan de gebruikelijke. Wij laten aan den lezer over te oordeelen of de schrijver, die van zichzelf getuigt: „Les études juridiques qui ont fait l'objet de toute ma vie m'avaient peu préparé aux recherches mathématiques”, dit gewichtige doel bereikt heeft. Kl.

**Lobatto's Lessen over de Hoogere Algebra.** Vijfde druk, opnieuw bewerkt door A. E. RAHUSEN, Oud-hoogleraar aan de Polytechnische School. Een deel in 8<sup>o</sup>, 500 p., Sneek, J. F. van Druten, 1899.

Lobetto's lessen, aan iederen beoefenaar der wiskunde in ons land zoo wel bekend, zijn wederom in gewijzigden vorm verschenen.

De bewerker, die bij de vorige uitgave zich reeds groote moeite heeft gegeven om de leemten aan te vullen, welke in den loop der jaren in het oorspronkelijke werk waren aan den dag gekomen, heeft opnieuw verschillende verbeteringen aangebracht.

Aan hem is het te danken, dat Lobatto's lessen, zoowel wat den inhoud als den vorm betreft, niet verouderen, maar rekening blijven houden met de ontwikkeling, die de studie der algebra heeft ondergaan sedert onze geleerde landgenoot zijne lessen gaf. Menige bladzijde van het oude handboek is verdwenen, meer nog zijn er aan toegevoegd, de behandeling van sommige onderwerpen is ingekrompen, veel belangrijks, waarvan in de andere uitgaven geen sprake was of kon zijn, is er toegevoegd. Al deze vervormingen echter zijn met bedachtzaamheid aangebracht en strekken zonder uitzondering tot verhoogen van de waarde van het geheel.

Wanneer men dezen druk bij den vorigen vergelijkt, bemerkt men in de eerste plaats de nieuwe uitbreiding, die het boek heeft gekregen (van 445 p. tot 500 p.), en de betere volgorde der hoofdstukken. Kwam in den vierden druk het hoofdstuk

over complexe getallen achteraan in den vorm van een ahangsel, dit hoofdstuk gaat thans vooraf aan de inleidende beschouwingen over de algebraïsche vergelijkingen, en dientengevolge kon nu ook het bewijs voor het theorema van d'Alembert geplaatst worden, waar het behoort.

Gewichtige veranderingen zijn aangebracht in het hoofdstuk over oneindige reeksen. De behandeling van de allereerste convergentie-kenmerken van de eerste en tweede soort heeft aan strengheid gewonnen, terwijl het kenmerk van Raabe nu in den meer algemeen gebruikelijken vorm is gebracht. Van meer belang nog zijn de beschouwingen, die zijn toegevoegd over de convergentie van reeksen, wier termen doorlopende functiën zijn van eene veranderlijken grootheid, en het daarmee samengaan bewijs van de uniforme convergentie eener machtreeks.

Door de uitbreiding aan de theorie der reeksen gegeven, is de bewerker buitendien in staat geweest om in de hoofdstukken, die meer over de algebraïsche analyse handelen, verschillende verbeteringen aan te brengen. Eindelijk is in een nieuw hoofdstuk de beteekenis der transcendentale functiën voor complexe waarden der veranderlijke uiteengezet, wat als een belangrijke aanwinst is te beschouwen.

Ten slotte zij ons nog eene enkele opmerking vergund. In dit leerboek der algebra, dat zooveel uiteenlopende onderwerpen aanroert, waaronder er zijn, die bij eerste studie groote inspanning vereischen, wordt noch bij gelegenheid van de behandeling der symmetrische functiën en der eliminatiemethoden, noch naar aanleiding van de algebraïsche oplossing der 3e- en 4e-machtsvergelijkingen met een enkel woord van het begrip invariant gewag gemaakt. Allermint wenschen wij daarvan den bewerker een verwijt te maken. Blijkbaar heeft hij bij de keuze der te behandelen stof met groote zorgvuldigheid rekening gehouden met de behoeften en de belangen van hen, voor wie in de eerste plaats dit leerboek is bestemd. Wij zouden alleen hem willen verzoeken om tegen het tijdstip, dat wederom eene nieuwe uitgave noodig zal zijn geworden, nog eens te willen overwegen of er, waar zoovele verbeteringen zijn aangebracht, ook hier niet eene aanvulling wenschelijk en mogelijk is.

**Leerboek der analytische meetkunde**, door Dr. P. VAN GEER, hoogleeraar te Leiden. Eerste deel: Meetkunde in het platte vlak en van de vlakken en rechte lijnen in de ruimte. Een deel in 8°, 266 p. Leiden, A. W. Sythoff, 1898.

In zijn voorrede zegt de hooggeleerde schrijver:

„Geruimen tijd geleden werd door mij ten dienste van de „Nederlandsche beoefenaars der wiskunde het leerboek der „analytische meetkunde van Fort en Schlömilch in onze taal „overgebracht. Van deze bewerking verscheen een eerste druk „in 1863 en een tweede in 1872. Toen de behoefte aan een „nieuwen druk zich deed gevoelen, besloot ik een geheel zelf- „standig leerboek te schrijven, omdat het voorgaande niet meer „kan geacht worden het standpunt in te nemen, dat de ont- „wikkeling der wetenschap eischt.

„Dit werk wordt hierbij aangeboden. Van de genoemde „bewerking is daarin niet meer overgenomen, dan hetgeen door „mij aan het Duitsche werk was toegevoegd. Wat omvang en „bewerking betreft, sluit dit leerboek zich aan bij de academi- „sche lessen, die ik reeds meer dan dertig jaren aan dezen „tak der wiskunde wijdde, en beantwoordt het tevens aan de „eischen, die volgens het programma bij het examen voor „Middelbaar onderwijs worden gesteld.

„Het tweede deel zal zich aansluiten bij het einde van het „eerste en voornamelijk handelen over de oppervlakken van „den tweeden graad, en over de algemeene theorie der opper- „vlakken en ruimtekrommen. Daarmee zal het systeem der „analytische meetkunde zijn voltooid; ik hoop het bij tijd van „leven door een beknopt werk over de grondslagen der syn- „thetische meetkunde te laten volgen.”

Van de verschillende coördinatenstelsels vinden alleen de meest gewone behandeling. Zoo zijn homogene en tangentiële coördinaten opzettelijk uitgesloten. Toch vindt op blz. 178 de tangentiële vergelijking der kegelsneden in den vorm van den geranden determinant van Hesse een plaats. Bij den lezer wordt de kennis ondersteld van de leer der determinanten, van de hoofdeigenschappen der hoogeremachtvergelijkingen en van de ontwikkeling der eenvoudigste functies in reeksen, niet echter de kennis der differentiaalrekening. In verband hiermee is de behandeling van de theorie der kromme lijnen van hoo-

geren graad zeer beperkt gehouden; zoo zoekt men niet alleen de formules van Plücker, maar zelfs het begrip klasse tevergeefs.

Met dit al — of mogelijk juist door de zelfbeperking, die de schrijver in toepassing brengt — is zijn werk een goede leidraad voor eerstbeginnenden, te meer wijl het vele vraagstukken tot eigen oefening van den lezer bevat. De figuren in den tekst zijn met zorg geteekend. Over het algemeen is de uitvoering, zooals we het van de firma A. W. Sythoff gewend zijn, d. i. keurig. S°.

Merkwaardige punten en lijnen van den vlakken driehoek, door A. J. VAN BREEN. Tweede druk. Een deeltje in 8°, 86 p. Amsterdam, W. Versluis, 1898. prijs f 1,25.

We geven, ten einde over den inhoud van dit werkje te kunnen doen oordeelen, eerst de titels aan der verschillende onderafdeelingen:

„Middelloodlijnen. Bissectrices. Middelloodlijn en bissectrix.  
„Zwaartelijnen en zwaartepunt. Hoogtelijnen en hoogtepunt  
„(orthocentrum). Hoogte- of voetpuntendriehoek (orthocentrische  
„driehoek). Negenpuntsirkel (cirkel van Feuerbach). Rechte  
„van Simson. Rechte van Wallace. Een merkwaardige cirkel.  
„Isogonaal (gelijkhoekig) verwante lijnen en punten. Isotomisch  
„(gelijkdeelend) verwante lijnen en punten. Symmedianen. De  
„punten van Brocard. De cirkel van Lemoine. De cirkels van  
„Tucker. De cirkels van Taylor. De cirkels van Torricelli.”

Uit deze korte inhoudsopgaaf mag worden afgeleid, dat de schrijver getracht heeft hem, die de lagere meetkunde heeft doorloopen, in de „meetkunde van den driehoek” in te leiden. Natuurlijk is dit streven prijzenswaardig en kan dan ook — wij ontkennen dit geenszins — het werkje zijn nut hebben voor die schare van onderwijzers, die zich het genoeg moet ontzeggen kennis te nemen van Casey's „A sequel to Euclid”, waarin voorkomt „a supplementary chapter on recent elementary geometry”, dat in 1889 in *Mathesis* in fransche vertaling is verschenen. Doch het wil ons voorkomen, dat de nieuwe gids slechts op gebrekkige wijze weergeeft, wat in buitenlandse werken uitstekend is behandeld. Nu eens is hij breedspakig, dan weer beknopt en onvolledig, in het algemeen ontbreekt het hem aan methode.

Een voorbeeld van breedspakigheid is het volgende (zie blz. 20):

„De lijn van een hoekpunt eens driehoeks naar het midden der overstaande zijde getrokken heet middellijn (mediaan), „zwaartelijn of zwaartepunts-transversaal. Er volgt uit, dat „een mediaan van een driehoek geheel binnen den driehoek „ligt. In een driehoek kan men drie medianen trekken. Zij „verdeelen de overstaande zijden in twee stukken, die zich „verhouden als één tot één.”

Als voorbeeld van onvolledigheid kiezen we den hoek, de punten en den cirkel, die naar Brocard genoemd zijn. Terwijl de cirkel geheel achterwege blijft, worden de hoek en het puntenpaar onafhankelijk van elkaar (op blz. 73 en blz. 77) aan den lezer voorgesteld. Het schijnt den schrijver ontgaan te zijn, dat er tusschen den hoek van Brocard en het puntenpaar van Brocard een zeer nauw logisch verband bestaat.

De stelling, dat de negenpuntscirkel de vier in- en aangeschreven cirkels aanraakt, wordt wel vermeld doch niet bewezen.

De druk is goed, de figuren zijn slecht.

S.

## ERRATUM.

Men gelieve op den omslag van het tweede stuk, deel IV te lezen:

Bibliographie . . . . . 156.

L, M<sup>1</sup>, 2. **G. DE LONGCHAMPS.** Cours de problèmes de géométrie analytique. Paris, Ch. Delagrave, 1898—1899.

# I N H O U D.

Bibliographie ( <i>vervolg</i> ) . . . . .	Blz. 161.
<b>B 12 d, Q 4 o, V 9. P. G. TAIT.</b> Scientific Papers, I. Cambridge, University press, 1898.	
<b>T 5, 6, 7. H. POINCARÉ.</b> La théorie de Maxwell et les oscillations Hertiennes, Édition Scientia. Paris, Carré et Naud.	
<b>Q 2, B 10 a. W. A. WYTHOFF.</b> The classification of quadrics in $n$ -dimensional space . . . . .	162.
<b>L<sup>1</sup> 16 a. J. NEUBERG.</b> Barycentre podaire et barycentre symétrique	192.
<b>R 8 a, c <math>\gamma</math>, e <math>\beta</math>. D. J. KORTEWEG.</b> Note sur le mouvement de roulement d'un corps pesant de révolution sur le plan horizontal	204.
<b>R 8 e <math>\beta</math>. A. G. KERHOVEN—WYTHOFF.</b> On a case of small oscillations of a system about a position of equilibrium . . .	205.
<b>O 2 e, 5 d, f. A. D. VAN DER HARST.</b> Formeln für die Krümmung eines Systems von ebenen Curven in krummlinigen Coordinaten. Erweiterung der erhaltenen Resultate auf den Raum	220.
<b>E 5. W. KAPTEYN.</b> Sur la transformation d'une intégrale définie.	243.
<b>C 21. W. KAPTEYN.</b> Sur la différentiation sous le signe d'intégration	245.
Bibliographie . . . . .	248.
<b>F. F. DE BOER.</b> Beknopte elementaire theorie der elliptische functiën. Groningen, J. B. Wolters, 1899.	
<b>A 3 g. H. PINET.</b> Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques. Parijs, Nony en Co., 1899.	
<b>A 1, 2, 3, B 1, 3, D 2, 6 b.</b> Lobatto's Lessen over de hoogere Algebra, bewerkt door A. E. Rahusen. Sneek, J. F. van Druten, 1899.	
<b>K 6 a, L<sup>1</sup>. P. VAN GEER.</b> Leerboek der analytische meetkunde. Leiden, A. W. Sythoff, 1898.	
<b>K 1, 2. A. J. VAN BREEN.</b> Merkwaardige punten en lijnen van den vlakken driehoek. Amsterdam, W. Versluys, 1898.	

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie, Dr. J. C. KLUYVER te Leiden.



*Telle pag.*

# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEDE REEKS  
DEEL IV  
VIERDE STUK

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1900

Grundpunkte des Büschels der Curven  $\Gamma_A$  sind erstens diejenigen Punkte, in denen die Tangente  $l$  unbestimmt ist, d. h. die  $n^2$  Grundpunkte und die Knotenpunkte des Büschels  $B^n$ , und zweitens die Berührungspunkte der Geraden  $a$  mit Curven des Büschels  $B^n$ . In diesen  $2(n-1)$  Berührungspunkten fällt die Tangente  $l$  mit der Geraden  $a$  zusammen, ist also der Durchschnittspunkt unbestimmt.

Hieraus ergibt sich die Zahl der Knotenpunkte des Büschels  $B^n$  durch Subtraktion der Zahlen  $n^2$  und  $2(n-1)$  von der Totalzahl der Grundpunkte des Büschels der Curven  $\Gamma_A$ , d. h.

$$(2n-1)^2 - n^2 - 2(n-1) = 3(n-1)^2.$$

4. Durchläuft der Punkt  $A$  die ganze Ebene, so erhalten wir ein Netz von Curven  $\Gamma_A$ . Soll nämlich eine Curve  $\Gamma_A$  die Punkte  $P$  und  $Q$  enthalten, so muss  $A$  der Durchschnittspunkt der zwei Tangenten sein, welche in  $P$  und  $Q$  respective Curven des Büschels  $B^n$  berühren. Hiermit ist  $A$  und folglich  $\Gamma_A$  eindeutig bestimmt.

Die Knotenpunkte dieses Netzes  $N$  sind die Inflexionen des Büschels  $B^n$ , wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergibt. Sei  $i$  eine Inflexionstangente des Büschels  $B^n$  und sei  $I$  die Inflexion. Durchläuft  $A$  die Gerade  $i$ , so wird ein Büschel von Curven  $\Gamma$  bestimmt; alle Curven dieses Büschels berühren die Gerade  $i$  in dem Punkte  $I$  (conf. 2). Folglich hat eine dieser Curven einen Knoten in  $I$ . Aus späteren Betrachtungen ergibt sich die Ordnung  $3(2n-2)$  dieser Inflexions- und Knotencurve (No. 11).

Die Punkte  $A_\Delta$ , welche Curven  $\Gamma_A$  mit Knoten bestimmen, zeigen eine gewisse Uebereinstimmung mit Steiner'schen Punkten des Netzes  $N$ . Auch liegt immer der Steiner'sche Punkt mit  $A_\Delta$  und dem zugehörigen Punkte  $I$  auf derselben Geraden, der Cayley'schen Geraden.

Nennen wir die Punkte  $A_\Delta$  einen Augenblick Pseudo-Steiner'sche Punkte. Der Ort dieser Punkte ist eine Curve  $3(2n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung. Mit den Punkten  $A$  einer Geraden  $a$  korrespondieren nämlich die Curven  $\Gamma$  eines Büschels. In diesem Büschel befinden sich  $3(2n-2)^2$  Doppelpunkte, die den auf der Geraden  $a$  liegenden Pseudo-Steiner'schen Punkten entsprechen.

Die Ordnung der Knotencurve des Netzes  $N$  ist  $3(2n - 2)$ . Nach dem Korrespondenzprinzip ist also die Klasse der Cayley'schen Curve

$$3(2n - 2)^2 + 3(2n - 2) = 3(2n - 1)(2n - 2).$$

5. Die Cayley'sche Curve des Netzes  $N$  ist identisch mit der Enveloppe der Inflexionstangenten des Büschels  $B^*$ . Die Differenz der Klassenzahlen

$$3(2n - 1)(2n - 2) - 3n(n - 2) = 9n^2 - 12n + 6$$

ist dadurch zu erklären, dass die  $n^2$  Grundpunkte des Büschels  $B^*$  jeder dreimal und die  $3(n - 1)^2$  Doppelpunkte jeder zweimal zu der Cayley'schen Curve gerechnet werden, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

In einem Grundpunkte  $G$  des Büschels  $B^*$  liegen drei Inflexionen;  $G$  ist also dreifacher Punkt der Knotencurve des Netzes  $N$ . Wenn der bestimmende Punkt  $A$  einer  $\Gamma$  in einer Inflexion einer Curve  $C$  des Büschels  $B^*$  liegt, so hat die erste Polare von  $A$  in Bezug auf diese Curve und folglich die Curve  $\Gamma_A$  eine Inflexion in  $A$  mit derselben Tangente. Legen wir  $A$  in  $G$ , so durchschneiden die drei Inflexionstangenten des Büschels  $B^*$  die Curve  $\Gamma_A$  in  $G$  in mehr als zwei Punkten. Also ist  $G$  ein dreifacher Punkt der Curve  $\Gamma_A$ . Weil hier der Pseudo-Steiner'sche Punkt dreimal mit dem entsprechenden Knotenpunkte zusammenfällt, wird die (Cayley'sche) Verbindungsgerade dreimal unbestimmt; der Punkt  $G$  gehört also dreimal zu der Cayley'schen Enveloppe.

Ganz analog ergibt sich dass jeder Knotenpunkt des Büschels  $B^*$  zweimal zu der Cayley'schen Enveloppe des Netzes  $N$  gehört; denn

$$9n^2 - 12n + 6 = 3n^2 + 2 \cdot 3(n - 1)^2.$$

6. Die Bedeutung der Pseudo-Steiner'schen Punkte erhellt aus dem Folgenden. Wir legen  $A$  in den Durchschnittspunkt von zwei auf einander folgenden Inflexionstangenten  $i_1$  und  $i_2$  des Büschels  $B^*$ . Die Curve  $\Gamma_A$  berührt  $i_1$  und  $i_2$  respektive in den Punkten  $I_1$  und  $I_2$ , den Inflexionen des Büschels  $B^*$ . Der Durchschnittspunkt  $A$  der zwei Tangenten  $i_1$  und  $i_2$  der  $\Gamma_A$  liegt also in endlicher Entfernung von den Berührungspunkten  $I_1$  und  $I_2$ , d. h. der Punkt  $I$  ist Doppelpunkt der Curve  $\Gamma_A$ .

Die Pseudo-Steiner'sche Curve ist also die Enveloppe der Inflexionstangenten des Büschels  $B^*$ . Die Ordnung dieser Enveloppe ist also  $3(2n - 2)^2$ .

7. Mit den Punkten  $A$  einer Curve  $K^\mu$  von der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung korrespondieren die Curven eines Systems mit den Charakteristiken  $\mu, \mu \cdot 2(2n - 2)$ . Diejenigen Curven  $\Gamma_\lambda$ , welche einen gewissen Punkt  $Q$  enthalten, entsprechen den Schnittpunkten von  $K^\mu$  mit der Geraden, welche in  $Q$  eine Curve des Büschels  $B^*$  berührt. Die Anzahl dieser ist  $\mu$ . Um die Curven  $\Gamma_\lambda$ , die eine Gerade  $l$  berühren, zu finden, ziehen wir die Tangenten, welche in den Punkten der Geraden  $l$  die Curven des Büschels  $B^*$  berühren. Die Gerade  $l$  berührt  $2n - 2$  Curven dieses Büschels, und ist also  $(2n - 2)$ -fache Tangente der Enveloppe dieser Tangenten. Die Klasse der Enveloppe ist  $2n - 1$ , weil in jedem Punkte der  $l$  ausser  $l$  noch eine Tangente möglich ist. Es giebt keine weiteren mehrfachen Tangenten. Die Ordnung der Enveloppe ist also  $(2n - 1)(2n - 2) - (2n - 2)(2n - 3) = 2(2n - 2)$ . Den Durchschnittspunkten dieser Enveloppe mit der Curve  $K^\mu$  entsprechen die Curven des Systems, welche  $l$  berühren. Die Zahl dieser Curven ist also  $\mu \cdot 2(2n - 2)$ .

8. In dem zweiten Teil dieses Aufsatzes betrachten wir die Systeme der Curven  $\Gamma_\lambda$ , die ein fester Punkt  $A$  bestimmt in Bezug auf die Büschel  $B^*$ , welche in einem Netze  $N^*$  enthalten sind. Den Büscheln dieses Netzes entspricht eine zweifach unendliche Reihe von Curven  $\Gamma$ , welche ein Netz  $N^{2n-1}$  bilden. Soll nämlich eine Curve  $\Gamma$  aus diesem Systeme durch einen Punkt  $P$  gehen, so muss der bestimmende Büschel  $B^*$  diejenige Curve enthalten, welche in  $P$  die Gerade  $PA$  berührt. Soll diese  $\Gamma$  auch durch den Punkt  $Q$  gehen, so muss eine der Curven des bestimmenden Büschels  $B^*$  in  $Q$  die Gerade  $QA$  berühren. Diese zwei Curven bestimmen den Büschel  $B^*$  und folglich die Curve  $\Gamma_\lambda$  eindeutig. Also bilden die Curven  $\Gamma$  ein Netz.

9. Einem Curvenbüschel der  $\Gamma$  mit einem Grundpunkte  $P$  entsprechen diejenigen Büschel des Netzes  $N^*$ , in welchen die Curve  $C_r$  enthalten ist, die in  $P$  die Gerade  $PA$  berührt. Grundpunkte dieses Büschels sind der Punkt  $A$  und die  $n(n - 1)$

Punkte, wo Strahlen aus  $A$  die Curve  $C_r$  berühren. Wir setzen voraus, dass das Netz  $N^*$  keine Grundpunkte hat. Die Anzahl der Grundpunkte eines Büschels der  $\Gamma$  ist  $(2n - 1)^2$ . Die fehlenden  $3n(n - 1)$  Grundpunkte können nur aus Punkten hervorkommen, in denen die Curven eines Büschels des Netzes  $N^*$  eine gemeinschaftliche durch  $A$  gehende Tangente haben. Dies sind bekanntlich Knotenpunkte des Netzes  $N^*$ . Die Klasse der Enveloppe der einem Büschel aus dem Netze  $N^*$  gemeinschaftlichen Tangenten ist folglich  $3n(n - 1)$ .

Diese  $3n(n - 1)$  Punkte und der Punkt  $A$  sind Grundpunkte des Netzes  $N^{2n-1}$  der Curven  $\Gamma$ .

10. Sei  $Q$  ein Punkt der Knotencurve  $\Delta_1$  des Netzes  $N^*$ , und sei  $C'_q$  diejenige Curve dieses Netzes, welche in  $Q$  einen Knoten hat. Jedem Büschel  $B^*$  aus  $N^*$ , der die Curve  $C'_q$  enthält, entspricht eine Curve  $\Gamma$ , die durch den Punkt  $Q$  geht. Alle Curven  $\Gamma$  dieses Büschels berühren in  $Q$  die Gerade  $l$ , welche mit der Gerade  $QA$  harmonisch liegt in Bezug auf die Knotentangenten der Curve  $C'_q$  (conf. 2). Eine der Curven  $\Gamma$  aus dem Büschel hat also einen Knoten in  $Q$ . Diese entsteht aus dem Büschel  $B^*$  für welchen  $Q$  Grundpunkt ist. Die von diesem Büschel in  $AQ$  eingeschnittene Punkteninvolution hat nämlich einen festen Punkt in  $Q$ , und also zählt  $Q$  für zwei Doppelpunkte, d. h. für zwei Punkte der Curve  $\Gamma$ . Weil die anderen Curven  $\Gamma$  in  $Q$  die Gerade  $l$  zur Tangente haben, so muss  $Q$  für diese Curve  $\Gamma$  ein Knotenpunkt sein.

11. Die Ordnung der Knotencurve  $\Delta_1$  des Netzes  $N^*$  finden wir auf folgendem Wege. Die  $3(n - 1)^2$  Knotenpunkte eines Büschels  $B^*$  und die in N<sup>o</sup>. 9 gefundenen  $3n(n - 1)$  Punkte, zusammen also  $3(n - 1)(2n - 1)$  Punkte, sind die Durchschittspunkte der dem Büschel  $B^*$  entsprechenden Curve  $\Gamma$  mit  $\Delta_1$ . Die Ordnung der  $\Delta_1$  ist folglich  $3(n - 1)(2n - 1) : (2n - 1) = 3(n - 1)$ , (conf. N<sup>o</sup>. 4).

12. Die Knotencurve  $\Delta$  des Netzes  $N^{2n-1}$  ist von der  $3(2n - 2)^{\text{ten}}$  Ordnung. Ausser der in N<sup>o</sup>. 10 genannten Curve  $\Delta_1$  muss  $\Delta$  auch noch in einer Curve  $\Delta_2$  von der Ordnung  $3(2n - 2) - 3(n - 1) = 3(n - 1)$  bestehen. Aus N<sup>o</sup>. 6 erhellt, dass  $\Delta_2$  identisch ist mit dem Ort der Inflexionen des Netzes  $N^*$ , deren Inflexionstangenten den Punkt  $A$  enthalten.

Seien  $I_1$  und  $I_2$  zwei auf einander folgende Inflexionen des Netzes  $N^*$ ,  $i_1$  und  $i_2$  die durch A gehenden Inflexionstangenten. Die zwei Curven des Netzes  $N^*$ , welche respective diese Inflexionen enthalten, bestimmen zusammen einen Büschel  $B^*$ . Die entsprechende Curve  $\Gamma$  hat einen Knoten in dem Punkte I.

Der Ort der Inflexionen aus einem Netze  $N^*$ , deren Tangenten durch einen festen Punkt A gehen, ist also von der  $3(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung. Der Punkt A ist dreifacher Punkt.

13. Die Curven  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  haben  $9(n-1)^2$  Schnittpunkte. Hierzu gehören die  $3n(n-1)$  in  $N^0$ . 9 gefundenen Grundpunkte des Netzes  $N^{2n-1}$ . Eine der Curven des Büschels  $B^*$  welche in einem dieser  $3n(n-1)$  Punkte, den wir P nennen, die Verbindungsgerade PA berühren, hat in P eine Inflexion. Der Punkt P gehört also auch zu der Curve  $\Delta_2$ .

Die weiteren  $9(n-1)^2 - 3n(n-1) = 2(2n-3)(n-1)$  Schnittpunkte sind Knotenpunkte des Netzes  $N^*$  welche eine durch A gehende Knotentangente zeigen. Weil diese die Curve des Netzes  $N^*$  in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, gehört dieser Punkt zur Curve  $\Delta_2$ . Die Enveloppe der Knotentangenten, die Zeuthen'sche Curve, des Netzes  $N^*$  ist folglich von der  $(6n^2 - 15n + 9)^{\text{ten}}$  Klasse.

14. In jedem Punkte P liegen drei Inflexionen von Curven des Netzes  $N^*$ . Durchläuft der Punkt P die Gerade  $p$ , so geht aus  $3(n-1)$  Schnittpunkten von  $p$  und  $\Delta_2$  jedesmal eine Inflexionstangente durch A. Die Klasse der Enveloppe dieser Inflexionstangenten ist also  $3(n-1)$ . Weil durch jeden Punkt von  $p$  drei dieser Tangenten gehen, ist  $p$  selber  $3(n-2)$ -fache Tangente dieser Enveloppe, und weil keine weiteren mehrfachen Tangenten vorkommen ist die Ordnung der Enveloppe

$$(3n-3)(3n-2) - (3n-6)(3n-7) = 18n - 30.$$

Durchläuft der Punkt P eine Curve  $K^\mu$ , so gehen aus den  $\mu \cdot 3(n-1)$  Schnittpunkten von  $K^\mu$  und  $\Delta_2$  Inflexionstangenten nach A. Die Klasse der Enveloppe der Inflexionstangenten ist also  $\mu \cdot 3(n-1)$ .

Ist  $K^\mu$  identisch mit  $\Delta_1$ , so zerfällt die Enveloppe in die Zeuthen'sche Curve und die Enveloppe der eigentlichen Inflexionstangenten.

15. Um die erhaltenen Resultate auf analytischem Wege zu bestätigen, können wir entweder die Gleichung der Curven  $\Gamma$  untersuchen, und dazu mit Vorteil die symbolische Darstellung benutzen, oder die singulären Punkte jedesmal als Koordinatenanfang wählen und nur die Anfangsglieder der Gleichung der  $\Gamma$  berechnen. Diejenige Curve des gegebenen Büschels  $B^*$ , welche eine Singularität zeigt, können wir stets als eine der bestimmenden Curven dieses Büschels wählen. Ein Paar Beispiele werden genügen um die Rechnungsweise für alle anderen Fälle zu zeigen.

Die Gleichung der Grundcurven sei

$$(1) \quad \begin{cases} C_1 \equiv a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots = 0. \\ C_2 \equiv b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Der erste Index stimmt mit dem Exponent der  $x$ , der zweite Index mit dem Exponent der  $y$  überein. Seien  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Punktes  $A$ , so ist die Gleichung der  $\Gamma$

$$(2) \quad (x - x_1) \left\{ C_1 \frac{\partial C_2}{\partial x} - C_2 \frac{\partial C_1}{\partial x} \right\} + (y - y_1) \left\{ C_1 \frac{\partial C_2}{\partial y} - C_2 \frac{\partial C_1}{\partial y} \right\} = 0,$$

d. h.

$$\begin{aligned} & -x_1 (a_{00}b_{10} - b_{00}a_{10}) - y_1 (a_{00}b_{01} - b_{00}a_{01}) + \\ & + x [a_{00}b_{10} - a_{10}b_{00} \dots] + y [a_{00}b_{01} - b_{00}a_{01} \dots] \dots = 0. \end{aligned}$$

16. Der Koordinatenanfang  $O$  liegt auf der Curve  $\Gamma$ , wenn  $x_1 (a_{00}b_{10} - b_{00}a_{10}) + y_1 (a_{00}b_{01} - b_{00}a_{01}) = 0$ , d. h. wenn  $A$  auf der Tangente liegt, welche in  $O$  eine Curve des Büschels  $\kappa C_1 + \lambda C_2 = 0$  berührt.

Sei diese Tangente die Achse der  $x$  ( $y_1 = 0$ ) und berühre die Grundcurve  $C_1 = 0$  diese Achse in  $O$ . ( $a_{00} = a_{10} = 0$ )

Gleichung der  $\Gamma$ :

$$2a_{20}b_{00}x_1x + [-a_{01}b_{00} + (a_{11}b_{00} - a_{01}b_{10})x_1]y + R = 0$$

Gewöhnlicher Punkt. Die Tangente ist verschieden von  $OA$

Legen wir  $A$  jetzt in  $O$ . ( $y_1 = x_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv -a_{01}b_{00}y - 2a_{20}b_{00}x^2 + R = 0$$

Gewöhnlicher Punkt; die Tangente fällt mit der Tangente der durch  $A$  gehenden Curve des Büschels  $B^*$  zusammen.

17. Die Curve  $C_1 = 0$  hat eine Inflexion in O.

$$(a_{00} = a_{10} = a_{20} = y_1 = 0)$$

$$\Gamma \equiv [-a_{01}b_{00} + (a_{11}b_{00} - a_{01}b_{10})x_1]y + 3a_{30}b_{00}x_1x^2 + R = 0.$$

Die Gerade AO berührt  $\Gamma$  in O in einem gewöhnlichen Punkte.

Rückt nun auch A in O ( $x_1 = 0$ ).

$$\Gamma \equiv -a_{01}b_{00}y - 3a_{30}b_{00}x^3 + R = 0,$$

d. h. in A liegt eine Inflexion der  $\Gamma$  mit derselben Inflexionstangente als die Curve  $C_1$ .

Ein weitere Singularität entsteht wenn  $x_1 \neq 0$  und  $-a_{01}b_{00} + (a_{11}b_{00} - a_{01}b_{10})x_1 = 0$

$$\Gamma \equiv 3a_{30}b_{00}x_1x^2 + [-2a_{11}b_{00} + (2a_{21}b_{00} - 2a_{01}b_{20})x_1]xy + [-2a_{02}b_{00} + (a_{12}'b_{00} - a_{01}b_{11} + a_{11}b_{01} + a_{02}b_{10})x_1]y^2 + R = 0.$$

Dies ist ein Knotenpunkt der  $\Gamma$ , und der Punkt A ist der Pseudo-Steiner'sche Punkt der No. 6. Man findet diesen Punkt auch als Durchschnittspunkt der Achse der  $x$  mit der folgenden Tangente des Büschels B\*.

Ganz analog ist die Behandlung der Inflexionen höherer Ordnung.

18. Sei O ein Knotenpunkt der Curve  $C_1$ . Der Punkt A liegt auf der Achse der  $x$ . ( $a_{00} = a_{10} = a_{01} = y_1 = 0$ ).

$$\Gamma \equiv 2a_{20}b_{00}x_1x + a_{11}b_{00}x_1y + R = 0.$$

Gewöhnlicher Punkt. Die Tangente fällt zusammen mit der Tangente der ersten Polare des Punktes A bez. der Curve  $C_1$ .

Legen wir eine der Knotentangenten durch A ( $a_{20} = 0$ )

$$\Gamma \equiv a_{11}b_{00}x_1y + 3a_{30}b_{00}x_1x^2 + R = 0.$$

Die  $\Gamma$  berührt die Gerade OA in einem gewöhnlichen Punkte.

Der Punkt A rückt auch in O ( $x_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv -2a_{20}b_{00}x^2 - 2a_{11}b_{00}xy - 2a_{02}b_{00}y^2 + R = 0$$

Doppelpunkt der  $\Gamma$  dessen Tangenten mit denen der Curve  $C_1$  zusammenfallen.

In ganz derselben Weise untersucht man die Flecnodalpunkte, Flecnodalpunkte, Rückkehrpunkte u. s. w.



19. Sei O jetzt ein Grundpunkt des Büschels  $B^*$ . A liegt auf der Achse der  $x$ . ( $a_{00} = b_{00} = y_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv (-a_{01}b_{10} + a_{10}b_{01})x_1y - (a_{10}b_{20} - a_{20}b_{10})x_1x^2 + R = 0.$$

Die Curve  $\Gamma$  berührt OA in einem gewöhnlichen Punkte.

Sei jetzt OA Inflectionstangente der Curve  $C_1$ . ( $a_{10} = a_{20} = 0$ )

$$\Gamma \equiv -a_{01}b_{10}x_1y + 2a_{30}b_{10}x_1x^3 + R = 0.$$

Die Gerade OA ist auch für die  $\Gamma$  Inflectionstangente.

Der Punkt A rückt auch in O. ( $x_1 = 0$ )

$$\Gamma' \equiv (-a_{11}b_{10} + a_{01}b_{20})x^2y + (a_{01}b_{11} - a_{11}b_{01} - a_{02}b_{10})xy^2 + (a_{01}b_{02} - a_{02}b_{01})y^3 + R = 0.$$

Dreifacher Punkt der  $\Gamma$ . Die drei Tangenten fallen mit den Inflectionstangenten des gegebenen Büschels zusammen.

20. Die Curve  $C_1$  hat in dem Grundpunkte O einen Knoten. ( $a_{00} = a_{01} = a_{10} = b_{00} = y_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv a_{20}b_{10}x_1x^2 + 2a_{20}b_{01}x_1xy + (a_{11}b_{01} - a_{02}b_{10})x_1y^2 + R = 0.$$

Dies ist ein Knoten der  $\Gamma$ .

Sei OA eine der Knotentangenten der Curve  $C_1$ . ( $a_{20} = 0$ )

$$\Gamma \equiv (a_{11}b_{01} - a_{02}b_{10})x_1y^2 + 2a_{30}b_{10}x_1x^3 + R = 0.$$

Dies ist eine Spitze der Curve  $\Gamma$  und OA ist Spitzentangente. Wenn  $a_{11}b_{01} - a_{02}b_{10} = 0$ , so zeigt  $\Gamma$  einen dreifachen Punkt.

Sei OA gemeinschaftliche Tangente für die Curven des Büschels  $B^*$  ( $a_{00} = a_{10} = b_{00} = b_{10} = y_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv -(2a_{01}b_{20} - 2a_{20}b_{01})x_1xy + (-a_{01}b_{11} + a_{11}b_{01})x_1y^2 + [-a_{20}b_{01} \dots]x^2y + [a_{01}b_{11} \dots]xy^2 + [a_{01}b_{02} \dots]y^3 + [-a_{20}b_{30}x_1 \dots]x^4 \dots + R = 0.$$

Flecnodalpunkt mit OA als Flednodaltangente.

21. Rückt schliesslich A in den Punkt O, wo  $C_1$  einen Knoten hat, und sei die Achse der  $x$  Knotentangente ( $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = b_{00} = x_1 = y_1 = 0$ )

$$\Gamma \equiv -a_{11}b_{10}x^2y + (-a_{11}b_{01} - a_{02}b_{10})xy^2 - a_{02}b_{01}y^3 - 2a_{30}b_{10}x^4 \dots = 0.$$

**Dreifacher Punkt.** Die Gleichung der drei Tangenten ist

$$y(a_{11}x + a_{02}y)(b_{10}x + b_{01}y) = 0.$$

Zwei dieser Tangenten fallen zusammen mit den Knotentangenten der  $C_1$ , die dritte Tangente mit der gemeinschaftlichen Tangente der übrigen Curven des Büschels.

Jede beliebige singularität kann man ganz analog untersuchen.

---

**SUR LA QUESTION 1044 DE L'INTERMÉDIAIRE DES  
MATHÉMATICIENS,**

PAR

**J. W. TESCH.**

Dans le numéro de Mai 1897 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (Tome IV, p. 97) on trouve la question suivante, proposée par M. H. G. A. VERKAART:

„On mène par les sommets A, B, C d'un triangle ABC les transversales AD, BE, CF, où D, E, F sont les points d'intersection avec BC, CA, AB et qui se coupent en P.

Déterminer le point P, tel que l'on ait  $PD = PE = PF$ .”

Jusqu'ici *l'I. d. M.* n'a donné qu'une seule réponse due à M. G. CANDIDO (Tome V, p. 154) et conçue en ces termes:

„Une mise en équation du problème peut dériver des formules suivantes; en posant:

$$\frac{BD}{DC} = x, \quad \frac{CE}{EA} = y, \quad \frac{AF}{FB} = z$$

on a  $xyz = 1,$

$$PD = \frac{\sqrt{c^2(y+1)y + b^2(y+1) - a^2y}}{1 + y} - \frac{\sqrt{b^2(y+1)y + c^2(y+1) - a^2y}}{1 + y + yz},$$

et des formules analogues pour PE, PF.”

Je crois pouvoir constater que c'est dans la solution de telles équations que gît la difficulté.

Ce qui suit est une tentative pour mener un peu plus loin la solution de ce problème intéressant.

Soient  $x, y, z$  les longueurs des perpendiculaires menées de P sur BC, CA, AB.

On a

$$\frac{AD}{PD} = \frac{h_a}{x}.$$

Ainsi

$$\frac{AP}{PD} = \frac{h_a - x}{x} = \frac{2\Delta - ax}{ax} = \frac{by + cz}{ax}.$$

Par conséquent

$$PD = \frac{ax}{by + cz} AP,$$

mais comme

$$AP^2 = \frac{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}{\sin^2 A}, \text{ etc.}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 x^2}{(by + cz)^2} \cdot \frac{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}{\sin^2 A} &= \frac{b^2 y^2}{(cz + ax)^2} \cdot \frac{z^2 + x^2 + 2zx \cos B}{\sin^2 B} = \\ &= \frac{c^2 z^2}{(ax + by)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 2xy \cos C}{\sin^2 C} \quad \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Ainsi le point cherché P est un point commun aux deux courbes :

$$x^2(cz + ax)^2(y^2 + z^2 + 2yz \cos A) = y^2(by + cz)^2(z^2 + x^2 + 2zx \cos B) \dots (2)$$

$$y^2(ax + by)^2(z^2 + x^2 + 2zx \cos B) = z^2(cz + ax)^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos C) \dots (3)$$

On voit facilement que les courbes (1), (2), outre par les points cycliques passent e. a. par les six points suivants, tous situés à l'infini :

$$-1, \cos C, \cos B; \quad -\frac{2}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c};$$

$$\cos C, -1, \cos A; \quad \frac{1}{a}, \quad -\frac{2}{b}, \quad \frac{1}{c};$$

$$\cos B, \cos A, -1; \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad -\frac{2}{c}.$$

Il en suit que la droite à l'infini a plus de six points en commun avec les deux courbes (2), (3) qui sont du sixième degré et ainsi doit faire partie du lieu, de sorte que chacune de ces  $C^6$  dégénère en une droite et une  $C^5$ .

Mais il faut donc aussi que les courbes inverses de (2), (3) savoir :

$$y^2(cx + az)^2(y^2 + z^2 + 2yz \cos A) = x^2(bz + cy)^2(x^2 + z^2 + 2xz \cos B) \dots (4)$$

$$z^2(ay + bz)^2(z^2 + x^2 + 2zx \cos B) = y^2(cx + az)^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos C) \dots (5)$$

qui sont du sixième degré, dégénèrent en une courbe  $C^3$  (le cercle circonscrit) et une courbe  $C^4$ . En effet on trouve que chacune des équations (4), (5) a un facteur  $ayz + bzx + cxy = 0$ , après la suppression de laquelle les équations se réduisent à :

$$\begin{aligned} x^3(bz + cy) + x^2z\{2(bz + cy) \cos B - ay\} + x\{bz^3 + yz^2(c - 2a \cos B) - \\ - y^2z(b - 2c \cos A) - cy^3\} - ayz(y^2 + z^2 + 2yz \cos A) = 0 \dots (6) \\ x^3(bz - cy) + x^2\{2b \cos B z^2 + yz(a - 2c \cos B) - 2cy^2 \cos C\} + \\ + x\{bz^3 + yz^2(2a \cos B - c) - y^2z(b - 2c \cos A) - cy^3\} + \\ + ayz(z^2 - y^2) = 0 \dots (7) \end{aligned}$$

Après avoir pris la somme et la différence de (6) et de (7), on peut diviser par 2 et omettre le facteur  $y$ , après quoi on trouve :

$$\begin{aligned} bzx^3 + x^2(2b \cos B z^2 - cy^2 \cos C) + x(bz^3 - cy^3) - ay^2z(y + z \cos A) = 0 \dots (8) \\ cx^3 - x^2\{z(a - 2c \cos B) - cy \cos C\} + xz\{z(c - 2a \cos B) + \\ + y(b - 2c \cos A)\} - az^2(z + y \cos A) = 0 \dots (9) \end{aligned}$$

Les points  $P'$  communs à (8) et à (9) sont les inverses des points cherchés  $P$ .

Or la courbe  $C^3$ , représentée par (9) a un point-double en  $B$  et est par conséquent rationnelle, ce qui permet d'exprimer ses coordonnées en fonction d'un seul paramètre. La substitution  $z = lx$  donne

$$\begin{aligned} \frac{x}{(c + al)(l \cos A - \cos C)} = \frac{y}{(c - al)(1 + 2l \cos B + l^2)} = \\ = \frac{z}{l(c + al)(l \cos A - \cos C)} \dots (10) \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs en (8) on obtiendrait une équation du 12<sup>e</sup> degré, qui cependant admet les facteurs  $(c + al)^2 = 0$ ,  $l \cos A - \cos C = 0$ ,  $l^2 + 2l \cos B + 1 = 0$ ; aucune des valeurs de  $l$ , qu'on trouve ainsi, ne satisfait aux conditions du problème. En effet  $l^2 + 2l \cos B + 1 = 0$  indique les deux points cycliques et l'on vérifie que les équations (8) et (9) sont satisfaites par les coordonnées de ces points. Quant aux facteurs  $(c + al)^2 = 0$ ,  $l \cos A - \cos C = 0$ , ils montrent que le sommet B de ABC est une solution triple. Qu'il doit en être ainsi résulte de ce que B est un point double de (9) et que la tangente en B à (8) est une des tangentes à (9) au point double, de sorte que le point B doit compter pour trois. L'équation finale se trouve ainsi du septième degré. Il en résulte que le problème admet un nombre impair de solutions.

On pourrait se demander s'il serait possible que les formules (10) prissent une forme plus simple, parce que  $1 + 2l \cos B + l^2$  admettrait soit un facteur  $l \cos A - \cos C$ , soit un facteur  $c + al$ . La condition nécessaire serait  $\sin(A + C) = 0$  ou  $b = 0$ . Et la supposition que  $l \cos A - \cos C$  aurait un facteur  $c - al$  conduit à la condition  $c \cos A = a \cos C$ , ce qui indique un triangle isocèle, cas qui sera traité plus loin.

Il reste à examiner si le problème a des cas particuliers qui admettent une solution par la règle et le compas.

I. Considérons en premier lieu le triangle isocèle ABC,  $AB = AC$ . Il est évident que dans ce cas-là le point P sera situé sur la hauteur menée de A sur BC, et que  $y = z$ . L'équation (3) se réduit à une identité et (2) après la suppression de la droite à l'infini devient :

$$4x^3 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} - xy^2 \sin \frac{A}{2} - y^3 = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

(Les équations (8) et (9) conduisent au même résultat).

En général il ne sera pas possible de construire les racines par la règle et le compas.

Reprenons la question en nous servant d'un système de coordonnées cartésiennes, et prenons comme axes la base BC et la hauteur AD. Soit  $BC = 2a$ ,  $AD = h$ ,  $DP = l$ . On trouvera :

$$\left\{ \frac{a(h-l)}{h+l} \right\}^2 + \left\{ \frac{2hl}{h+l} - l \right\}^2 = l^2,$$

$$4hl^3 - a^2l^2 + 2a^2hl - a^2h^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

prenant  $l_1 = 4hl$ ,

$$l_1^3 - a^2l_1^2 + 8a^2hl_1 - 16a^2h^2 = 0,$$

prenant  $l_2 = l_1 - \frac{1}{3}a^2$ ,

$$l_2^3 - \frac{1}{3}a^2(a^2 - 24h^2)l_2 - \frac{1}{27}a^2(a^4 - 36a^2h^2 + 216h^4) = 0 \quad . \quad (13)$$

Quelques cas simples :

a. Soit  $a^2 - 24h^2 = 0$ ,  $a = 2h\sqrt{6}$ ,

on a

$$l_2 = -4h^2\sqrt{2}, \quad l_1 = 4h^2(2 - \sqrt{2}), \quad l = (2 - \sqrt{2})h.$$

Une seule racine réelle.

b. Soit  $a^4 - 36a^2h^2 + 216h^4 = 0$ ,  $a = h\sqrt{6(3 + \sqrt{3})}$ ,

on a

$$l_2 = 0, \quad l_1 = 2h^2(3 + \sqrt{3}), \quad l = \frac{1}{2}h(3 + \sqrt{3});$$

$$l_2 = 2h^2\sqrt{6\sqrt{3}}, \quad l_1 = 2h^2(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3}}), \quad l = \frac{1}{2}h(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3}});$$

$$l_2 = -2h^2\sqrt{6\sqrt{3}}, \quad l_1 = 2h^2(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3}}), \quad l = \frac{1}{2}h(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3}}).$$

Dans ce triangle isocèle il y a ainsi trois points P satisfaisant à la question; deux de ces points sont sur DA prolongée, le troisième est à l'intérieur du triangle.

c. Si au contraire  $a = h\sqrt{6(3 - \sqrt{3})}$ ,

on a

$$l_2 = 0, \quad l_1 = 2h^2(3 - \sqrt{3}), \quad l = \frac{1}{2}h(3 - \sqrt{3}).$$

Une seule racine réelle.

d. Si l'on applique la méthode de Cardan à l'équation (13), la formule connue  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$  se réduit à  $\frac{2}{3}a^2h^3\sqrt{81h^2 - 3a^2}$ . Soit  $a = 3h\sqrt{3}$ , on a  $l_2 = -\frac{2}{3}a^2$ ,  $l_1 = \frac{1}{3}a^2$ ,  $l = \frac{1}{3}h$ .

L'équation (12) peut s'écrire :

$$4hl^3 = a^2(l - h)^2.$$

En posant  $l = \lambda^2h$ , on trouve

$$2\lambda^3h = a(1 - \lambda^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Pour  $a$  et  $h$  arbitraires, la solution sort du cadre de la géométrie élémentaire, mais inversement si  $\lambda$  est un nombre rationnel ou une fonction de racines carrées, il en sera de même de  $a$  et de  $h$ .

e. Soit par exemple  $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ , on trouve  $a = h\sqrt{2}$ ,  $l = \frac{1}{2}h$ . Dans ce triangle le cercle outre par D, E, F passe par A (Voyez ci-dessous, III).

II. Voici un genre de triangles qui admettent une solution par la règle et le compas. Soit dans le triangle ABC le point P le point d'intersection de la bissectrice de l'angle A avec le cercle circonscrit. On sait que P est le centre d'un cercle passant par B, C, I' centre du premier cercle ex-inscrit. Or si I', B' (point d'intersection de CP avec AB), C' (point d'intersection de BP avec AC) sont en ligne droite, le point P est le point cherché pour le triangle AB'C'.

En prenant ABC pour triangle de référence on trouve que la condition pour que I', B', C' soient en ligne droite est :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\sin \frac{A}{2} & \sin \left( C + \frac{A}{2} \right) & 0 \\ -\sin \frac{A}{2} & 0 & \sin \left( B + \frac{1}{2}A \right) \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut se réduire à  $2a = b + c$ .

Soient maintenant  $b = 2p - q$ ,  $a = 2p$ ,  $c = 2p + q$ , on trouve

$$BC : BB' = \sin \left( B - \frac{A}{2} \right) : \sin \frac{A}{2}$$

$$BB' = \frac{p(2p+q)}{p-q},$$

par conséquent

$$AB' = \frac{4p^2 - q^2}{p - q}.$$

De la même manière

$$AC' = \frac{4p^2 - q^2}{p + q}.$$



Et comme  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p^2 + q^2}{4p^2 - q^2}$ , il résulte de :

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos A$$

que

$$B'C' = \frac{2p}{p^2 - q^2} \sqrt{(4p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}.$$

Ainsi si dans un triangle  $AB'C'$

$$AB' : B'C' : AC' =$$

$$= (p + q) \sqrt{4p^2 - q^2} : 2p \sqrt{p^2 + 2q^2} : (p - q) \sqrt{4p^2 - q^2}$$

on construit le point P en décrivant sur  $B'C'$  un segment de cercle capable du supplément de l'angle A. Le point où la bissectrice de A coupe l'arc de ce segment sera le point cherché P.

Pour les coordonnées de P on trouve après quelque calcul

$$x : y : z = \sqrt{4p^2 - q^2} : 2\sqrt{p^2 + 2q^2} : 2\sqrt{p^2 + 2q^2}.$$

Soit par exemple

$$p = 5, q = 1. \text{ Si } AB' = 3\sqrt{11}, B'C' = 5\sqrt{3}, AC' = 2\sqrt{11},$$

on aura

$$x : y : z = \sqrt{11} : 2\sqrt{3} : 2\sqrt{3};$$

$$PI' = PB = PC = \frac{4}{3} \sqrt{33}.$$

III. Par les considérations suivantes on obtient un autre genre de triangles, admettant une solution par la règle et le compas.

Soit ABC un triangle, P le centre du cercle circonscrit. Si A' est le point, où le diamètre AP coupe encore le cercle, B' le point d'intersection de BP et A'C, C' celui de CP et A'B, le point P sera pour le triangle A'B'C' le point cherché, si B', A, C' sont situés en ligne droite; ce qui mène à la condition

$$\begin{vmatrix} \cos A \cos C & -\cos A & \cos^2 C \\ \cos A \cos B & \cos^2 B & -\cos A \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Soit  $\operatorname{tg} B = p$  (où  $p$  est un nombre positif), on aura  $\operatorname{tg} C = \frac{2}{p}$ ,

$$\sin B = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \sin C = \frac{2}{\sqrt{p^2+4}}, \quad \sin A = \frac{p^2+2}{\sqrt{(p^2+1)(p^2+4)}},$$

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos C = \frac{p}{\sqrt{p^2+4}}, \quad \cos A = \frac{p}{\sqrt{(p^2+1)(p^2+4)}}.$$

Ensuite

$$A'B' = \frac{2R \sin C \cos C}{\sin(A-C)},$$

mais comme

$$\sin(A-C) = \frac{p^3}{(p^2+4)\sqrt{p^2+1}},$$

on a

$$A'B' = 2R \frac{2\sqrt{p^2+1}}{p^2}.$$

De même

$$A'C' = 2R \frac{p\sqrt{p^2+4}}{2}.$$

Il en résulte que dans un triangle  $A'B'C'$ , défini par les conditions  $A'B' = 4\sqrt{p^2+1}$ ,  $A'C' = p^3\sqrt{p^2+4}$ ,  $\cos A' = -\cos A = \frac{-p}{\sqrt{(p^2+1)(p^2+4)}}$ , on trouve le point  $P$  en décrivant sur  $B'C'$  un segment de cercle, capable de l'angle  $360 - 2A'$  et en cherchant sur l'arc les points qui se trouvent à une distance de  $B'C'$  égale à la demi-hauteur. Le cercle sur lequel se trouveront les pieds  $A, B, C$  des transversales, passera par  $A'$ .

EXEMPLE. Soit  $p = 1$ ,  $A'B' = 4\sqrt{2}$ ,  $A'C' = \sqrt{5}$ ,  $\cos A' = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $B'C' = 3\sqrt{5}$ , on trouve après des calculs un peu laborieux :

$$x = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad y = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad . \quad . \quad (16)$$

$$x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad y_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad . \quad (17)$$

On vérifiera que le point P (16) satisfait à la condition (1) et que dans  $A'B'C'$  on aura  $PA = PB = PC = 1$ . Le point (17) ne satisfait pas à (1).

Pour que le triangle  $A'B'C'$  soit isocèle, il faut que  $4\sqrt{p^2 + 1} = p^3\sqrt{p^2 + 4}$ . Or cette équation a une racine  $p^2 = 2$  et trois racines égales  $p^2 = -2$ . Il n'y a que la racine  $p^2 = 2$  qui donne des valeurs admissibles. Elle conduit au triangle traité dans Ie, qui par conséquent parmi les triangles isocèles est le seul où le cercle DEF passe par A.

---

DE HERLEIDING VAN EEN KEGELSNEDE OP DE ASSEN ALS  
HARE VERGELIJKING OP EEN SCHEEFHOEKIG  
COÖRDINATENSTELSEL GEGEVEN IS,

DOOR

C. VAN ALLER.

---

1. Zij op een assenstelsel, waarvan  $\omega$  de coördinatenhoek is, een kegelsnede gegeven door de vergelijking

$$Ax^2 + 2 Bxy + Cy^2 + 2 Dx + 2 Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

dan kan men gemakkelijk de vergelijking op de assen afleiden in het geval, dat de kegelsnede een ellips of hyperbool is — of de topvergelijking, ingeval zij een parabool is — door gebruik te maken van een bekende eigenschap, die de functies  $\Delta_1 = A + C - 2 B \cos \omega$ ,  $\Delta_2 = AC - B^2$  en de discriminant  $\Delta_3$  der kegelsnede bij coördinatentransformatie bezitten. Wenscht men, wat wij zullen onderstellen, die afleiding tevens tot de constructie der kegelsnede dienstbaar te maken, dan moet bovendien de vraag worden opgelost, welke plaats het nieuwe stelsel ten opzichte van het gegebene inneemt. In het geval dat de kegelsnede een middelpunt heeft, zal men dan eerst door evenwijdige verplaatsing der coördinatenassen dat punt tot oorsprong van coördinaten maken, waardoor de vergelijking (1) overgaat in

$$Ax^2 + 2 Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om vervolgens de richtingen der assen te vinden, zou men (zie o.a. *Leerboek der Analytische Meetkunde* door Dr. P. VAN GEER, § 17) eene vierkantsvergelijking kunnen opstellen, die de richtingscoëfficiënten van de assen tot wortels heeft en met behulp van deze de assen construeeren.

Kan de laatstgenoemde constructie bezwaarlijk op eenvoudigheid aanspraak maken, afgezien hiervan moet tegen de aangegeven methode worden aangevoerd, dat zij tot het construeeren van de kegelsnede niet geheel toereikend is. Immers een kegelsnede kan op tweeërlei wijze zoo geplaatst worden, dat hare assen langs twee gegeven onderling loodrechte lijnen vallen; zoodat, wanneer de lengte der assen is berekend, ook nog bekend moet zijn, langs welke der onderling loodrechte lijnen een aangewezen as van de kegelsnede moet vallen. Maakt men dus scheiding tusschen de vraagstukken „het bepalen der lijnen waarlangs de assen der kegelsnede vallen” en „het afleiden van hare vergelijking in den kanonischen vorm”, dan zal, wat de plaatsing der kegelsnede betreft, altijd dubbelzinnigheid blijven bestaan. Eene dergelijke opmerking kan ook worden gemaakt, als de kegelsnede een parabool is.

De bedoelde dubbelzinnigheid wordt vermeden, als gebruik wordt gemaakt van *coördinatentransformatie*; de hiertoe noodige herleiding kan, zoo als in het volgende blijken zal, bijna even eenvoudig worden uitgevoerd en geeft tot eene even eenvoudige constructie van de richting der assen aanleiding als in het algemeen bekende geval, dat het oorspronkelijke stelsel recht-hoekig is. Het doel van dit opstel is het gezegd aan te toonen.

2. Indien van het stelsel XOY wordt overgegaan tot het stelsel X'OY', de as OX' hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  maakt met de assen OX en OY, en de as OY' hoeken  $\alpha'$  en  $\beta'$  met diezelfde assen, dan zijn de transformatieformules

$$x = \frac{x' \sin \beta + y' \sin \beta'}{\sin \omega}, \quad y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \omega},$$

hierbij zijn de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$  en  $\beta'$  zoodanig geteld, dat  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega$  is. Is het nieuwe stelsel rechthoekig, dan is  $\alpha' = \alpha + 90^\circ$  en  $\beta' = \beta - 90^\circ$ , zoodat de formules worden

$$x = \frac{x' \sin \beta - y' \cos \beta}{\sin \omega}, \quad y = \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \omega} \quad . \quad (3)$$

Beschouwen we nu eerst het geval, dat de kegelsnede een middelpunt heeft en hare vergelijking tot den vorm (2) is herleid; de substitutie der formules (3) in de vergelijking (2) doet deze overgaan in

$$(A \sin^2 \beta + 2 B \sin \beta \sin \alpha + C \sin^2 \alpha) x'^2 + 2 (-A \sin \beta \cos \beta + C \sin \alpha \cos \alpha + B \sin \beta \cos \alpha - B \sin \alpha \cos \beta) x' y' + (A \cos^2 \beta - 2 B \cos \alpha \cos \beta + C \cos^2 \alpha) y'^2 + \frac{\Delta_3 \sin^2 \omega}{\Delta_2} = 0 \quad (4)$$

Door den coëfficiënt van  $x'y'$  gelijk nul te stellen, heeft men ter berekening van  $\alpha$  en  $\beta$

$$-A \sin 2\beta + C \sin 2\alpha + 2B \sin(\beta - \alpha) = 0 \quad (5)$$

terwijl  $\alpha + \beta = \omega$  is. Deze betrekking kan onder eenvoudiger gedaante worden gebracht, omdat

$$2 \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha) = \sin 2\beta - \sin 2\alpha$$

$$\text{of } 2 \sin(\beta - \alpha) \cos \omega = \sin 2\beta - \sin 2\alpha$$

is; ze gaat daardoor over in

$$(B - A \cos \omega) \sin 2\beta - (B - C \cos \omega) \sin 2\alpha = 0 \quad (5a)$$

Zij geeft in dezen vorm aanleiding tot eene eenvoudige constructie van  $\alpha$  en  $\beta$ ; verdubbelt men den coördinatenhoek door een nieuwe Y-as aan te nemen met behoud van dezelfde X-as, en construeert men op het dus verkregen stelsel het punt  $(B - C \cos \omega, B - A \cos \omega)$ , dan maakt de lijn, die dit punt met den oorsprong verbindt, een hoek  $2\alpha$  met de X-as. Hiermeê zijn de *richtingen* van de *assen* der kegelsnede bekend.

Onderstellen we verder, dat de vergelijking (4) voor de waarden van  $\alpha$  en  $\beta$ , die uit (5) of (5a) volgen, overgaat in

$$Mx'^2 + Ny'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \sin^2 \omega = 0 \quad (6)$$

dan is

$$M = A \sin^2 \beta + 2 B \sin \beta \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$N = A \cos^2 \beta - 2 B \cos \beta \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

waaruit volgt

$$M + N = A + C - 2 B \cos \omega \quad (7)$$

$$M - N = -A \cos 2\beta + 2 B \cos(\beta - \alpha) - C \cos 2\alpha \quad (8)$$

De laatste betrekking kan weer vereenvoudigd worden met behulp van de formule

$$2 \cos(\beta - \alpha) \cos \omega = 2 \cos(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha) = \cos 2\beta + \cos 2\alpha$$

waardoor zij overgaat in

$$(M - N) \cos \omega = (B - A \cos \omega) \cos 2\beta + (B - C \cos \omega) \cos 2\alpha \quad (8a)$$

We hebben nu de waarden van  $\alpha$  en  $\beta$ , die uit (5a) volgen, te substitueeren in (8a); stellen we daartoe ter bekorting  $B - A \cos \omega = P$  en  $B - C \cos \omega = Q$ , dan is  $P \sin 2\beta - Q \sin 2\alpha = 0$ , terwijl de waarde van  $P \cos 2\beta + Q \cos 2\alpha$  berekend moet worden.

Nu is

$$\frac{\sin 2\alpha}{P} = \frac{\sin 2\beta}{Q} = \frac{\sin 2\omega}{\pm \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 2\omega}} \quad (9)$$

want  $\sin^2 2\omega = \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + 2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\omega$ ; noemen we de waarde van elk lid in de gelijkheid (9)  $k$ , dan is

$$\begin{aligned} P \cos 2\beta + Q \cos 2\alpha &= \frac{1}{k} (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{\sin 2\omega}{k} = \pm \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 2\omega} = \pm \sqrt{(B - A \cos \omega)^2 + \\ &+ (B - C \cos \omega)^2 + 2(B - A \cos \omega)(B - C \cos \omega) \cos^2 \omega} = \\ &= \pm \cos \omega \sqrt{(A - C)^2 + 4(B - A \cos \omega)(B - C \cos \omega)}. \quad (10) \end{aligned}$$

De betrekking (8a) gaat dan over in

$$M - N = \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4(B - A \cos \omega)(B - C \cos \omega)} \quad (8b)$$

Uit (9) volgen, men lette slechts op de zooeven vermelde constructie, twee waarden van  $2\alpha$ , die  $180^\circ$  en dus twee waarden van  $\alpha$ , die  $90^\circ$  verschillen; de gekozen waarde van  $\alpha$  bepaalt het teeken voor den wortelvorm in (9). Blijkens (10) stemt het teeken voor den wortelvorm in (8b) met dat voor den wortelvorm in (9) al of niet overeen, naarmate  $\cos \omega$  positief of negatief is; bij de gekozen waarde van  $\alpha$  is het teeken voor den wortelvorm in (8b) dus ook bepaald. De coëfficiënten  $M$  en  $N$  van de vergelijking (6) worden dus door (7) en (8b) ondubbelzinnig bepaald.

3. Voor den vorm onder het wortelteeken in (8b) kan men ook schrijven

$$(A - C)^2 \sin^2 \omega + \{(A + C) \cos \omega - 2B\}^2 \quad (11)$$

waaruit blijkt, dat  $M - N$  niet imaginair kan zijn.

De bedoelde vorm onder het wortelteeken is ook gelijk aan

$$(A + C - 2B \cos \omega)^2 + 4(B^2 - AC) \sin^2 \omega \quad . \quad . \quad (12)$$

zoodat de formules (7) en (8b) ook aldus kunnen geschreven worden:

$$M + N = \Delta_1 \quad \text{en} \quad M - N = \pm \sqrt{(\Delta_1^2 - 4\Delta_2 \sin^2 \omega)}.$$

Is  $\Delta_2 = AC - B^2 = 0$ , dan is dus  $M + N = \pm (M - N)$ , zoodat of M of N gelijk nul moet zijn. We zullen echter het geval  $AC - B^2 = 0$  op zich zelf behandelen.

4.  $\Delta_2 = 0$ . Wij hebben nu de formules (3) te substitueeren in de vergelijking (1); de drie eerste termen gaan daardoor, met  $\sin^2 \omega$  vermenigvuldigd, over in de drie eerste termen van (4). Substitueert men nu hierin  $C = \frac{B^2}{A}$ , dan wordt de coëfficiënt van  $x'^2$

$$M = \frac{1}{A} (B \sin \alpha + A \sin \beta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

en die van  $y'^2$

$$N = \frac{1}{A} (B \cos \alpha - A \cos \beta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

terwijl de coëfficiënt van  $x'y'$  overgaat in

$$\frac{1}{A} (B \sin \alpha + A \sin \beta) (B \cos \alpha - A \cos \beta) \quad . \quad . \quad (15)$$

Men kan dus den coëfficiënt van  $x'y'$  nul maken, door hetzij  $B \sin \alpha + A \sin \beta$ , hetzij  $B \cos \alpha - A \cos \beta$  gelijk nul te stellen.

In het eerste geval wordt M, in het tweede geval  $N = 0$ ; kiezen we het eerste geval, dan wordt de richting van de nieuwe X-as (as der parabool) gevonden door het punt  $(B, -A)$  met den oorsprong te verbinden. Voor de berekening van  $\alpha$  en  $\beta$  heeft men

$$\frac{\sin \alpha}{-A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \omega}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}} = \frac{\sin \omega}{\pm \sqrt{A\Delta_1}} \quad . \quad (16)$$

hierdoor wordt, als men elk der leden van (16)  $k'$  noemt,

$$N = \frac{1}{A} \left( \frac{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{k'} \right)^2 = \frac{\sin^2 \omega}{Ak'^2} = \Delta_1.$$



De vergelijking (1) gaat door de formules (3) over in

$$Ny'^2 + 2 Rx' + 2 Sy' + F \sin^2 \omega = 0 \quad . \quad . \quad (17)$$

hierin is verder

$$R = \sin \omega (D \sin \beta + E \sin \alpha) = \frac{(BD - AE) \sin^2 \omega}{\pm \sqrt{A\Delta_1}},$$

$$S = \sin \omega (-D \cos \beta + E \cos \alpha) = \frac{\{(AD + EB) - (DB + AE) \cos \omega\} \sin^2 \omega}{\pm \sqrt{A\Delta_1}}$$

want uit (16) volgt

$$\cos \alpha = \frac{B - A \cos \omega}{\pm \sqrt{A\Delta_1}}, \quad \cos \beta = \frac{-A + B \cos \omega}{\pm \sqrt{A\Delta_1}}.$$

De teekens zijn zoo gekozen, dat aan de betrekking

$$\sin \omega = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

is voldaan.

In de waarden van R en S komt een dubbel teeken voor; het is gemakkelijk in te zien, dat het teeken voor den wortelvorm overeenstemt met het teeken voor den wortelvorm in (16) en dat dit afhangt van de keuze van den hoek  $\alpha$ . De vergelijking (17), waarvan nu alle coëfficiënten berekend zijn, kan verder langs bekenden weg tot de topvergelijking der parabool worden herleid.

---

# VERALLGEMEINERUNG EINER BEKANNTEN FORMEL

VON

Dr. J. C. KLUYVER.

Die Definitionsgleichung der Bernoulli'schen Zahlen

$$\frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} y - \frac{B_2}{4!} y^3 + \frac{B_3}{6!} y^5 \dots$$

ergibt die Entwicklung im Bereiche  $y = 0$  der Function

$$\sum_1^{\infty} e^{-my},$$

welche zunächst durch diesen Ausdruck nur für  $y$  mit positivem reellem Theil defnirt ist.

Wir geben dieser bekannten Entwicklungsformel eine etwas andere Form, indem wir die Functionswerthe der Riemann'schen  $\zeta$ -Function für ganzzahlige Argumente einführen. Wir können nämlich setzen

$$B_n = (-1)^n \cdot 2n \cdot \zeta(-2n + 1)$$

und da man ganz allgemein hat

$$\zeta(-2n) = 0,$$

und ausserdem

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

erhalten wir

$$\sum_1^{\infty} e^{-my} = \frac{1}{y} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(-k).$$

Hieraus folgt nach  $\alpha$ -maliger Differentiation

$$(-1)^{\alpha} \sum_1^{\infty} m^{\alpha} e^{-my} = (-1)^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{y^{\alpha + 1}} + \sum_{k=\alpha}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!} \zeta(-k),$$

oder nach leichter Umformung

$$\sum_1^{\infty} m^{\alpha} e^{-my} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{y^{\alpha+1}} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(-k - \alpha).$$

Diese einfache Formel lehrt in welcher Weise für ganzzahlige positive  $\alpha$  die anfänglich nur in der rechten Halbebene definirte Function

$$\phi(y; \alpha) = \sum_0^{\infty} m^{\alpha} e^{-my}$$

im Bereiche  $y = 0$  über die Begrenzung der Halbebene hinweg fortgesetzt werden kann. Die obige Function  $\phi(y; \alpha)$  aber behält in der rechten Halbebene ihre Bedeutung bei, wenn man statt  $\alpha$  eine ganz willkürliche, positive oder negative, Zahl  $s$  einsetzt, und es stellt sich nun die Frage, ob in diesem Falle eine ähnliche Entwicklung in einem Kreise um  $y = 0$  herum Geltung hat.

Im Folgenden werden wir diese Frage beantworten.

Wir betrachten für  $|y| < 2\pi$  die Function von  $z$

$$\frac{z^{-s-1}}{e^z + y - 1}$$

und erstrecken ihre Integration nach  $z$  über eine Schleife, welche von  $z = +\infty$  aus in positiver Richtung den Punkt  $z = 0$  umkreist,  $z = -y$  aber ausschließt, und sodann nach  $z = +\infty$  zurückführt.

Da man  $1 : (e^z + y - 1)$  durch

$$\sum_1^{\infty} e^{-m(s+y)}$$

ersetzen kann und man bekanntlich hat

$$\int_{(0)} e^{-t} t^{-s-1} dt = (e^{-2\pi i s} - 1) \Gamma(-s),$$

so wird einerseits der Gesamtwert der Integration gegeben durch

$$(e^{-2\pi i s} - 1) \Gamma(-s) \sum_1^{\infty} m^s e^{-my}.$$

Andererseits kann man den Integrationsweg ändern in eine Schleife, welche sowohl  $z = 0$ , als  $z = -y$  einschließt, wenn man nur den Werth des Integrals um den Punkt  $z = -y$  herum wieder abzieht.

Auf diese Weise findet man

$$\int_{\underbrace{(0)}_{\rightarrow}} \frac{z^{-s-1}}{e^s + y - 1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\pi i s}}{y^s + 1} + \int_{\underbrace{(0, -y)}_{\rightarrow}} \frac{z^{-s-1}}{e^s + y - 1} dz.$$

Jetzt aber können wir im Integrale rechterhand  $z = t - y$  substituiren und erhalten

$$\int_{\underbrace{(y, 0)}_{\rightarrow}} \frac{(t - y)^{-s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Da wir voraussetzen  $|y| < 2\pi$ , können wir während der Integration durchaus  $|t| > |y|$  nehmen, ohne dass dadurch eine Umkreisung der nächstliegenden singulären Punkte  $t = \pm 2\pi i$  zu befürchten wäre. Dieser Voraussetzung gemäss haben wir

$$\int_{\underbrace{(0)}_{\rightarrow}} \frac{z^{-s-1}}{e^s + y - 1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\pi i s}}{y^s + 1} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(-s-k)} \int_{\underbrace{(0)}_{\rightarrow}} \frac{t^{-s-1-k}}{e^t - 1} dt,$$

oder da allgemein

$$\int_{\underbrace{(0)}_{\rightarrow}} \frac{t^{a-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(a) \zeta(a) (e^{2\pi i a} - 1),$$

so ergibt sich

$$\int_{\underbrace{(0)}_{\rightarrow}} \frac{z^{-s-1}}{e^s + y - 1} dz = 2\pi i \frac{e^{-\pi i s}}{y^s + 1} + \Gamma(-s)(e^{-2\pi i s} - 1) \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y^k \zeta(-s-k).$$

Vergleichung der beiderseits erhaltenen Werthe des Integrals liefert daher

$$\phi(y; s) = \sum_1^{\infty} m_s e^{-my} = \frac{\Gamma(s+1)}{y^s + 1} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(-s-k),$$

eine Entwicklung der Function  $\phi(y; s)$  gültig für alle positive oder negative Werthe des Parameters  $s$ , aber der Ableitung zufolge nur für  $|y| < 2\pi$ .

Der Punkt  $y = 0$  erweist sich somit als singulärer Punkt für die Function  $\phi(y; s)$  und da nun in der rechten Halbebene die Relation gilt

$$\phi(y + 2k\pi i; s) = \phi(y; s),$$

so liegt die Vermuthung nahe, dass auch die Punkte  $y = \pm 2k\pi i$  denselben singulären Charakter tragen.

Dass dies in der That der Fall ist, lässt sich in folgender Weise unschwer zeigen. Wie bekannt, genügt die Function  $\zeta(-a)$  der Functionalgleichung

$$\zeta(-a) = \zeta(1+a) \Gamma(1+a) (2\pi)^{-a-1} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2} (1+a),$$

und daher kann man das allgemeine Glied der gefundenen Potenzreihe

$$\frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(-s-k)$$

auch schreiben

$$\frac{\Gamma(1+s+k) \zeta(1+s+k)}{k!} (-1)^k y^k [(2\pi e^{\frac{i\pi}{2}})^{-s-1-k} + (2\pi e^{-\frac{i\pi}{2}})^{-s-1-k}].$$

Ersetzt man nun schliesslich

$$\frac{(-1)^k \Gamma(1+s+k)}{k! \Gamma(1+s)}$$

durch den Binomialcoefficienten  $(-s-1)_k$ , so erhält man

$$\phi(y; s) = \frac{\Gamma(1+s)}{y^{1+s}} +$$

$$+ \Gamma(1+s) \sum_{k=0}^{\infty} (-s-1)_k y^k [(2\pi e^{\frac{i\pi}{2}})^{-s-1-k} + (2\pi e^{-\frac{i\pi}{2}})^{-s-1-k}] \zeta(1+s+k),$$

welche Gleichung unter der Voraussetzung, der Parameter  $s$  sei positiv, gleichbedeutend ist mit

$$\phi(y; s) = \frac{\Gamma(1+s)}{y^{1+s}} + \Gamma(1+s) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(y + 2\pi i m)^{1+s}} + \frac{1}{(y - 2\pi i m)^{1+s}} \right],$$

eine Formel, welche offenbar für positive  $s$  eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Function  $\phi(y; s)$  liefert, und die als eine Erweiterung der Gleichung

$$\phi(y; 0) = \frac{1}{e^y - 1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{y + 2\pi i m} + \frac{1}{y - 2\pi i m} \right]$$

aufzufassen ist.

Sie zeigt, dass auch die Punkte  $y = \pm 2\pi im$  singuläre Punkte sind und dass für alle  $y$  die Periodicitätseigenschaft erhalten bleibt. Für negative  $s$  verliert die Darstellung ihre Bedeutung, doch können wir auch in diesem Falle einen allgemein gültigen Ausdruck der Function finden. Zu diesem Zwecke ersetzen wir  $s$  durch  $-s$  und nehmen an

$$h + 1 > s > h,$$

wo  $h$  eine ganze positive Zahl ist.

Aus der Potenzreihe nehmen wir einfach die  $h + 1$  ersten Glieder heraus und schreiben mithin

$$\begin{aligned} \phi(y; -s) &= \Gamma(1-s)y^{s-1} + \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(s-k) + \\ &+ \Gamma(1-s) \sum_{k=h+1}^{\infty} (s-1)_k y^k \left[ (2\pi e^{\frac{i\pi}{2}})^{s-1-k} + (2\pi e^{-\frac{i\pi}{2}})^{s-1-k} \right] \zeta(1-s+k). \end{aligned}$$

Da nun in den Gliedern der unendlichen Reihe das Argument  $1-s+k$  der  $\zeta$ -Function durchaus grösser ist als Eins, so kann man wieder die übliche Reihenentwicklung für die  $\zeta$ -Function anwenden, und erhält

$$\begin{aligned} \phi(y; -s) &= \Gamma(1-s)y^{s-1} + \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(s-k) + \\ &+ \Gamma(1-s) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (y+2\pi im)^{s-1} + (y-2\pi im)^{s-1} - \right. \\ &\left. - (2\pi m)^{s-1} \sum_{k=0}^{h-1} (s-1)_k \left( \frac{y}{2\pi m} \right)^k 2 \cos \frac{\pi}{2} (k+1-s) \right]. \end{aligned}$$

Für  $\phi(y; -s)$  besteht somit gleichfalls ein für alle  $y$  gültiger Ausdruck, der dem singulären Charakter der Punkte  $y = \pm 2\pi im$  Rechnung trägt. Es versteht sich, dass falls  $s$  sich dem ganzzahligen Werthe  $h$  nähert, eine Umformung der Formel unerlässlich ist. Eine etwas umständliche Rechnung ergiebt für  $s = h$

$$\begin{aligned}
\phi(y; -h) &= \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(h-k) + \\
&+ \frac{(-1)^h y^{h-1}}{(h-1)!} \left( \log y - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{h-1} \right) + \frac{1}{2} \frac{(-1)^{h-1} y^h}{h!} + \\
&+ \frac{(-1)^h}{(h-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (y + 2\pi i m)^{h-1} \log \left( 1 + \frac{y}{2\pi i m} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (y - 2\pi i m)^{h-1} \log \left( 1 - \frac{y}{2\pi i m} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{h-1} (h-1)_k y^k (2\pi i m)^{h-1-k} \left( \frac{1}{h-k} + \frac{1}{h-k+1} + \dots + \frac{1}{h-1} \right) 2 \cos \frac{\pi}{2} (h-1-k) \right],
\end{aligned}$$

ein Resultat, dass durch  $h$ -malige Integration von  $1:(x-1)$  leicht zu bestätigen ist.

Von den erhaltenen Formeln lässt sich eine Anwendung machen. Sie erlauben Recursionsformeln herzustellen, welche zur Ermittlung der Functionswerthe  $\zeta(2m+1)$  benutzt werden können.

Wir gehen dabei aus von der Entwicklung der Function  $\phi(y; -s)$  im Bereiche des Ursprungs

$$\phi(y; -s) = \Gamma(1-s) y^{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(s-k),$$

und lassen  $s$  in eine ganze positive Zahl  $h$  übergehen. Die beiden Glieder

$$\Gamma(1-s) y^{s-1} = \frac{(-1)^h y^{h-1}}{\Gamma(h)} \left( \frac{1}{s-h} + \log y - \frac{\Gamma'(h)}{\Gamma(h)} + \dots \right)$$

und

$$\frac{(-1)^{h-1} y^{h-1}}{\Gamma(h)} \zeta(s-h+1) = \frac{(-1)^{h-1} y^{h-1}}{\Gamma(h)} \left( \frac{1}{s-h} + C + \dots \right)$$

werden dabei unendlich. Ihre Summe aber reducirt sich auf

$$\frac{(-1)^{h-1} y^{h-1}}{(h-1)!} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} - \log y \right),$$

so dass wir setzen können

$$\phi(y; -h) = \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(h-k) + \\ + \frac{(-1)^{h-1} y^{h-1}}{(h-1)!} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} - \log y \right) + \sum_{k=h}^{\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(h-k),$$

oder unter Einführung der Bernoulli'schen Zahlen,

$$\phi(y; -h) = \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k y^k}{k!} \zeta(h-k) + \\ + \frac{(-1)^{h-1} y^{h-1}}{(h-1)!} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} - \log y \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^h y^h}{h!} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m-1}}{(h+2m-1)!} y^{h+2m-1} \cdot \frac{B_m}{2m}.$$

Bemerken wir nun, dass  $\phi(i\pi; -h)$  den Werth  $(2^{h+1}-1)\zeta(h)$  hat, so erhalten wir aus obiger Gleichung durch die Substitution  $y = \pi i$ , indem wir das Reelle vom Imaginären trennen, die beiden Relationen

$$2(2^h-1)\zeta(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \cos \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{\pi^k}{k!} \zeta(h-k) + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{2} \cdot \frac{\pi^h}{h!} (h-1) + \\ + \sin \frac{\pi h}{2} \cdot \pi^{h-1} \left[ \frac{L_h}{(h-1)!} + \frac{\pi^2}{(h+1)!} \cdot \frac{B_1}{2} + \frac{\pi^4}{(h+3)!} \cdot \frac{B_2}{4} + \frac{\pi^6}{(h+5)!} \cdot \frac{B_3}{6} + \dots \right]$$

$$0 = \sum_{k=1}^{h-1} \sin \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{\pi^k}{k!} \zeta(h-k) + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi h}{2} \cdot \frac{\pi^h}{h!} (h-1) - \\ - \cos \frac{\pi h}{2} \cdot \pi^{h-1} \left[ \frac{L_h}{(h-1)!} + \frac{\pi^2}{(h+1)!} \cdot \frac{B_1}{2} + \frac{\pi^4}{(h+3)!} \cdot \frac{B_2}{4} + \frac{\pi^6}{(h+5)!} \cdot \frac{B_3}{6} + \dots \right],$$

wo  $L_h$  den Ausdruck

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1} - \log \pi$$

bezeichnet.

Wir geben  $h$  nun hier die successiven Werthe 3, 4, 5, ... und finden dadurch folgende zwei Reihen von Gleichungen:





# VOORSTELLING VAN EEN $n$ -DIMENSIONAAL OPPERVAK DOOR EEN $n-1$ -DIMENSIONALE RUIMTE

door

F. J. VAES.

---

## 1. Ten einde de 3-dimensionale platte ruimte

$$ax + by + cz + du = C$$

voor te stellen, schrijve men

$$ax + by + cz = C - du,$$

en denke aan  $u$  achtereenvolgens verschillende waarden toegekend. Dan ontstaat een stelsel evenwijdige platte vlakken van 2 dimensies, die — als men gemakshalve slechts positieve waarden van  $x, y, z, u$  beschouwt — een viervlak opvullen, dat ingesloten wordt door de coördinatenvlakken en het vlak

$$ax + by + cz = C,$$

dat *grensvlak* genoemd kan worden.

Gegeven waarden van  $x, y$  en  $z$  bepalen een punt, waarbij de waarde van  $u$  afhangt van den afstand van het punt tot het grensvlak, en berekend kan worden uit het stuk, dat van een der coördinatenassen wordt afgesneden door het vlak van het stelsel, dat door het punt gaat, en het grensvlak.

Voor negatieve waarden van  $x, y$ , of  $z$  verkrijgt men dergelijke viervlakken in elk der 8 deelen, waarin de coördinatenvlakken de ruimte verdeelen, en de grensvlakken sluiten een achtvlak in. Negatieve waarden van  $u$  geven vlakken buiten dit lichaam.

## 2. Op dergelijke wijze kan het 2-dimensionale vlak

$$ax + by + cz = C$$

worden voorgesteld door een vlakken driehoek, ingesloten door de coördinatenassen en de grenslijn

$$ax + by = C;$$

immers gegeven waarden van  $x$  en  $y$  bepalen een lijn

$$ax + by = C - cz$$

evenwijdig aan de grenslijn, en de waarde  $z$  staat in verband met den afstand der beide lijnen, en is te berekenen uit het stuk, dat zij op een der beide assen bepalen.

Voor negatieve waarden van  $x$  of  $y$  vindt men een dergelijke driehoek in elk der 4 deelen, waarin de assen het vlak van teekening verdeelen, en de grenslijnen vormen een ruit.

Negatieve waarden van  $z$  geven lijnen buiten de ruit.

Evenzoo kan een lijn  $ax + by = C$  worden vervangen door een puntenstelsel op een der coördinatenassen, doch hiermede betreedt men het gebied der Nomographie.

3. Tot het voorgaande werd schrijver geleid door de studie over stangenvierhoeken. Want daarbij treden 4 stangen:  $l$ ,  $d$ ,  $R$  en  $r$  op, waartusschen verschillende betrekkingen kunnen bestaan van den vorm

$$l \pm d \pm R \pm r \geq 0,$$

met de bijzondere gevallen

$$l \pm d \pm R \pm r = 0.$$

Geeft men aan elk der stangen alle mogelijke waarden van af 0 tot  $\infty$ , (uit den aard der zaak positieve), dan komt met elken vierhoek een punt overeen van een der deelen, waarin de 4-dimensionale ruimte verdeeld wordt door de 4 coördinatenvlakken, terwijl de laatstgenoemde betrekkingen platte vlakken van 3 dimensies bepalen.

Voor de theorie bleek het een vereenvoudiging den omtrek der vierhoeken constant te nemen, dus

$$l + d + R + r = 2s$$

te stellen, en door dezen kunstgreep is de meetkundige plaats der punten, die stangenvierhoeken voorstellen, beperkt tot een 3 dimensionaal plat vlak, dat vervangen kan worden door een viervlak, waarvan het grensvlak gelijke stukken afsnijdt van de coördinatenassen. De laatstgenoemde betrekkingen geven 2-dimensionale platte vlakken aan binnen het viervlak.

Geen der stangen kan grooter zijn dan de halve omtrek, zoodat slechts die punten van het viervlak stangenvierhoeken bepalen, welke besloten zijn door de coördinatenvlakken, de vlakken

$$l = s, d = s, R = s,$$

en de vlakken

$$l + d + R = 2s, \text{ of } r = 0 \text{ (grensvlak),}$$

$$l + d + R = 0, \text{ of } r = s,$$

gevende bij rechthoekige assen een kubus, die afgeknot is door twee evenwijdige vlakken, welke ieder door drie hoekpunten gaan. Hierbij is  $r$  de veranderlijke, die op de coördinatenassen gemeten wordt van de snijpunten dezer assen met het grensvlak af, en wel vindt men  $r$  onmiddellijk zonder berekening.

In dit bijzondere geval kan men aan het verkregen *ruimte-diagram* een fraaien vorm geven door de coördinatenassen met elkaar hoeken van  $60^\circ$  te doen vormen. Want dan wordt het viervlak regelmatig, en de genoemde vlakken sluiten een regelmatig achthoek in.

Men heeft dan het belangrijke voordeel, dat elk hoekpunt van het viervlak als oorsprong kan genomen worden.

Eenige dergelijke ruimtediagrammen (voor vlakke en voor bolmechanismen) werden door schrijver vervaardigd, en nader besproken in de Vakafdeeling voor Werkt. en Scheepsb. van het Kon. Inst. v. Ing. (10 Jan. 1900).

4. Worden 2 der 4 stangen oneindig lang gedacht, dan treedt een nieuwe stang op, die met de 2 overgeblievane een nieuw stelsel met 3 veranderlijken vormt, dat voor te stellen is door een vlakken gelijkbeenigen driehoek, die als men de assen onder  $60^\circ$  neemt gelijkzijdig wordt, en dan eveneens de eigenschap heeft, dat men elk der drie hoekpunten als oorsprong kan nemen.

5. De doorsnede van twee 3-dimensionale vlakken is het 2-dimensionale vlak, dat verkregen wordt door eliminatie van  $u$ . Gemakkelijk blijkt, dat dit vlak door de snijlijn gaat van de grensvlakken der twee viervlakken. De snijpunten met elk

der coördinatenassen zijn onmiddellijk te vinden. De doorsnede gaat door den oorsprong onder de voorwaarde

$$\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}.$$

Evenzoo vindt men in 2 driehoeken, die 2-dimensionale vlakken voorstellen, als snijlijn dier vlakken een lijn, gaande door het snijpunt der beide grenslijnen.

#### 6. De hypersfeer

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2$$

is voor te stellen door het stelsel bollen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - u^2,$$

dus door het inwendige van den bol

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

buiten welken geen reële punten liggen.

Hierbij valt op te merken, dat bij regelmatige verandering van  $u$  de afstand van twee opeenvolgende bollen niet overal dezelfde is, zooals bij de platte vlakken het geval is. Men zou dus kunnen zeggen, dat de *dichtheid* van den bol toeneemt van den grensbol af naar het middelpunt toe.

Denkt men deze dichtheid evenredig met den afstand  $\mathfrak{S}$  van 2 bollen, voor welke  $u$  de eenheid verschilt, dan heeft men

$$\Delta \mathfrak{S} = \sqrt{r^2 - u^2} - \sqrt{r^2 - (u + \Delta u)^2},$$

of

$$\Delta \mathfrak{S} = \frac{u \Delta u}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

voor den afstand van 2 opeenvolgende bollen, als  $u$  met  $\Delta u$  verandert; dus is

$$\frac{d\mathfrak{S}}{du} = \frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

waaruit volgt  $\mathfrak{S} = C - \sqrt{r^2 - u^2}$ .

Neemt men voor den grensbol  $\mathfrak{S} = 0$ , dan is

$$\mathfrak{S} = r - \sqrt{r^2 - u^2};$$

dus is de dichtheid evenredig met den afstand van het punt waar men zich bevindt tot aan den grensbol.

### 7. Het oppervlak

$$x^2 + y^2 + z^2 + f(u) = r^2$$

is eveneens voor te stellen door een bol, waarin de dichtheidsverdeeling een andere is, en omgekeerd kan  $f(u)$  zoodanig bepaald worden, dat de dichtheid een bepaalde wet volgt.

Eenzoo zal

$$ax + by + cz + f(u) = C$$

een viervlak geven met veranderlijke dichtheid, en is dezelfde vraag te stellen als bij den bol.

8. De doorsnede van een hyperspheer met een vlakke ruimte blijkt (bij eliminatie van  $u$ ) een oppervlak van den 2<sup>den</sup> graad te zijn.

### 9. Een oppervlak

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = C^2$$

is eveneens te vervangen door een stelsel oppervlakken van den 2<sup>den</sup> graad, dus door het inwendige van het oppervlak

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C^2,$$

waarbuiten geen reële punten liggen.

De waarde van  $u$  voor een bepaald punt is afhankelijk van den afstand van het punt tot het grensoppervlak gemeten langs de lijn, die het punt met den oorsprong verbindt, en is te berekenen uit dien afstand.

Een lijn  $y = \alpha x$ ,  $z = \beta x$  snijdt een der oppervlakken in een punt, waarvoor

$$x^2 = \frac{C^2 - du^2}{a + b\alpha^2 + c\beta^2}$$

is, en de afstand tot den oorsprong wordt dus voorgesteld door

$$\sqrt{\frac{C^2 - du^2}{a + b\alpha^2 + c\beta^2} \times (1 + \alpha^2 + \beta^2)}$$

of korthedshalve door  $m \sqrt{C^2 - du^2}$ .

Voor het grensoppervlak is die lengte  $mC$ , dus de afstand der twee oppervlakken

$$mC - m\sqrt{C^2 - du^2}.$$

Voor de dichtheid langs de lijn vindt men (analoog n°. 6)

$$S = mC - m\sqrt{C^2 - du^2},$$

deze is juist weer evenredig met den aangegeven afstand.

10. Feitelijk is in het voorgaande niets anders gedaan dan de gegeven oppervlakken projecteeren op een 3-dimensionale ruimte. Het ingevoerde begrip van dichtheid zal mogelijk van nut kunnen zijn voor verdere beschouwingen. Voor oppervlakken van hooger graden wordt de dichtheid minder eenvoudig uitgedrukt.

De algemeenheid der methode valt onmiddellijk in het oog.

---

# EIGENSCHAPPEN VAN EENIGE BLIJZONDERE STRALENSTELSELS

DOOR

DR. P. ZEEMAN Gz.

1. De rechthoekige coördinaten van een punt op een willekeurig oppervlak zijn gegeven als functies van twee parameters  $u$  en  $v$ :

$$x = \phi_1(u, v), \quad y = \phi_2(u, v), \quad z = \phi_3(u, v).$$

Elke betrekking tusschen  $u$  en  $v$  bepaalt op dat oppervlak eene kromme. Wanneer, zooals in het volgende steeds wordt ondersteld, de krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$ , waar  $C_1$  en  $C_2$  willekeurige constanten zijn, elkander onder rechte hoeken snijden, wordt het element eener kromme op het oppervlak gegeven door de uitdrukking:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$

waarin

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Wordt door elk punt  $M$  van het oppervlak een straal gebracht, die met de raaklijn aan de beide, door  $M$  gaande, krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$  en de normaal van het oppervlak in  $M$  constante hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  maakt, dan vormen deze stralen samen een stralenstelsel (congruentie), waarvan in het volgende enkele eigenschappen worden afgeleid en dat steeds het stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  zal genoemd worden.

2. De raaklijnen  $MA$  en  $MB$ , in een punt  $M(x, y, z)$  van het oppervlak aan de, door dit punt gaande,  $v$  en  $u$  krommen getrokken, maken met de coördinaatassen hoeken, welker cosinussen zijn:



$$a = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad a' = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad a'' = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad b' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad b'' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

De richtingscosinussen der normaal MC van het oppervlak in M zijn:

$$c = a'b'' - a''b', \quad c' = a''b - ab'', \quad c'' = ab' - a'b.$$

Wijl nu de, door M gaande, straal van het stralenstelsel met deze drie rechten hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  maakt, worden de richtingscosinussen X, Y en Z van dien straal bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma \\ Y &= a' \cos \alpha + b' \cos \beta + c' \cos \gamma \\ Z &= a'' \cos \alpha + b'' \cos \beta + c'' \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

De coördinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  van een willekeurig punt op dien straal worden derhalve bepaald door de uitdrukkingen:

$$\xi = x + \lambda X, \quad \eta = y + \lambda Y, \quad \zeta = z + \lambda Z. \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin is  $\lambda$  de abscis van het punt  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , d.i. de afstand van dit punt tot het punt M ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

3. Aan welke voorwaarden moet worden voldaan, opdat een stralenstelsel ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) een normaal stralenstelsel zij, d. i. opdat de stralen van dit stelsel de normalen van een oppervlak en dus van alle daarmede parallele oppervlakken zijn?

Zal dit het geval wezen dan moet het mogelijk zijn,  $\lambda$  zoodanig als functie van  $u$  en  $v$  te bepalen, dat in ieder punt van het dan door de vergelijkingen (2) voorgestelde oppervlak de, door dat punt gaande, straal van 't stelsel de normaal van dit oppervlak is. Daartoe is noodig en voldoende, dat die straal loodrecht zij op de beide krommen, die op het oppervlak verkregen worden, door hetzij alleen  $u$ , hetzij alleen  $v$  te laten veranderen, d. i.

$$X \frac{\partial \xi}{\partial u} + Y \frac{\partial \eta}{\partial u} + Z \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0,$$

$$X \frac{\partial \xi}{\partial v} + Y \frac{\partial \eta}{\partial v} + Z \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0.$$

Worden hierin  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  door de uitdrukkingen (2) vervangen, dan gaan, wijl  $\Sigma X \frac{\partial X}{\partial u} = \Sigma X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$  is, deze betrekkingen over in:

$$X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

of, wanneer voor  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  hunne waarden uit (1) gesubstitueerd worden:

$$\cos \alpha \Sigma a \frac{\partial x}{\partial u} + \cos \beta \Sigma b \frac{\partial x}{\partial u} + \cos \gamma \Sigma c \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\cos \alpha \Sigma a \frac{\partial x}{\partial v} + \cos \beta \Sigma b \frac{\partial x}{\partial v} + \cos \gamma \Sigma c \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

Nu is  $\Sigma a \frac{\partial x}{\partial u} = V\bar{E}$ ,  $\Sigma b \frac{\partial x}{\partial u} = 0$ ,  $\Sigma c \frac{\partial x}{\partial u} = 0$  enz., zoo-

dat de beide laatste vergelijkingen zich reduceeren tot:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\cos \alpha V\bar{E}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\cos \beta V\bar{G}.$$

Zal het nu mogelijk zijn  $\lambda$  zoo als functie van  $u$  en  $v$  te bepalen, dat aan deze vergelijkingen voldaan is, dan moeten de beide waarden van  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}$ , die hieruit kunnen worden afgeleid, aan elkaar gelijk zijn, of:

$$\cos \alpha \frac{\partial V\bar{E}}{\partial v} = \cos \beta \frac{\partial V\bar{G}}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Is omgekeerd aan deze betrekking voldaan, dan kan  $\lambda$  bepaald worden uit:

$$\lambda = -\int \{ \cos \alpha V\bar{E} du + \cos \beta V\bar{G} dv \} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Deze waarde van  $\lambda$ , in de uitdrukkingen (2) gesubstitueerd, geeft de oppervlakken, voor welke de stralen van het stelsel ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) de normalen zijn.

De voorwaarde (3) kan anders worden geschreven. Voor de krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$  wordt de geodetische kromming bepaald door <sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{\rho_v} = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{1}{\rho_u} = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

Wordt dit in (3) gesubstitueerd, dan neemt de noodige en voldoende voorwaarde, aan welke voldaan moet zijn opdat het stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  een normaal stralenstelsel zij, den volgende eenvoudigen vorm aan:

$$\frac{\cos \alpha}{\rho_v} = \frac{\cos \beta}{\rho_u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Derhalve: Een stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  is alleen dan een normaal stralenstelsel, wanneer de verhouding der geodetische kromtestralen der, door een willekeurig punt van het gegeven oppervlak gaande, krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$  constant is. Is omgekeerd die verhouding constant, bijv.  $\frac{\rho_v}{\rho_u} = m$ , dan zal elk stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , waarvoor  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = m$  is, een normaal stralenstelsel zijn.

Op te merken valt, dat in dit geval niet één doch  $\infty^1$  stralenstelsels  $(\alpha, \beta, \gamma)$  verkregen worden, die alle normale stelsels zullen zijn. Die stralen dezer  $\infty^1$  stelsels, die door een zelfde punt M van het oppervlak gaan, liggen in een plat vlak door de normaal van het oppervlak in M, terwijl het met de raaklijnen aan de krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$  door M achtereenvolgens hoeken maakt, voor welke de verhouding der cosinussen gelijk  $m$  is.

De voorwaarde (5), die geschreven kan worden  $\rho_u \cos \alpha = \rho_v \cos \beta$ , laat zich ook als volgt in woorden brengen:

Opdat een stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  een normaal stelsel zij, moeten de projecties der stralen van geodetische kromming der beide, door een willekeurig punt M van het gegeven oppervlak gaande, orthogonale krommen  $v = C_1$ ,  $u = C_2$ , op den straal van het stelsel door M gelijk zijn en omgekeerd.

<sup>1)</sup> Zie bijv. L. BIANCHI. *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Deutsche Uebersetzung von Max Lükat, S. 148.

Bij een omwentelingsoppervlak bijv., waarop de meridianen als krommen  $v = C$ , de parallelen als krommen  $u = C$  zijn aangenomen, kan het lijnelement worden geschreven in den vorm  $ds^2 = du^2 + \phi(u)dv^2$ . Hier is  $\rho_v = \infty$ ; ten einde derhalve in dit geval een normaal stralenstelsel te verkrijgen, moet ook  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \infty$  of  $\beta = \frac{\pi}{2}$  zijn, of:

*Wordt, door elk punt  $M$  van een omwentelingsoppervlak een straal gebracht, gelegen in het meridiaanvlak door  $M$ , die met de raaklijn aan de meridiaan en de normaal constante hoeken  $\alpha$  en  $\gamma$  maakt  $\left(\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}\right)$  dan vormen deze stralen een normaal stralenstelsel.*

Dit laatste is slechts een bijzonder geval van de volgende, meer algemeene eigenschap, met behulp van welke, wanneer het oppervlak geheel willekeurig is, dergelijke normale stralenstelsels te vinden zijn. — Laten toch op een willekeurig oppervlak, de krommen  $v = C$  geodetische krommen, de krommen  $u = C$  de rechthoekige doorsnijdingskrommen dezer geodetische lijnen zijn, dan heeft het lijnelement op dit oppervlak den vorm:

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2,$$

waarin  $G$  in 't algemeen eene functie zoowel van  $u$  als van  $v$  voorstelt. Hier is dan weder  $\rho_v = \infty$ , waaruit volgt, dat aan de voorwaarde (5) zal voldaan worden door  $\beta = \frac{\pi}{2}$  te nemen.

Derhalve:

*Zijn, op een willekeurig oppervlak, de krommen  $v = C$  geodetische krommen, de krommen  $u = C$  hunne rechthoekige doorsnijdingskrommen en wordt door elk punt  $M$  van het oppervlak, in 't normaalvlak, dat aan de geodetische kromme raakt, een straal getrokken, die met de normaal in  $M$  een constanten hoek  $\alpha$  maakt, dan vormen deze stralen te samen een normaal stralenstelsel.*

Wijl, op een omwentelingsoppervlak, de meridianen geodetische krommen zijn, is de voor dergelijke oppervlakken afgeleide eigenschap, een gevolg van deze meer algemeene.

Uit (4) volgt nog dat  $\lambda$ , het stuk dat van af het punt  $M(x, y, z)$  op elken straal moet worden uitgezet, opdat het uiteinde van dit stuk tot meetkundige plaats heeft een opper-

vlak, waarvoor de stralen van het stelsel de normalen zijn, wijl  $\beta = \frac{\pi}{2}$  is, bepaald wordt door de formule:

$$\lambda = - \int \cos \alpha \, du = -u \cos \alpha + C.$$

Wordt dus, op de raaklijn aan de geodetische lijn  $v = C$ , door een willekeurig punt  $M$  van het oppervlak, van af  $M$  een stuk uitgezet gelijk  $u$ , in de negatieve richting (d. i. in die richting in welke  $u$  afneemt) en wordt op dit stuk als middel-lijn een cirkel beschreven, liggende in het normaalvlak door die raaklijn gaande, dan zal het snijpunt van dien cirkel met den straal door  $M$ , die in dat vlak ligt en een constanten hoek  $\alpha$  met de raaklijn maakt, een oppervlak doorloopen, waarvoor de stralen van het stelsel  $\left(\alpha, 0, \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  de normalen zijn.

4. Is aan de voorwaarde (5) voldaan, dan zal ook het stralenstelsel gevormd door die rechten, die de middelpunten van geodetische kromming der, door een punt  $M$  van het oppervlak gaande,  $v$  en  $u$  krommen verbinden, een normaal stralenstelsel wezen. Immers zulk een straal verbindt het punt  $M_1$ , d. i. het middelpunt van geodetische kromming der kromme  $u = C$ , welk middelpunt ligt op de raaklijn in  $M$  aan de kromme  $v = C$  en tot coördinaten heeft:

$$x + \rho_u a, \quad y + \rho_u a', \quad z + \rho_u a'',$$

met het punt  $M_2$ , middelpunt van geodetische kromming der kromme  $v = C$ , waarvoor de coördinaten zijn:

$$x + \rho_v b, \quad y + \rho_v b', \quad z + \rho_v b''.$$

Zijn  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  de hoeken door dien straal met de coördinaat-assen gevormd, dan is:

$$\frac{\cos \phi_1}{\rho_u a - \rho_v b} = \frac{\cos \phi_2}{\rho_u a' - \rho_v b'} = \frac{\cos \phi_3}{\rho_u a'' - \rho_v b''} = \frac{1}{\sqrt{\rho_u^2 + \rho_v^2}}.$$

en worden de coördinaten  $(x_1, y_1, z_1)$  van een willekeurig punt op dien straal uitgedrukt door de formules:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + \rho_u a + \lambda \cos \phi_1 \\ y_1 &= y + \rho_u a' + \lambda \cos \phi_2 \\ z_1 &= z + \rho_u a'' + \lambda \cos \phi_3 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

waarin  $\lambda$  de afstand van het punt  $x_1, y_1, z_1$  tot het punt  $M_1$  voorstelt. Het stralenstelsel, door deze vergelijkingen bepaald, zal nu weder een normaal stelsel zijn, wanneer het mogelijk is  $\lambda$  zoodanig als functie van  $u$  en  $v$  te bepalen, dat het door  $x_1, y_1, z_1$  doorloopen oppervlak in ieder punt loodrecht zij op den straal door dat punt, d. i. wanneer aan de voorwaarde

$$dx_1 \cos \phi_1 + dy_1 \cos \phi_2 + dz_1 \cos \phi_3 = 0$$

onafhankelijk van de verhouding  $\frac{du}{dv}$  voldaan wordt. Hierin  $x_1, y_1$  en  $z_1$  door de bovenstaande waarden vervangende, gaat de betrekking over in:

$$d\lambda + \Sigma dx \cos \phi + d\rho_n \Sigma a \cos \phi + \rho_n \Sigma da \cos \phi = 0,$$

waarin  $\Sigma dx \cos \phi = dx \cos \phi_1 + dy \cos \phi_2 + dz \cos \phi_3$ , enz. is.

Wijl  $\Sigma dx \cos \phi + \rho_n \Sigma da \cos \phi = 0$  <sup>1)</sup> is, reduceert zich het bovenstaande tot:

1) Dat werkelijk  $\Sigma dx \cos \phi + \rho_n \Sigma da \cos \phi = 0$  is, kan o.a. als volgt aangetoond worden. Men heeft  $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = a\sqrt{E} du + b\sqrt{G} dv$

$$da = \frac{\partial a}{\partial u} du + \frac{\partial a}{\partial v} dv.$$

Voert men dit in, dan wordt:

$$\Sigma dx \cos \phi + \rho_n \Sigma da \cos \phi = \\ = \frac{1}{\sqrt{e_n^2 + e_r^2}} \left\{ \left( e_n \sqrt{E} - e_n e_r \Sigma b \frac{\partial a}{\partial u} \right) du - \left( e_r \sqrt{G} + e_n e_r \Sigma b \frac{\partial a}{\partial v} \right) dv \right\}.$$

Maar

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{1}{2\sqrt{E}^3} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial u}, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2\sqrt{E}^3} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial v}.$$

Derhalve:

$$\Sigma b \frac{\partial a}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \Sigma b \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Uit:

$$E = \Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad G = \Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \text{ leidt men nu af:}$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad \text{d. i. } \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{DG}{du}.$$



5. Op elken straal van een stralenstelsel liggen vier merkwaardige punten: 1°. de beide brand- of focaalpunten, 2°. de beide grenspunten.

De abscissen der brandpunten worden bepaald door de vierkantsvergelijking:

$$(EG - F^2)\rho^2 + (gE + eG - (f + f')F) + (eg - ff') = 0 \quad (8),$$

terwijl die der grenspunten de wortels zullen zijn van:

$$(EG - F^2)R^2 + (gE + eG - (f + f')F)R + eg - \frac{(f + f')^2}{4} = 0 \quad (9).$$

In deze vergelijkingen beteekenen de, door KUMMER ingevoerde grootheden E tot g:

$$E = \Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2, \quad F = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G = \Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2,$$

$$e = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad f = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad f' = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad g = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Teneinde deze grootheden voor de beschouwde stralenstelsels ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) te berekenen, kan men allereerst uit de formules (1) afleiden:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial b}{\partial u} \cos \beta + \frac{\partial c}{\partial u} \cos \gamma,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial a'}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial b'}{\partial u} \cos \beta + \frac{\partial c'}{\partial u} \cos \gamma,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial a''}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial b''}{\partial u} \cos \beta + \frac{\partial c''}{\partial u} \cos \gamma,$$

terwijl voor  $\frac{\partial X}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial v}$  en  $\frac{\partial Z}{\partial v}$  dergelijke uitdrukkingen verkregen worden, die hieruit ontstaan, door  $u$  in  $v$  te veranderen.

$$\text{Wordt nu } \Sigma c \frac{\partial b}{\partial u} = - \Sigma b \frac{\partial c}{\partial u} = p, \quad \Sigma a \frac{\partial c}{\partial u} = - \Sigma c \frac{\partial a}{\partial u} = q,$$

$$\Sigma b \frac{\partial a}{\partial u} = - \Sigma a \frac{\partial b}{\partial u} = r \text{ gesteld, dan kunnen de, in bovenstaande}$$

<sup>1)</sup> KUMMER, *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme*. Journal von Crelle. Bd. 67, 1860.



vergelijkingen optredende, differentiaalquotienten als volgt worden uitgedrukt:

$$\frac{\partial a}{\partial u} = br - cq, \quad \frac{\partial a'}{\partial u} = b'r - c'q, \quad \frac{\partial a''}{\partial u} = b''r - c''q,$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} = cp - ar, \quad \frac{\partial b'}{\partial u} = c'p - a'r, \quad \frac{\partial b''}{\partial u} = c''p - a''r,$$

$$\frac{\partial c}{\partial u} = aq - bp, \quad \frac{\partial c'}{\partial u} = a'q - b'p, \quad \frac{\partial c''}{\partial u} = a''q - b''p.$$

Evenzoo worden,  $\Sigma c \frac{\partial b}{\partial v} = -\Sigma b \frac{\partial c}{\partial v} = p_1$ ,  $\Sigma a \frac{\partial c}{\partial v} = -\Sigma c \frac{\partial a}{\partial v} = q_1$ ,

$\Sigma b \frac{\partial a}{\partial v} = -\Sigma a \frac{\partial b}{\partial v} = r_1$  stellende, voor  $\frac{\partial a}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial b}{\partial v}$  enz. dergelijke

uitdrukkingen als voor  $\frac{\partial a}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial b}{\partial u}$  enz. verkregen, waarin  $p$ ,  $q$

en  $r$  door  $p_1$ ,  $q_1$  en  $r_1$  vervangen zijn.

Met behulp dezer vormen wordt nu gemakkelijk gevonden:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a (q \cos \gamma - r \cos \beta) + b (r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c (p \cos \beta - q \cos \alpha),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = a' (q \cos \gamma - r \cos \beta) + b' (r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c' (p \cos \beta - q \cos \alpha),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = a'' (q \cos \gamma - r \cos \beta) + b'' (r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c'' (p \cos \beta - q \cos \alpha),$$

enz.

Voor de groottheden  $E \dots g$  volgt dan uit het voorgaande:

$$E = \Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = (q \cos \gamma - r \cos \beta)^2 + (r \cos \alpha - p \cos \gamma)^2 + \\ + (p \cos \beta - q \cos \alpha)^2,$$

$$F = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = (q \cos \gamma - r \cos \beta) (q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta) + \\ + (r \cos \alpha - p \cos \gamma) (r_1 \cos \alpha - p_1 \cos \gamma) + \\ + (p \cos \beta - q \cos \alpha) (p_1 \cos \beta - q_1 \cos \alpha),$$

$$G = \Sigma \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = (q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta)^2 + (r_1 \cos \alpha - p_1 \cos \gamma)^2 + \\ + (p_1 \cos \beta - q_1 \cos \alpha)^2,$$

$$e = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{E} (q \cos \gamma - r \cos \beta),$$

$$f = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{G} (r \cos \alpha - p \cos \gamma),$$

$$f' = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{E} (q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta),$$

$$g = \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{G} (r_1 \cos \alpha - p_1 \cos \gamma).$$

En hieruit volgt weder:

$$EG - F^2 = \{(qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \cos \beta + (pq_1 - p_1q) \cos \gamma\}^2$$

$$Eg + Ge - (f + f') F =$$

$$= \sqrt{EG - F^2} \cdot [\sqrt{E}\{(p_1 \cos \alpha + q_1 \cos \beta + r_1 \cos \gamma) \cos \alpha - p_1\} + \\ + \sqrt{G}\{q - (p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma) \cos \beta\}].$$

$$eg - ff' = \sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{EG} \cos \gamma.$$

$$eg - \left(\frac{f + f'}{2}\right)^2 = eg - ff' - \left(\frac{f - f'}{2}\right)^2 = \sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{EG} \cos \gamma - \\ - \left\{ \frac{\sqrt{G}(r \cos \alpha - p \cos \gamma) - \sqrt{E}(q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta)}{2} \right\}^2.$$

Na substitutie dezer waarden in de vergelijking (8), verkrijgt men, ter bepaling van de abscissen der beide brandpunten, op een straal van het stelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  gelegen, de vierkantsvergelijking:

$$\{(qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \cos \beta + (pq_1 - p_1q) \cos \gamma\} \rho^2 + \\ + [\sqrt{E}\{(p_1 \cos \alpha + q_1 \cos \beta + r_1 \cos \gamma) \cos \alpha - p_1\} + \\ + \sqrt{G}\{q - (p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma) \cos \beta\}] \rho + \sqrt{EG} \cos \gamma = 0 \quad (10).$$

Bij de afleiding dezer vergelijking is de factor:

$$(qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \cos \beta + (pq_1 - p_1q) \cos \gamma$$

afgezonderd. Deze factor is, in 't algemeen niet nul; immers, wijl  $p, q \dots r_1$  functies van  $u$  en  $v$  zijn, zal de vergelijking, die men verkrijgt door dezen factor gelijk nul te stellen, eene

kromme op het oppervlak bepalen. Alleen in de punten van die kromme, zal dus die factor nul zijn.

Wordt het eerste lid der vergelijking (10) voorgesteld door  $V$ , dan blijkt onmiddellijk, dat de vierkantsvergelijking (9), die dient ter bepaling der abscissen van de, op een straal van het stelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  gelegen, grenspunten kan worden geschreven in den vorm:

$$\{ (qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \cos \beta + (pq_1 - p_1q) \cos \gamma \} V - \left\{ \frac{\sqrt{G}(r \cos \alpha - p \cos \gamma) - \sqrt{E}(q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta)}{2} \right\}^2 = 0 \quad (11).$$

6. De grootheden  $p, q \dots r_1$  uit het voorgaande nummer kunnen worden uitgedrukt in de, door GAUSS in de theorie der oppervlakken ingevoerde en op het oorspronkelijk oppervlak betrekking hebbende grootheden  $E, G, D, D'$  en  $D''$ . Wijl toch:

$$a = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad c = a'b'' - a''b',$$

heeft men:

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{1}{2\sqrt{E}^3} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial u}, \quad \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2\sqrt{G}^3} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} \text{ enz.}$$

Hieruit volgt:

$$p = \Sigma c \frac{\partial b}{\partial u} = \Sigma c \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2\sqrt{G}^3} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} \right\} = \frac{1}{G\sqrt{E}} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right| = \frac{D'}{\sqrt{G}}.$$

$$p_1 = \Sigma c \frac{\partial b}{\partial v} = \Sigma c \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \frac{1}{2\sqrt{G}^3} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} \right\} = \frac{1}{G\sqrt{E}} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right| = \frac{D''}{\sqrt{G}}.$$

Evenzoo zal men vinden:

$$q = - \Sigma c \frac{\partial a}{\partial u} = - \frac{D}{\sqrt{E}}, \quad q_1 = - \Sigma c \frac{\partial a}{\partial v} = - \frac{D'}{\sqrt{E}}.$$

$$r = \Sigma b \frac{\partial a}{\partial u} = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}}{\rho}, \quad r_1 = \Sigma b \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} = - \frac{\sqrt{G}}{\rho_1}.$$

waarin weder  $\rho$ , en  $\rho_1$  de stralen van geodetische kromming der beide krommen  $v = C$ ,  $u = C_1$  voorstellen.

De grootheden  $p, q \dots r_1$  hebben ook eene kinematische beteekenis. De drie rechten MA, MB en MC, d. z. de raaklijnen aan de krommen  $v = C_1, u = C_2$  door een willekeurig punt M van het gegeven oppervlak en de normaal in dat punt, vormen een drievlakkenhoek, met welks ribben de straal van het stelsel door M de constante hoeken  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  maakt. Verplaatst zich nu het punt M  $(x, y, z)$  langs de kromme  $v = C$  tot het in een opvolgend punt M'  $\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} du, y + \frac{\partial y}{\partial u} du, z + \frac{\partial z}{\partial u} du\right)$

dier kromme gekomen is, dan kan het onveranderlijke stelsel, gevormd door den juist genoemden drievlakkenhoek en den vast daarmede verbonden straal, uit den oorspronkelijken stand in den nieuwen stand gebracht worden door eene translatie en eene gelijktijdige rotatie om eene as door M. De projecties der snelheid in de translatie-beweging op OX, OY en OZ zullen zijn  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ , terwijl de projecties der hoeksnelheid in de rotatiebeweging op MA, MB en MC zullen wezen  $p, q$  en  $r$ . Immers beschouwt men  $du$  als de oneindig kleine tijd, gedurende welken deze beweging geschiedt, dan zal eerstens ten gevolge van de translatie het punt M komen in  $M_1$ . Verder zullen, in de rotatiebeweging de projecties der snelheid van een punt P op den straal, dat op de eenheid van afstand verwijderd is van M en welks coördinaten ten opzichte van MA, MB en MC derhalve zijn  $\cos \alpha, \cos \beta$  en  $\cos \gamma$ , op die rechten wezen:

$$q \cos \gamma - r \cos \beta, \quad r \cos \alpha - p \cos \gamma, \quad p \cos \beta - q \cos \alpha.$$

De projecties dier snelheid op OX, OY en OZ zullen dan zijn:

$$\begin{aligned} a(q \cos \gamma - r \cos \beta) + b(r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c(p \cos \beta - q \cos \alpha), \\ a'(q \cos \gamma - r \cos \beta) + b'(r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c'(p \cos \beta - q \cos \alpha), \\ a''(q \cos \gamma - r \cos \beta) + b''(r \cos \alpha - p \cos \gamma) + c''(p \cos \beta - q \cos \alpha), \end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen stellen echter, blijkens het voorgaande, juist voor  $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}$  en  $\frac{\partial Z}{\partial u}$ . De verplaatsing van P, ten gevolge der rotatie, op OX, OY en OZ geprojecteerd zal dus opleveren  $\frac{\partial X}{\partial u} du, \frac{\partial Y}{\partial u} du, \frac{\partial Z}{\partial u} du$ .

De straal door M:

$$\xi = x + \lambda X, \quad \eta = y + \lambda Y, \quad \zeta = z + \lambda Z,$$

gaat derhalve, tengevolge van beide bewegingen over in:

$$\xi = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \lambda \left( X + \frac{\partial X}{\partial u} du \right) \text{ enz. ,}$$

d. i. in den straal van 't stelsel door M'.

Op dezelfde wijze wordt aangetoond, dat wanneer het punt M zich langs eene kromme  $u = C$  verplaatst, de in het voorgaande genoemde drievlakkenhoek en de vast daarmee verbonden straal van het stelsel door M, uit zijn eersten in een opvolgenden stand wordt overgebracht door eene translatie, waarvan de projecties op MA, MB en MC zijn, 0,  $\sqrt{G} dv$ , 0 en eene rotatie om eene as door M met eene hoeksnelheid, welker projecties op MA, MB en MC juist de, in 't voorgaande nummer ingevoerde grootheden  $p_1$ ,  $q_1$  en  $r_1$  zijn.

Uit deze beschouwingen volgt o.a. nog:

1°.  $p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma$  en  $p_1 \cos \alpha + q_1 \cos \beta + r_1 \cos \gamma$  zijn de projecties op den straal van het stelsel, der hoeksnelheden in de eerste, respectievelijk de tweede der bovengenoemde oogenblikkelijke rotaties.

2°.  $(qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \cos \beta + (pq_1 - p_1q) \cos \gamma$  is dan alleen nul, wanneer de straal van het stelsel, door een punt van het oppervlak gaande, gelegen is in het vlak, dat men door de beide oogenblikkelijke rotatie-assen kan brengen <sup>1)</sup>.

7. Uit de vergelijkingen (10) en (11) laten zich een aantal gevolgtrekkingen afleiden, waaraan in 't volgende enkele genoemd worden:

1°. De op een straal gelegen grenspunten vallen steeds met de brandpunten van dien straal samen, wanneer  $f = f'$ , d. i.  $\sqrt{G}(r \cos \alpha - p \cos \gamma) = \sqrt{E}(q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta)$  is. In dat geval zal het stralenstelsel een normaal stelsel zijn. Substitueert men hierin voor  $p$ ,  $q$  enz. de in 6 gevonden waarden, dan wordt de vroeger afgeleide voorwaarde voor een dergelijk stelsel teruggevonden, n.l.

<sup>1)</sup> Zie hierover o.a. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Tome I, p. 66 et Tome II, Livre V.

$$\frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial E}{\partial s} \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} \cos \beta \quad \text{of} \quad \frac{\cos \alpha}{\rho_s} = \frac{\cos \beta}{\rho_u}.$$

Aan deze voorwaarde wordt, onafhankelijk van  $\rho_u$  en  $\rho_v$  voldaan als  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ . In dat geval gaat het stralenstelsel over in het stelsel der normalen van 't gegeven oppervlak en bepaalt de vergelijking (10) of (11) de hoofdkromtestralen in een punt van dat oppervlak. Werkelijk wordt die vergelijking dan:

$$(pq_1 - p_1q)\rho^2 - (p_1\sqrt{E} - q_1\sqrt{G})\rho + \sqrt{E}G = 0$$

$$\text{d.i.} \quad (DD'' - D^2)\rho^2 - (D'E + DG)\rho + EG = 0. \quad . \quad (12),$$

de bekende vergelijking ter bepaling van de hoofdkromtestralen in een punt van het oppervlak.

2e. Wordt in (10)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  genomen, dan gaat het stralenstelsel over in het stelsel der raaklijnen aan de krommen  $v = C$  getrokken. Een der brandpunten van elken straal ligt dan in 't punt, in 't welk die straal het gegeven oppervlak, dat een der focaaloppervlakken zal zijn, aanraakt. De abscis van het tweede brandpunt op dien straal, welke abscis door  $l_1$  worde aangewezen, wordt bepaald door:

$$l_1 = \frac{-\sqrt{G}q}{qr_1 - rq_1} = \frac{D\sqrt{G}\rho_u\rho_v}{D\sqrt{G}\rho_v + D'\sqrt{E}\rho_u} \quad . \quad . \quad (13).$$

Evenzoo zal, als  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gesteld wordt en het stralenstelsel dus bestaat uit het stelsel der raaklijnen aan de krommen  $u = C$ , een der brandpunten liggen in het punt in 't welk die straal het oppervlak aanraakt, terwijl de abscis  $l_2$  van het tweede brandpunt op dien straal bepaald wordt door:

$$l_2 = \frac{\sqrt{E}p_1}{rp_1 - r_1p} = \frac{D'\sqrt{E}\rho_u\rho_v}{D'\sqrt{E}\rho_v + D\sqrt{G}\rho_u} \quad . \quad . \quad (14).$$

Uit de vergelijkingen (13) en (14), die ook aldus kunnen geschreven worden:

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{\rho_u} + \frac{D'\sqrt{E}}{D\sqrt{G}} \frac{1}{\rho_v}, \quad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{\rho_v} + \frac{D'\sqrt{G}}{D\sqrt{E}} \frac{1}{\rho_u},$$

volgt onmiddellijk, dat wanneer  $v = C$ ,  $u = C$  de kromtelijnen op het gegeven oppervlak zijn, in welk geval  $D' = 0$  is,  $l_1 = \rho_u$  en  $l_2 = \rho_v$  zal wezen. Derhalve:

*De raaklijnen aan elk der stelsels kromtelijnen op een oppervlak vormen een stralenstelsel, waarvoor dit oppervlak een focaaloppervlak is. Het tweede focaaloppervlak van dit stralenstelsel is de meetkundige plaats der middelpunten van geodetische kromming dier kromtelijnen, die de stralen van het stralenstelsel niet aanraken <sup>1)</sup>.*

Uit (13) volgt ook nog, dat  $l_1 = \rho_u$  is, voor  $\rho_v = \infty$ , d. i. wanneer de krommen  $v = C$  geodetische krommen op het oppervlak zijn, of:

*Heeft men op een oppervlak een stelsel geodetische krommen  $v = C$  en hunne rechthoekige doorsnijdingskrommen  $u = C$  en wordt op elke raaklijn aan eens geodetische kromme, van af het raakpunt, een stuk uitgezet gelijk aan den straal van geodetische kromming der, door dat punt gaande, rechthoekige doorsnijdingskromme, dan zal de meetkundige plaats van de uiteinden dier stukken het tweede focaaloppervlak zijn van 't stralenstelsel, door die raaklijnen gevormd.*

3e. Wordt in (10)  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  genomen, dan vallen de stralen van het stelsel samen met de raaklijnen aan die krommen op het oppervlak, die de krommen  $v = C$  onder een constanten hoek  $\alpha$  snijden. Weêr valt dan een der brandpunten in het raakpunt van straal en oppervlak. De abscis  $l$  van het tweede brandpunt wordt bepaald uit:

$$\{(qr_1 - q_1r) \cos \alpha + (rp_1 - r_1p) \sin \alpha\} l + \{ \sqrt{E}(-p_1 \sin^2 \alpha + q_1 \sin \alpha \cos \alpha) + \sqrt{G}(q \cos^2 \alpha - p \sin \alpha \cos \alpha) \} = 0.$$

Zeer eenvoudig wordt dit, wanneer  $v = C$ ,  $u = C$  de kromtelijnen van het oppervlak zijn. Dan toch is  $D' = 0$ , dus ook  $p = q_1 = 0$ . Verder zijn in dat geval, zooals uit (12) blijkt, de beide hoofdkromtestralen in een punt van het oppervlak:

$$\rho_1 = \frac{E}{D}, \quad \rho_2 = \frac{G}{D''},$$

<sup>1)</sup> Zie over stralenstelsels, door de raaklijnen aan de kromtelijnen van een oppervlak gevormd, R. v. LILIENTHAL. *Ueber eine besonders Art von Strahlensystemen*. Math. Annalen Bd. XXXI, A. PELL. *On the focal surfaces of the Congruences of Tangents to a given Surface*. American Journal of Mathematics. Vol. XX,

waarbij  $\rho_1$  en  $\rho_2$  die hoofdkromtestralen zijn, die achtereenvolgens bij de kromtelijnen  $v = C$ ,  $u = C$  behooren. Substitueert men dit alles in de bovenstaande vergelijking, dan gaat zij over in:

$$l \left\{ \frac{\cos \alpha}{l_1 \rho_1} + \frac{\sin \alpha}{l_2 \rho_2} \right\} - \left\{ \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_2} \right\} = 0.$$

Volgens de bekende formule van EULER is echter, wanneer  $\rho$  voorstelt de kromtestraal der normaaldoorsnede van 't oppervlak, die door de beschouwde raaklijn gaat:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_2},$$

zoodat de laatst gevonden betrekking overgaat in:

$$\frac{1}{\rho l} = \frac{\cos \alpha}{\rho_1 l_1} + \frac{\sin \alpha}{\rho_2 l_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

4e. Wordt voor de krommen  $v = C$  op het oppervlak een stelsel asymptotische lijnen aangenomen, dus  $u = C$  de rechtehoekige doorsnijdingskrommen, dan is, wijl aan de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen, nl.  $Ddu^2 + 2 D'dudv + D''dv^2 = 0$  moet worden voldaan door  $v = C$ ;  $D = 0$ , dus  $q = 0$ . Laat men nu het stralenstelsel samenvallen met de raaklijnen aan die asymptotische krommen, dan volgt uit (14)  $l_1 = 0$ , d. i. de bekende eigenschap: De raaklijnen aan de asymptotische lijnen op een oppervlak vormen een stralenstelsel, waarvan de beide focaaloppervlakken met dat oppervlak samenvallen.

In dat geval is het gegeven oppervlak tevens middenoppervlak, d. i. meetkundige plaats der, midden tusschen de branden grenspunten, op de stralen gelegen punten. Werkelijk gaat in dat geval de vergelijking (11), die ter bepaling van de abscissen der grenspunten dient, wanneer daarin gesteld wordt

$$\alpha = 0^\circ, \quad \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad q = 0, \quad \text{over in:}$$

$$q_1^2 r^2 \cdot R^2 - \frac{Gr^2}{4} = 0 \quad \text{of} \quad R^2 = \frac{G}{4q_1^2} = \frac{EG}{D'^2}.$$

Nu is echter, zooals uit (12) blijkt,  $\frac{EG}{D^2} = -\rho_1 \rho_2$ ,  $\rho_1$  en  $\rho_2$



weder de hoofdkromtestralen zijnde, zoodat ten slotte gevonden wordt:

$$R = \pm \sqrt{-\rho_1 \rho_2}.$$

*Wordt derhalve, op elke raaklijn aan de asymptotische lijnen van een stelsel, van af het raakpunt naar weërskanten een stuk uitgezet, gelijk  $\sqrt{-\rho_1 \rho_2}$ , dan zullen de uiteinden dier stukken de grensoppervlakken doorloopen van het stralenstelsel, door die raaklijnen gevormd.*

8. Denkt men zich door een bepaald punt  $M$  van het oppervlak alle mogelijke stralen gebracht, dan maakt elk dezer stralen deel uit van één bepaald stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , dat bij het gegeven oppervlak behoort. De meetkundige plaats der brandpunten, zoowel als die der grenspunten, op die stralen gelegen, is dadelijk te vinden. Neemt men toch de raaklijnen  $MA$  en  $MB$  aan de door  $M$  gaande krommen  $v = C$ ,  $u = C$ , benevens de normaal  $MC$  in dat punt tot coördinaatassen aan, dan zullen, ten opzichte dier assen, de coördinaten van een brandpunt op een straal  $(\alpha, \beta, \gamma)$  gelegen, zijn:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma.$$

Evenzoo zullen de coördinaten van een, op dien straal liggend, grenspunt zijn:

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \cos \beta, \quad z = R \cos \gamma.$$

Elimineert men nu, uit de vergelijking (10) en de drie uitdrukkingen voor de coördinaten van een brandpunt, de hoeken  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$ , dan verkrijgt men, als vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten op alle, door  $M$  gaande, stralen gelegen:

$$\begin{aligned} &\{(qr_1 - rq_1)X + (rp_1 - pr_1)Y + (pq_1 - p_1q)Z\}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \\ &\quad + [\sqrt{E}(q_1XY + r_1ZX - p_1(Y^2 + Z^2))\} + \\ &\quad + \sqrt{G}\{q(Z^2 + X^2) - pXY - rYZ\} + \sqrt{EG} \cdot Z = 0. \quad (16). \end{aligned}$$

Stelt men het eerste lid dezer vergelijking voor door  $V$ , dan vindt men, op dezelfde wijze, als vergelijking van de meetkundige plaats der grenspunten op alle, door  $M$  gaande, stralen gelegen, waarbij ook weder elk dier stralen gerekend

wordt te behooren tot één bepaald stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$\{(qr_1 - rq_1)X + (rp_1 - pr_1)Y + (pq_1 - p_1q)Z\}V - \\ - \left\{ \frac{r\sqrt{G}X - r_1\sqrt{E}Y}{2} \right\}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Daaruit blijkt:

*De meetkundige plaats der brandpunten, op alle, door een bepaald punt M van het oppervlak, gaande stralen, waarbij elke straal gerekend wordt deel uit te maken van een stralenstelsel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  is steeds een oppervlak van de derde orde. Evenzoo zal de meetkundige plaats der grenspunten, op die stralen gelegen, steeds een oppervlak van de vierde orde wezen.*

Het oppervlak der brandpunten (16) raakt het gegeven oppervlak in M aan; het gaat verder door den imaginaircn cirkel in 't oneindige. Door elk vlak, evenwijdig aan:  $(qr_1 - q_1r)X + (rp_1 - r_1p)Y + (pq_1 - p_1q)Z = 0$  wordt het volgens eene kegelsnede gesneden; de rechte in 't oneindige dier vlakken zal dus eveneens op dit oppervlak gelegen zijn.

Het oppervlak der grenspunten (17) heeft in het punt M een conisch punt. Ook dit oppervlak gaat door den imaginaircn cirkel in 't oneindige en heeft verder met het vlak in 't oneindige gemeen de in dat vlak gelegen rechte van  $(qr_1 - q_1r)X + (rp_1 - r_1p)Y + (pq_1 - p_1q)Z = 0$ , die eene dubbelrechte van dit oppervlak zal zijn. Elk vlak, evenwijdig aan dit laatste, heeft dus met het oppervlak der grenspunten, behalve de tweemaal getelde rechte in 't oneindige, eene kegelsnede gemeen.

De beide oppervlakken (16) en (17) raken elkander aan, volgens de doorsnede van het oppervlak der brandpunten en

het vlak  $\sqrt{G}rX - \sqrt{E}r_1Y = 0$  of  $\frac{X}{\rho_1} + \frac{Y}{\rho_2} = 0$ . Op

elken straal, die M met een punt dier doorsnede verbindt, vallen dus de grenspunten van dien straal met de brandpunten samen. Alleen dan echter, wanneer dit vlak, in de verschillende punten M van het oppervlak constante hoeken maakt met de, door die punten gaande, raaklijnen der krommen  $v = C$ ,  $u = C$ , d. i. wanneer  $\rho_1 : \rho_2$  constant is, zal het stralenstelsel, waarvan die straal deel uitmaakt, zooals in 't voorgaande gevonden werd, een normaal stralenstelsel zijn.

Eenvoudiger worden de vergelijkingen der juist gevonden oppervlakken, wanneer men de orthogonale  $v$  en  $u$  krommen met bijzondere krommen op het oppervlak laat samenvallen. Zijn bijv. deze krommen de kromtelijnen van het oppervlak,

dan is:  $p = q_1 = 0$ ; verder  $p_1 = \frac{\sqrt{G}}{\rho_2}$ ,  $q = -\frac{\sqrt{E}}{\rho_1}$ ,  $r = \frac{\sqrt{E}}{l_2}$ ,  
 $r_1 = -\frac{\sqrt{G}}{l_1}$ .

De vergelijking (16) van het oppervlak der brandpunten kan dan worden geschreven in den vorm:

$$V \equiv \left\{ \frac{X}{\rho_1 l_1} + \frac{Y}{\rho_2 l_2} + \frac{Z}{\rho_1 \rho_2} \right\} (X^2 + Y^2 + Z^2) - \\ - \left\{ Z^2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{X^2}{\rho_1} + \frac{Y^2}{\rho_2} + \frac{ZX}{l_1} + \frac{YZ}{l_2} \right\} + Z = 0,$$

terwijl de vergelijking (17) van het oppervlak der grenspunten overgaat in:

$$\left\{ \frac{X}{\rho_1 l_1} + \frac{Y}{\rho_2 l_2} + \frac{Z}{\rho_1 \rho_2} \right\} V - \frac{1}{4} \left\{ \frac{X}{l_2} - \frac{Y}{l_1} \right\}^2 = 0 \text{ } ^1).$$

---

<sup>1)</sup> Voor het geval, dat  $u = C$  en  $v = C$  de kromtelijnen zijn, komen deze oppervlakken voor bij LIEBHART, Math. Annalen, Bd. XXXI.

## DE RECIPROKE POOLKROMME EENER KUBISCHE RUIMTEKROMME

DOOR

DR. P. ZEEMAN Gz.

1. Zooals bekend is, zal de reciproke poolkromme eener willekeurige kubische ruimtekromme  $k^3$  ten opzichte van een kwadratisch oppervlak weder eene kubische ruimtekromme  $k_1^3$  zijn. Elk vlak  $\pi$  der ruimte heeft toch met  $k^3$  drie punten A, B en C gemeen; de poolvlakken van A, B en C zijn dus de eenige osculatievlakken van  $k_1^3$ , welke door de pool P van het vlak  $\pi$  gaan. Evenzoo gaan door elk punt P der ruimte drie osculatievlakken van  $k^3$ ; de polen dezer osculatievlakken zijn de eenige punten van  $k_1^3$ , die in het vlak  $\pi$ , het poolvlak van P gelegen zijn. De kromme  $k_1^3$  heeft dus met elk vlak drie punten gemeen en door elk punt der ruimte gaan drie harer osculatievlakken; zij is derhalve eene kubische ruimtekromme.

In het volgende wordt onderzocht, van welke soort de kromme  $k_1^3$  zal wezen, wanneer  $k^3$  geheel willekeurig wordt aangenomen, terwijl het kwadratische oppervlak een bol B is, die achtereenvolgens ten opzichte van  $k^3$  alle mogelijke standen inneemt.

2. Ligt het middelpunt van den bol B op  $k^3$ , dan zal  $k_1^3$  eene kubische parabool zijn, wijl dan  $k_1^3$  tot osculatievlak heeft het poolvlak van dat middelpunt d. i. het vlak in 't oneindige. Daar het eenige punt in 't oneindige van  $k_1^3$  de pool is van het osculatievlak van  $k^3$ , dat door het middelpunt van den bol gaat, zullen de beschrijvende rechten van den eenigen (parabolischen) cylinder, welke door  $k_1^3$  kan worden gebracht, loodrecht zijn op dat osculatievlak.

*De reciproke poolkromme eener willekeurige kubische ruimte-kromme ten opzichte van een bol, waarvan het middelpunt op de kromme ligt, is derhalve eene kubische parabool.*

Door een willekeurig punt der ruimte gaan van  $k^3$  of drie reële, of één reël en twee imaginaire osculatievlakken. De punten van beide soorten worden van elkaâr gescheiden door het ontwikkelbare oppervlak van den vierden graad, dat omhuld wordt door de osculatievlakken van  $k^3$  en waarvan de raaklijnen dier kromme de beschrijvende rechten zijn. Door elk punt van dit oppervlak gaan drie osculatievlakken van  $k^3$ , waarvan twee samenvallen. Zegt men verder van de punten der ruimte, door welke drie reële osculatievlakken gaan, dat zij *buiten* en van de overige, dat zij *binnen* dit ontwikkelbare oppervlak zijn gelegen, dan heeft men:

Ligt het middelpunt van den bol B op het ontwikkelbare oppervlak, gevormd door de raaklijnen van  $k^3$ , dan zal  $k_1^3$  met het vlak in 't oneindige drie punten gemeen hebben, waarvan twee samenvallen;  $k_1^3$  is dus in dat geval eene *kubische parabolische hyperbool*. De, in 't oneindige gelegen, raaklijn dier kromme zal zijn de rechte in 't oneindige van een vlak, dat loodrecht staat op die raaklijn van  $k^3$ , waarop het middelpunt van den bol B is aangenomen.

Ligt het middelpunt van den bol B buiten het ontwikkelbare oppervlak, dan zal  $k_1^3$  met het vlak in 't oneindige drie reële punten gemeen hebben en dus eene *kubische hyperbool* zijn.

Ligt eindelijk het middelpunt van den bol binnen het ontwikkelbare oppervlak, dan zal  $k_1^3$  met het vlak in 't oneindige slechts één reël punt gemeen hebben; zij is derhalve eene *kubische ellips*.

In ieder dier gevallen liggen de punten in 't oneindige van  $k_1^3$  op rechten, die loodrecht zijn op die osculatievlakken van  $k^3$ , welke door het middelpunt van den bol B gaan; de richting der beschrijvende rechten van de, door  $k_1^3$  gaande cylinders, wordt door die rechten aangegeven.

3. Is het mogelijk de bol B zoo aan te nemen, dat,  $k^3$  steeds willekeurig zijnde, de reciproke poolkromme  $k_1^3$  eene *orthogonale kubische parabool* zal zijn? Hieronder verstaat men eene kubische parabool, bij welke één en dus  $\infty^1$  tripels van onderling loodrechte osculatievlakken optreden; de hoekpunten

van al die tripels liggen op eene rechte, de richtlijn der orthogonale kubische parabool.

Allereerst moet, opdat  $k_1^3$  eene kubische parabool zij, volgens het voorgaande het centrum van den bol B op  $k^3$  liggen. Verder moet bij  $k_1^3$  een tripel van onderling loodrechte osculatievlakken voorkomen. Is  $\alpha, \beta, \gamma$  zulk een tripel, dan zullen de drie rechten, die het centrum van B met de polen van  $\alpha, \beta, \gamma$  verbinden (welke punten op  $k^3$  liggen), wijl zij loodrecht zijn op  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$ , ook onderling loodrecht zijn. De kegel, die  $k^3$  uit het middelpunt van den bol projecteert, moet dan zoodanig zijn, dat daarop één (en derhalve  $\infty^1$ ) tripels van onderling loodrechte stralen liggen, m. a. w. die kegel moet een gelijkzijdige kegel wezen. Is omgekeerd een punt P van  $k^3$  de top van een gelijkzijdigen kegel door die kromme, dan zal de reciproke poolkromme van  $k^3$  ten opzichte van elken bol, die P tot middelpunt heeft, eene orthogonale kubische parabool zijn.

Op eene willekeurige kubische ruimtekromme  $k^3$  liggen nu twee punten P en Q zoodanig, dat uit die punten de kromme door een gelijkzijdigen kegel geprojecteerd wordt; zij liggen op die koorde der kromme, die de meetkundige plaats is van de hoogtepunten der driehoeken, welke door vlakken, loodrecht op die koorde, met de kromme bepaald worden. Alleen dus, wanneer het middelpunt van den bol B, in P of in Q wordt aangenomen (deze beide punten kunnen ook imaginair zijn), zal de reciproke poolkromme eene orthogonale kubische parabool wezen. De richtlijn van  $k_1^3$  zal, al naar dat P of Q tot centrum van B wordt aangenomen, een rechte zijn, die evenwijdig is aan de raaklijn van  $k^3$  in P of Q. Immers, op den gelijkzijdigen kegel, die  $k^3$  uit P projecteert, ligt de raaklijn  $p$  dier kromme in P. Het vlak, door P, loodrecht op  $p$  d. i. het normaalvlak van  $k_1^3$  in P snijdt derhalve die kromme, behalve in P, nog in twee punten D en E, zoodanig dat driehoek PDE rechthoekig is in P. Worden nu van de drie punten P, D en E de poolvlakken bepaald ten opzichte van een bol B, die in P zijn middelpunt heeft, dan zullen deze drie poolvlakken één tripel, onderling loodrechte osculatievlakken van  $k_1^3$  opleveren; hun snijpunt zal een punt der richtlijn van  $k_1^3$  zijn. Het poolvlak van P is het vlak in 't oneindige, de poolvlakken van D en E zijn twee vlakken, loodrecht op PD en PE; hunne doorsnede is dan loodrecht op PDE d. i. evenwijdig aan de

raaklijn  $p$ . Wyl nu het punt in 't oneindige dezer doorsnede een punt van de richtlijn van  $k_1^3$  moet wezen, zal deze evenwijdig zijn aan de raaklijn in P.

Men kan dit laatste ook als volgt aantoonen. Brengt men door P alle mogelijke tripels van onderling loodrechte koorden; zij PD, PE, PF zulk een tripel en D, E en F de punten, welke deze koorden, behalve P, nog met  $k^3$  gemeen hebben. De poolvlakken van D, E en F ten opzichte van den bol, waarvan het centrum in P valt, zijn drie onderling loodrechte vlakken; hun snijpunt, dat een punt der richtlijn van  $k_1^3$  moet zijn, is de pool van 't vlak DEF ten opzichte van dien bol. De richtlijn zelve is dus de meetkundige plaats der polen van de vlakken DEF, die  $k^3$  in drie punten snijden, zoodanig dat PD, PE en PF onderling loodrecht zijn. De tripels van punten bepalen nu op  $k^3$  eene involutie van de derde orde (eerste rang); de vlakken DEF gaan dus allen door eene rechte. Deze moet o. a. liggen in het normaalvlak der kromme in P; de richtlijn van  $k_1^3$  d. i. de toegevoegde poollijn dezer rechte, is dan loodrecht op dit normaalvlak of evenwijdig aan de raaklijn van  $k^3$  in P. Uit het voorgaande blijkt:

*De reciproke poolkromme van  $k^3$  ten opzichte van een bol is slechts dan eene orthogonale kubische parabool, wanneer het middelpunt van den bol wordt aangenomen in een der beide punten van  $k^3$ , uit welke die kromme door een gelijkzijdigen kegel geprojecteerd wordt. De richtlijn dier parabool is evenwijdig aan de raaklijn van  $k^3$  in het middelpunt van den bol.*

Bij eene bijzondere kubische ruimtekromme, nl. de *gelijkzijdige kubische hyperbool*, d. i. eene kubische hyperbool, waarvan de asymptoten onderling loodrecht zijn, is elke kegel, door welchen die kromme uit een harer punten geprojecteerd wordt, gelijkzijdig. De reciproke poolkromme dier kromme ten opzichte van elken bol, die een willekeurig punt P der kromme tot middelpunt heeft, is dus eene orthogonale kubische parabool. Hier zal de richtlijn dier kubische parabool de raaklijn der gelijkzijdige hyperbool in P zelve zijn. Op volkomen dezelfde wijze als boven toont men aan, dat die richtlijn moet gaan door het punt in 't oneindige op de raaklijn in P; bovendien gaat zij door P. Immers de rechten, die P met de punten in 't oneindige der kromme verbinden, zijn hier onderling loodrecht; de poolvlakken dier punten in 't oneindige ten opzichte van een

bol, die in  $P$  zijn middelpunt heeft, zullen drie vlakken zijn, die eveneens onderling loodrecht zijn, m. a. w.  $P$  is een punt der richtlijn.

't Zelfde zou men kunnen afleiden uit het feit, dat de vlakken  $DEF$  der bovengenoemde involutie hier allen evenwijdig zijn en dat derhalve de richtlijn der kubische parabool, de toegevoegde poollijn eener lijn in 't oneindige, door het centrum  $P$  van den bol moet gaan. Samenvattende, hebben wij:

*De reciproke poolkromme eener gelijkzijdige kubische hyperbool ten opzichte van een bol, waarvan het centrum in een punt  $P$  dier kromme ligt, is steeds eene orthogonale kubische parabool. Richtlijn dier kubische parabool is de raaklijn der kubische hyperbool in  $P$ .*

4. Is het mogelijk de bol  $B$  zoo aan te nemen, dat de reciproke poolkromme  $k_1^3$  eener willekeurige kubische ruimtekromme  $k^3$  een kubische cirkel zij, d. w. z. twee punten gemeen heeft met den imaginaircn cirkel in 't oneindige? Zal dit het geval zijn, dan moet, wjl het poolvlak van een punt op dien imaginaircn cirkel ten opzichte van  $B$  een vlak is, dat gaat door het middelpunt van den bol en raakt aan dien cirkel, het centrum van den bol  $B$  een punt zijn, waardoor twee osculatievlakken van  $k^3$  gaan, die den imaginaircn cirkel raken, d. w. z. dit middelpunt moet op eene der focaallijnen van  $k^3$  zijn gelegen en omgekeerd. — (Focaallijnen eener kubische ruimtekromme zijn de doorsneden van twee osculatievlakken dier kromme, welke den imaginaircn cirkel in 't oneindige aanraken; van de vijftien dergelijke lijnen zijn er òf drie, òf slechts ééne reël). Wij vinden dus:

*Opdat de reciproke poolkromme  $k_1^3$  van  $k^3$  ten opzichte van een bol  $B$  een kubische cirkel zij, moet het centrum van dien bol op eene der focaallijnen van  $k^3$  worden aangenomen.*

De beide imaginaire punten in 't oneindige van  $k_1^3$  liggen dan in een vlak, dat loodrecht is op de focaallijn, waarop het centrum is aangenomen.

5. Hoe moet de bol  $B$  worden aangenomen, opdat de reciproke poolkromme  $k_1^3$  van  $k^3$  eene gelijkzijdige kubische hyperbool zij? Daar deze kromme drie onderling loodrechte asymptoten heeft, zullen ook de rechten, die het middelpunt van  $B$



met de punten in 't oneindige dier kromme verbinden, onderling loodrechte lijnen moeten zijn. Zullen nu op  $k_1^3$  drie dergelijke punten liggen, dan moeten door het centrum van B drie onderling loodrechte osculatievlakken gaan en omgekeerd. Bij eene willekeurige kubische ruimtekromme  $k^3$  komen nu slechts twee punten voor, de zoogenaamde *orthogonaalpunten*, zoodanig dat door elk dezer drie onderling loodrechte osculatievlakken van  $k^3$  gaan. — Deze punten liggen op eene rechte, loodrecht op het centraalvlak dier kromme en symmetrisch ten opzichte van dat vlak; elk punt dier rechte is verder hoogtepunt voor  $\infty^1$  orthocentrische viervlakken, waarvan de zijvlakken osculatievlakken van  $k^3$  zijn. Derhalve:

*Opdat de reciproke poolkromme  $k_1^3$  van  $k^3$  ten opzichte van een bol eene gelijkzijdige kubische hyperbool zij, moet het centrum van dien bol in een der orthogonaalpunten van de kromme  $k^3$  worden aangenomen.*

Alleen bij de orthogonale kubische parabool komen niet twee, doch  $\infty^1$  punten voor, door elk van welke drie, onderling loodrechte osculatievlakken gaan; die punten liggen op de richtlijn der kromme. Daaruit volgt:

*De reciproke poolkromme eener orthogonale kubische parabool ten opzichte van een bol, waarvan het middelpunt ligt op de richtlijn dier kromme, zal eene gelijkzijdige kubische hyperbool zijn.*

Volgens het voorgaande, zal die gelijkzijdige kubische hyperbool gaan door het middelpunt van den bol en in dat punt de richtlijn der parabool aanraken. De asymptoten der kubische hyperbool zijn evenwijdig aan de rechten, volgens welke de osculatievlakken der kubische parabool, die door het middelpunt van den bol gaan, elkaar snijden.

6. In al het voorgaande is de straal van den bol geheel willekeurig gelaten; alleen is ondersteld, dat die straal niet nul is. Was de straal van den bol nul, dan verkrijgt men als reciproke poolkromme van  $k^3$  geene eigenlijke kubische ruimtekromme. Is toch B het middelpunt van een puntbol, dan worden de punten van  $k^3$  uit B door een kegel van de derde orde geprojecteerd. De poolvlakken dier punten zullen zijn de vlakken door B, loodrecht op de beschrijvende rechten van dien kegel; zij omhullen dus een kegel van de derde klasse. —

De osculatievlakken van  $k^3$  hebben allen tot polen het punt B; alleen voor die osculatievlakken der kromme, welke door B gaan, zal de pool onbepaald zijn in dien zin, dat elk punt der loodlijn in B op zulk een osculatievlak opgericht, als pool van dat vlak kan worden beschouwd. — Werd hier het punt B willekeurig aangenomen, gemakkelijk ziet men in op welke wijze de reciproke poolkromme van  $k^3$  ontgaat wanneer het punt B aangenomen wordt op  $k^3$  enz.

Het voorgaande kan worden uitgebreid tot het geval, dat men niet de reciproke poolkromme van  $k^3$  ten opzichte van een bol, doch ten opzichte van een willekeurig kwadratisch oppervlak bepaalt. Zoo vindt men o. a. onmiddellijk evenals in 2:

De reciproke poolkromme eener willekeurige kubische ruimtekromme  $k^3$  ten opzichte van een kwadratisch oppervlak met een middelpunt zal zijn:

1e. eene kubische parabool, wanneer het centrum van 't oppervlak op  $k^3$  gelegen is.

2e. eene kubische parabolische hyperbool, wanneer het centrum van 't oppervlak ligt op het ontwikkelbaar oppervlak van den vierden graad, door de osculatievlakken van  $k^3$  omhuld.

3e. eene kubische hyperbool of eene kubische ellips, naar mate het centrum van het kwadratisch oppervlak *buiten* of *binnen* dat ontwikkelbare oppervlak gelegen is.

De bepaling der voorwaarde, aan welke het kwadratisch oppervlak moet voldoen, opdat de reciproke poolkromme van  $k^3$  eene der in 3—5 genoemde bijzondere kubische ruimtekrommen zij, wordt echter in 't algemeen veel minder eenvoudig dan bij den bol.

---

## ANALOGA ZU DEN BEGRIFFEN „POSITIV“ UND „NEGATIV“

VON

G. MANNOURY.

---

### Einleitung.

§ 1. Beim Uebergange von der Arithmetik zur Algebra pflegt man öfters die positiven und negativen Zahlen nicht nur als neu einzuführende Benennungen sondern als neu zu bildende Begriffe zu betrachten. Es wird dadurch den Zeichen + und —, und insbesondere dem letzteren, eine doppelte Bedeutung beigelegt, welche, meiner Meinung nach, Ursache von vieler Unklarheit und von vielen Missverständnissen ist, die nicht entstanden wären, wenn man sich strenge an der ursprünglichen Bedeutung des Minus und des Plus gehalten, und die Benennungen „positive und negative Zahlen“ durch die Verabredung eingeführt hätte: eine Zahl wird mit Inbegriff des ihr vorangehenden Plus (oder Minus-) zeichens eine positive (negative) Zahl genannt, und bisweilen einzeln geschrieben oder durch einen einzigen Buchstaben dargestellt.

Bei dieser Betrachtungsweise bedeutet also  $-2-3=-5$  nichts anderes als  $P-2-3=P-5$ , wo das willkürliche (aber genügend grosse) Diminuendum nicht geschrieben ist, sondern hinzugedacht werden soll, und das Minus- (oder Plus-) Zeichen bekommt dadurch ebensowenig eine neue Bedeutung als dies mit den Zeichen  $\times$  und  $:$  der Fall sein würde, wenn man  $\times a$  und  $:a$  auch einzeln schriebe oder durch einen einzigen Buchstaben repräsentirte. Jedoch man könnte gegen die Gültigkeit dieses letzteren Vergleiches den scheinbar gerechten Einwurf erheben, dass die Zusammenfassung der Zeichen  $\times$  und  $:$

mit der nachstehenden Zahl nicht zu ganz ähnlichen Consequenzen führe wie die Einführung der Begriffe pos. und neg.: erstens verhält sich ja die Multiplikation-Division ganz anders zur Potenzirung-Radizirung als die Addition-Subtraktion zur Mult.-Div., und zweitens haben die Begriffe pos. und neg. zu der Conception der complexen Zahlen geführt, während es nicht einleuchtend ist, wie man ähnliche Betrachtungen an die Zeichen  $\times$  und  $:$  knüpfen könnte.

§ 2. Es ist mir nicht unnütz vorgekommen, diesen Einwurf zu beseitigen, und zu zeigen, dass der scheinbare Unterschied zwischen unsern beiden ersten Grundoperationen nur dadurch verursacht wird, dass die Potenzirung-Radizirung nicht nach demselben Prinzip aus der Mult.-Div. gebildet ist, nach welchem die Mult.-Div. aus der Add.-Subtr. hervorgeht.

Zu dem Zwecke werde ich eine (die Add.-Subtr. und die Mult.-Div. enthaltende) Reihe neuer Operationen bilden, von denen jede auf genau dieselbe Weise aus der vorigen gebildet werden kann (§ 11, 12), und mittelst dieser Operationen die Begriffsbildung des Positiven und Negativen, sowie diejenige des Reellen und Imaginären, weiter verfolgen.

Es sei hier aber sogleich bemerkt, dass die neu zu bildenden Operationen nicht zu neuen Funktionen führen und also keinen praktischen Werth haben; sie dienen mir lediglich zum theoretischen Zwecke, einen objectiven Standpunkt für die Beurteilung des Characters positiver und negativer Zahlen zu gewinnen.

### Die Hyper-Multiplication oder Addition 3<sup>ter</sup> Stufe.

§ 3. Die Beziehung zwischen Addition und Multiplication wird bekanntlich zurückgeführt auf die commutativen, associativen und distributiven Eigenschaften, niedergelegt in den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= b + a, & a \times b &= b \times a \text{ (Comm. Ges.)} \\ (a + b) + c &= a + (b + c), & (a \times b) \times c &= a \times (b \times c) \text{ (Ass. Ges.)} \\ a \times (b + c) &= a \times b + a \times c \text{ (Distr. Ges.)} \end{aligned} \right\} . \quad (1)$$

Eine Operation, welche sich zur Mult. verhält wie diese zur Add., wird also den Funktionalgleichungen

$$f(x, y) = f(y, x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f\{x, (y, z)\} = f\{(x, y), z\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$f(x, y \times z) = f(x, y) \times f(x, z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

genügen müssen.

Die letzte dieser Gleichungen giebt unmittelbar

$$f(x, y^n) = f^n(x, y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo  $n$  zunächst ganzzahlig sein soll; setzt man jedoch  $y^n = z$ , so folgt

$$f^n(x, z) = f(x, y^{n^n}) = f^n(x, y^n) = f^n(x, z^{n/n}),$$

$$f(x, z^{n/n}) = f^{n/n}(x, z)$$

und durch Grenzübergang erweist sich die Formel (5) gültig für jedes reelle  $n$ <sup>1)</sup>.

Wir erhalten also

$$f(x, y) = f(x, e^{ly}) = f^{ly}(x, e),$$

und infolge (2) ebenso:

$$f(x, y) = f^{lx}(e, y),$$

und

$$f(x, y) = f^{lx \times ly}(e, e).$$

Man erhält also, indem man  $f(e, e)$  gleich einer willkürlichen Constanten nimmt (für welche ich die Zahl  $e$  wählen will), eine Lösung des gegebenen Gleichung-Systems in der Form

$$f(x, y) = e^{lx \times ly},$$

oder, mit bequemerer Notation:

$$x | y = e^{lxly}.$$

Die so erhaltene „Hyper-Multiplication“ ist eine continuirliche, analytische Funktion von  $x$  und  $y$ , welche auch für complexe Zahlwerthe dem Systeme (2), (3), (4) genügt; sie rechtfertigt also die bei ihrer Ableitung gemachten Voraussetzungen.

Eine zugehörige „Hyper-Division“ (..) wird durch

$$x .. y | y = x$$

definiert<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Dieser Grenzübergang setzt selbstverständlich die Möglichkeit einer bestimmten, continuirlichen Lösung der gegebenen Gleichungen voraus, und wird nachträglich zu rechtfertigen sein.

<sup>2)</sup> Der Nachweis, dass die Operation | auch durch das Prinzip der Wiederholung aus der Multiplication gebildet werden kann, wird in § 11, 12 gegeben.

Die Methode, nach welcher man aus den Formeln (1) (und den Definitionsformeln  $a - b + b = a$ ,  $a : b \times b = a$ ) die allgemeineren Gesetze der Add., Subtr., Mult., Div. herleitet, ist eine rein symbolische, d. h. sie stützt sich nicht auf die Bedeutung welche den Zeichen  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $:$  beigelegt ist, sondern nur auf die Verbindung dieser Formeln mit den beiden Gesetzen des Gleichheitszeichens <sup>1)</sup>. Es ist also ein Leichtes aus den Formeln (2, 3, 4) eine Menge Folgerungen zu ziehen, welche genau nach dem Beispiele der Addition-Multiplikationstheorie gebildet sind. Es ist jedoch, wie ich oben schon betont habe, nicht meine Absicht, die neue Operation zu praktischen Zwecken zu verwenden. Die Einfachheit, wenn nicht Trivialität derselben ist Ursache dass wir auf diesem Wege nicht zu neuen, für die Analysis wichtigen Resultaten zu gelangen erwarten dürfen. Ich werde mich daher in dieser Hinsicht so viel wie möglich einschränken, um nur dasjenige hervorzuheben, was für die Erweiterung der Begriffe pos. neg., und reell-complex unentbehrlich ist.

#### Algebraische Erweiterung des Begriffes positiv-negativ.

§ 4. Was zunächst den Begriff pos.-neg. betrifft, so ist zu unterscheiden ob man sich auf algebraischen oder auf arithmetischen Standpunkt stellt. In der Algebra nennt man ja  $+a$  positiv und  $-a$  negativ, ohne darauf zu achten, ob die Zahl  $a$ , in der Einheit ausgedrückt, (d. h. in Ziffern geschrieben) vielleicht selbst negativ sein würde. Man könnte dies den formellen Pos.-Neg.-Begriff nennen, und seine Erweiterung wird nach dem Vorhergehenden nicht die geringste Schwierigkeit darbieten. Nennt man, in der That,  $\times a$  eine <sup>2</sup>positive und  $: a$  eine <sup>2</sup>negative Zahl, so ist unmittelbar klar, dass die allgemeineren Commutations-, Associations-, und Distributions-Gesetze der Add.-Mult., auch für die Mult.-Hyper-Mult. gültig sind. Ich unterlasse deshalb, hier die bekannten Betrachtungen der Elementar-Algebra zu wiederholen, und stelle nur die Resultate in folgender Tabelle zusammen:

---

<sup>3)</sup> n.m.: 1°. wenn  $a = b$ , so folgt  $b = a$ ,  
2°. wenn  $a = b$ ,  $b = c$ , so folgt  $a = c$ .

	pos.-neg.	<sup>2</sup> pos.- <sup>2</sup> neg.
Comm. Gesetz	$\begin{cases} +a + b = +b + a, \\ +a - b = -b + a, \\ -a - b = -b - a, \end{cases}$	$\begin{cases} \times a \times b = \times b \times a, \\ \times a : b = : b \times a, \\ : a : b = : b : a, \end{cases}$
Assoc.-Gesetz	$\begin{cases} +(+a) = +a, \\ -(+a) = -a, \\ +(-a) = -a, \\ -(-a) = +a, \end{cases}$	$\begin{cases} \times(\times a) = \times a, \\ :(\times a) = :a, \\ \times(:a) = :a, \\ :(:a) = \times a, \end{cases}$
Distr.-Gesetz	$\begin{cases} (+a) \times (+b) = +a \times b, \\ (-a) \times (+b) = -a \times b, \\ (+a) \times (-b) = -a \times b, \\ (-a) \times (-b) = +a \times b, \\ (+a) : (+b) = +a : b, \\ (-a) : (+b) = -a : b, \\ (+a) : (-b) = -a : b, \\ (-a) : (-b) = +a : b, \end{cases}$	$\begin{cases} (\times a)   (\times b) = \times a   b, \\ (:a)   (\times b) = :a   b, \\ (\times a)   (:b) = :a   b, \\ (:a)   (:b) = \times a   b, \\ (\times a) .. (\times b) = \times a .. b, \\ (:a) .. (\times b) = :a .. b, \\ (\times a) .. (:b) = :a .. b, \\ (:a) .. (:b) = \times a .. b, \end{cases}$

aus welcher die Formel  $(:a) | (:b) = \times a | b$  („das Hyperproduct zweier <sup>2</sup>negativer Zahlen ist <sup>2</sup>positiv“) besonders hervorgehoben sein möge.

§ 5. Gewöhnlich jedoch stellt man sich beim Gebrauch der Ausdrücke „positiv“ und „negativ“ auf arithmetischen Standpunkt und nennt eine Zahl nur dann positiv (neg.), wenn sie, in Ziffern geschrieben, von dem Zeichen + (oder -) versehen ist; in diesem Sinne ist also jede bestimmte Zahl  $x$  „an sich“ positiv oder negativ.

Die Erweiterung dieses Begriffes, sowie die der damit aufs Innigste verknüpften Theorie der complexen Zahlen, liegt nicht so auf der Hand wie die formelle. Um bei dieser Erweiterung die gewünschte Analogie zugleich am strengsten innezuhalten und ins hellste Licht zu stellen, ist zweifelsohne der beste Weg, sie unmittelbar aus den Definitionsformeln der Multiplikation herzuleiten, ohne sich dabei auf die vorgegebenen Begriffe des gewöhnlichen Positiven, Negativen, Reellen und Complexen zu stützen. Ehe ich diesen Weg einschlage,

(§ 11, 12) sei es mir jedoch gestattet, der leichteren Verständlichkeit wegen, eine andere Behandlungsweise voranzuschicken, wobei ich die genannten Begriffe als gegeben voraussetze.

Diese Behandlungsweise nöthigt mich mit der Erweiterung des Begriffes Reell-Complex anzufangen.

### Erweiterung des Begriffes „reell-complex.“

§ 6. Es ist öfters bemerkt worden, dass die Eins hinsichtlich der Mult.-Div. eine ähnliche Rolle spielt, wie die Null hinsichtlich der Add.-Subt.: sowohl die Operationen  $\pm 0$  als die Operationen  $\times 1$  lassen jede Zahl auf die sie angewendet werden, ungeändert.

Im Folgenden werden die Null und die Eins resp. als die Trennzahl erster und die Trennzahl zweiter Stufe bezeichnet (<sup>1</sup>Trennz. und <sup>2</sup>Trennz.).

§ 7. Dies vorausgeschickt, bemerke ich, dass jede Zahl  $x$  auf die Form

$$a + b \times i,$$

aber auch auf die Form

$$e^a + i \times e^b = e^a \times e^i \mid e^i \equiv A \times B \mid {}^2i$$

gebracht werden kann. Die letzte Form zeigt eine vollkommene Analogie mit der ersten und veranlasst uns folgende Definitionen aufzustellen:

Eine Zahl heiße <sup>2</sup>reell, wenn sie auf die Form  $A \times B \mid {}^2i$  gebracht werden kann, wo  $B$  gleich der <sup>2</sup>Trennz., d. h. gleich 1 ist; alle übrigen Zahlen heißen <sup>2</sup>complex.

Dieser Definition zufolge sind dann alle Zahlen  $0 \dots +\infty$ , <sup>2</sup>reell, alle übrigen aber (also auch  $-\infty \dots 0$ ) <sup>2</sup>complex <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Scheinbar wird die Analogie dieser „<sup>2</sup>complexen“ Zahlen und der gewöhnlichen complexen Zahlen durch einen wichtigen Unterschied gestört: weil nämlich  $A \times B \mid {}^2i = A \times (Be^{3a\pi}) \mid {}^2i$  ist, so kann aus  $A \times B \mid {}^2i = C \times D \mid {}^2i$  wohl auf  $A = C$ , aber keineswegs auf  $B = D$  geschlossen werden. Auch könnte man einwenden, dass es unnatürlich erscheint die Zahlen  $-\infty \dots 0$  zu den <sup>2</sup>complexen Zahlen zu zählen, indem sie doch „wirklich bestehen.“ Für die Refutation beider Einwürfe verweise ich nach § 11–13.



# Arithmetische Erweiterung des Begriffes „positiv-negativ.“

§ 8. Um auf dem so gewonnenen Begriffe des <sup>2</sup>Reellen den Begriff des <sup>2</sup>Positiven zu gründen, bemerke ich dass man eine (gewöhnliche) positive Zahl durch den Besitz einer reellen Quadratwurzel charakterisiren könnte. Diese Definition nachbildend kommen wir dazu eine Zahl A <sup>2</sup>positiv zu nennen, wenn der Gleichung

$$x | x = A$$

von einem <sup>2</sup>reellen x genügt werden kann. Offenbar wird dadurch das Gebiet der <sup>2</sup>positiven Zahlen auf die Zahlen 1 ... + ∞ beschränkt.

<sup>2</sup>Negativ ist nun natürlich jede Zahl zu nennen, welche auf die Form : A (d. h. 1 : A) gebracht werden kann, und dieser Bedingung genügen eben die übrigen <sup>2</sup>reellen Zahlen (0 .... 1).

## Die Addition n<sup>ter</sup> Stufe.

§ 9. Das bisherige Verfahren fortsetzend gelangen wir zu weiteren Grundoperationen, welche ich Addition (und Subtraction) 3<sup>ter</sup>, 4<sup>ter</sup> .... n<sup>ter</sup> Stufe nennen, und durch die Symbole <sup>n</sup>+ und <sup>n</sup>- bezeichnen will, wobei

$$\begin{array}{cc} \overset{1}{+} = +, & \overset{1}{-} = -, \\ \overset{2}{+} = \times, & \overset{2}{-} = :, \\ \overset{3}{+} = |, & \overset{3}{-} = . . \end{array}$$

zu setzen ist.

Jede neue Operation <sup>n</sup>+ ist den Funktionalgleichungen

$$\text{Comm. Ges. } a \overset{n}{+} b = b \overset{n}{+} a,$$

$$\text{Ass. Ges. } a \overset{n}{+} (b \overset{n}{+} c) = (a \overset{n}{+} b) \overset{n}{+} c,$$

$$\text{Distr. Ges. } a \overset{n}{+} (b \overset{n-1}{+} c) = a \overset{n}{+} b \overset{n-1}{+} a \overset{n}{+} c$$

unterworfen; diesen Gleichungen wird, wie leicht ersichtlich, jedesmal durch die Operation

$$a \overset{n}{+} b = e^{a \overset{n-1}{+} b}$$

Genüge gethan.

Wir erhalten also die Operationen:

$$a \overset{1}{+} b = a + b,$$

$$a \overset{2}{+} b = e^{ia + ib}$$

$$a \overset{3}{+} b = e^{ia + ib} = e^{e^{ia + ib}},$$

$$a \overset{4}{+} b = e^{ia + ib} = e^{e^{e^{ia + ib}}},$$

u. s. w.

und die zugehörigen "Subtr. indem man in diesen Formeln jedes  $+$  durch  $-$  ersetzt.

§ 10. Die "Trennz. wird jetzt durch

$$\text{"Trennz.} = x \overset{n}{-} x = e^{\dots} / (n - 2 \text{ Zahlen})$$

bestimmt; sodann werden alle Zahlen auf die "complexe Form

$$a \overset{n}{+} b \overset{n+1}{+} i$$

gebracht, wobei sich der Werth  $i = e^{\dots} / (n\text{-Zahlen})$  herausstellt, und mittels dieser Form wird die Trennung, zuerst der "reellen und "complexen, dann der "positiven und "negativen Zahlen vollzogen. Ich glaube diese Ueberlegungen dem Leser überlassen zu können und verweise für die erhaltenen Resultate nach der Uebersichts-Tabelle am Schluss des Artikels. Einen wichtigen Umstand möchte ich dabei hervorheben: das Gebiet der "reellen Zahlen wird bei steigendem  $n$  immer mehr beschränkt.

#### Die Beziehung zwischen den Additionen $n^{\text{ter}}$ und $n + 1^{\text{ter}}$ Stufe.

§ 11. Es bleibt mir jetzt übrig, die vollkommene Analogie der erhaltenen Operationen darzuthun, und zu zeigen dass man, bei der Addition  $n$ -ter Stufe anfangend,

1°. *genau* auf dieselbe Weise zu der Addition  $n + 1^{\text{ter}}$  Stufe gelangen kann, wie man in der Arithmetik die Mult. aus der Add. ableitet (also durch das Prinzip der Wiederholung), und

2<sup>o</sup>. die Begriffe \*pos., \*neg., \*reell und \*complex ebenfalls nach derselben Methode wie dies für die Begriffe 'pos., 'neg., 'reell und 'complex üblich ist, begründen kann.

(Der leichteren Lektur wegen ist jedoch im folgenden Paragraphen  $\pi$  durch 4 ersetzt.)

Zu diesem Ende betrachte ich anfangs *keinen Zahlbegriff als gegeben* und stelle sodann durch eine Reihe von Conceptionen den ganzen allgemeinen Zahlkörper wieder zusammen.

§ 12. ERSTE CONCEPTION. Ich nehme eine willkürliche Zahl als gegeben an, und nenne sie die <sup>4</sup>Einheit:

<sup>4</sup>1.

[Um mich den vorhergehenden Entwicklungen anzuschließen, werde ich jedesmal zwischen Klammern die zu bildenden Zahlen in gewöhnlicher Schreibweise darstellen. Auf diese Darstellung aber wird selbstverständlich beim Aufbau des Zahlkörpers keinen Bezug genommen.

Ich will also erstens annehmen, die gewählte <sup>4</sup>Einheit sei die Zahl  $\epsilon^1$ ].

ZWEITE CONCEPTION. Ich definire eine einfach unendliche Reihe neuer Zahlen <sup>4</sup>2, <sup>4</sup>3, u. s. w., durch die <sup>4</sup>Einheit einer gewissen *commutativen* und *associativen* Operation ( $\overset{4}{+}$ ) zu unterwerfen:

$${}^42 = {}^41 + {}^41,$$

$${}^43 = {}^42 + {}^41,$$

u. s. w. <sup>1)</sup>

Die so erhaltenen Zahlen nenne ich die <sup>4</sup>ganzen Zahlen (<sup>4</sup>a).

[Die gewählte Operation sei die oben erhaltene Addition 4-ter Stufe. Die neu definirten Zahlen sind dann:

$${}^42 = \epsilon^2, {}^43 = \epsilon^3, \dots, {}^4a = \epsilon^a].$$

DRITTE CONCEPTION. Hinzufügung der neuen Zahl <sup>4</sup>0 durch die definirende Bedingung:

---

<sup>1)</sup> Bequemlichkeit halber wollen wir annehmen, dass bei diesem Bildungsprozesse die gewöhnlichen Ziffern und das Decimalssystem benutzt werden.

$${}^4a + {}^40 = {}^4a.$$

[Aus den gemachten Voraussetzungen folgt  ${}^40 = e$ ].

VIERTE CONCEPTION. Ich füge die  ${}^4$ negativen  ${}^4$ ganzen Zahlen hinzu, indem ich jedem  ${}^4a$  das Zeichen  $-$  voranstelle, welches durch die Definition

$${}^4a_1 - {}^4a_2 + {}^4a_2 = {}^4a_1$$

eingeführt wird. Die  ${}^4$ positiven und die  ${}^4$ negativen Zahlen bilden zusammen die  ${}^4$ reellen Zahlen ( ${}^4b$ ).

Durch diese Conception ist jetzt jede Gleichung

$${}^4a_1 - {}^4a_2 = {}^4x$$

einer Lösung fähig <sup>1)</sup>.

[Die so eingeführte Operation  $-$  ist also identisch mit der früher definirten Subtraction  $4^{ter}$  Stufe, Die neu hinzugefügten Zahlen sind

$$e^{e^{-1}}, e^{e^{-2}}, \dots, e^{e^{-\infty}} = e].$$

FÜNFTE CONCEPTION. Eine neue Operation ( ${}^5+$ ) wird eingeführt durch die Definitionsgleichungen:

$${}^4b + {}^4b = {}^42 + {}^4b,$$

$${}^42 + {}^4b + {}^4b = {}^43 + {}^4b,$$

u. s. w.

Aus diesen Definitionen kann bewiesen werden, dass die Operation  ${}^5+$  *commutativ*, *associativ*, und hinsichtlich der Operationen  ${}^4+$  und  ${}^4-$  *distributiv* ist; die indirecte Operation  $-$  wird durch

$${}^4b_1 - {}^4b_2 + {}^4b_2 = {}^4b_1$$

<sup>1)</sup> Die jetzt erhaltenen Zahlen können die Elemente einer Abel'schen Gruppe darstellen, wo dann das Zeichen  ${}^4+$  als die Verknüpfung zweier Elemente gilt.

eingeführt und sodann werden dem Zahlensysteme die „rationellen“ Zahlen hinzugefügt, indem man festsetzt dass die Gleichung

$${}^4b \stackrel{5}{-} {}^4b_2 = {}^4x$$

immer eine Lösung haben soll.

[Dass die so eingeführte Operation  $\stackrel{5}{+}$  wirklich mit der früher definirten identisch ist, geht hervor aus

$$\begin{aligned} {}^4b \stackrel{4}{+} {}^4b &= e \dots e \stackrel{4}{+} e \dots e = e \dots e \stackrel{2b}{=} e \dots e \stackrel{13+14}{=} \\ &= e \dots e \stackrel{13}{=} \stackrel{5}{+} e \dots e \stackrel{14}{=} = {}^52 \stackrel{5}{+} {}^4b, \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

und damit ist die Consequenz unserer Operationsreihe dargethan. Zugleich erhellt, warum die Potenzirung nicht als die vollkommen consequente Fortsetzung der Reihe: Add.-Mult. gelten darf. Während nämlich die Mult. definirt wird durch  $a + a = (1 + 1) \times a$ , u. s. w., wird die Potenzirung bestimmt durch  $a \times a = a^{1+1}$  u. s. w.; die Mult. wird also nur mittels der Addition und einer Constanten, die Potenzirung aber mittels der Add., der Mult. und einer Constanten definirt.]

SECHSTE CONCEPTION. Einführung der „nicht-rationellen“ Zahlen durch die bekannte Methode der Schnitte; hiermit ist der Zahlkörper der  ${}^4$ reellen Zahlen ( ${}^4c$ ) vollendet.

$$[e, \dots, +\infty].$$

SIEBENTE UND LETZTE CONCEPTION. Wie leicht beweisbar, kann keine der bis jetzt definirten  ${}^4$ reellen Zahlen mit sich selbst „multipliziert“ (d. h.  ${}^5$ addirt) eine  ${}^4$ negative Zahl liefern. Wir fügen deshalb eine neue Zahl  ${}^4i$  hinzu, welche der Bedingung

$${}^4i \stackrel{5}{+} {}^4i = - {}^41$$

Genüge leisten soll, und sodann auch alle Zahlen von der Form  ${}^4c_1 \stackrel{5}{+} {}^4c_2 \stackrel{4}{+} {}^4i$ , welche wir (sofern nicht  ${}^4c_2 = {}^41$ ) als die  ${}^4$ complexen Zahlen bezeichnen; dieser Name erscheint jetzt naturgemäss, weil man damit Zahlen bezeichnet, welche einer Bedingung genügen, der von den bisher „bestehenden“ Zahlen unmöglich genügt werden kann.

[Diese neuen Zahlen sind augenscheinlich von der Form  $e^{a+bi}$  und enthalten somit 1<sup>o</sup> alle (gewöhnlichen) 'complexen Zahlen und 2<sup>o</sup> die 'reellen Zahlen

$$- \infty \dots 0 \dots e].$$

§ 13. Unsere Darlegung könnte kaum als abgeschlossen betrachtet werden, solange nicht dargethan ist, wie man, von dieser Conceptionsreihe ausgehend, wieder die Operationen niederer Stufe einführen kann, um so mehr nicht weil dabei noch ein wichtiger Punkt aufgeklärt werden muss: wenn wir nämlich die Conceptionsreihe nach dem Beispiele der (gew.) Theorie der complexen Zahlen durchbilden, so werden wir zwei 'complexe Zahlen

$${}^4p_1 + {}^4q_1 + {}^4i \text{ und } {}^4p_2 + {}^4q_2 + {}^4i$$

nur dann als gleich zu betrachten haben wenn  ${}^4p_1 = {}^4p_2$  und  ${}^4q_1 = {}^4q_2$  ist; nehmen wir jedoch die zwischen Klammern gestellten Voraussetzungen hinzu, so ist dies nicht mehr der Fall, wie aus dem einfachen Beispiele

$${}^41 = e^e = e^{e^{3\pi i}} = {}^4(2n\pi) + {}^4i$$

ersichtlich.

Bei dieser retrograden Betrachtung aber will ich, der bequemerem Darstellung wegen, statt von der  $n^{\text{ten}}$  ( $4^{\text{ten}}$ ), wieder von der 1<sup>sten</sup> Operationsstufe ausgehen.

Die Fragestellung ist also: eine Operation (die Add. 0<sup>ter</sup> Stufe) zu finden, welche *commutativ* und *associativ* ist, und hinsichtlich deren die (gew.) Add. *distributiv* ist. Es ist leicht ersichtlich dass die Operation

$$a + b = l(e^a + e^b)$$

diesen Bedingungen genügt, und dass in Uebereinstimmung damit das Gebiet der 'reellen Zahlen *alle* Werte  $l(-\infty) \dots l(+\infty)$  umfassen wird, von denen  $l(-\infty) \dots l(0)$  als die 'negativen, und  $l(0) \dots l(+\infty)$  als die 'positiven zu bezeichnen sind <sup>1)</sup>.

Hätten wir also unsere Conceptionsreihe mit der 0<sup>Operation</sup>

<sup>1)</sup>  $l$  ist hier immer das Symbol des allgemeinen, d. h. des  $\infty$ -vielwerthigen Logarithmus.

angefangen, so würden wir zu folgender Notation gekommen sein

$$^01 = l(1) = 0 + 2n\pi i,$$

$$^02 = l(e) = 0,30103 \dots + 2n\pi i,$$

u. s. w.

Dabei würden aber die Symbole  $^01$ ,  $^02$ , u. s. w. jedes als eine *einzig*e Zahl zu betrachten sein, i. a. W. wir würden als *Gleichheit* zu betrachten haben, was „in Wirklichkeit“ nur *Congruenz nach dem Modul  $2\pi i$*  ist.

Geht man also von dem gewöhnlichen, durch die Add. 1<sup>er</sup> St. gebildeten Zahlensysteme auf das aus der Add. 0<sup>ter</sup> St. abgeleitete System über, so ist das Zeichen  $=$  durch  $\equiv (\text{mod. } 2\pi i)$  zu ersetzen. Dadurch verliert aber augenscheinlich die Schlussfolgerung von  $p_1 + q_1 i = p_2 + q_2 i$  auf  $p_1 = p_2$  und  $q_1 = q_2$  ihre Gültigkeit, denn aus  $p_1 + q_1 i \equiv p_2 + q_2 i (\text{mod. } 2\pi i)$  lässt sich *wohl* auf  $p_1 \equiv p_2 (\text{mod. } 2\pi i)$ ,  $q_1 \equiv q_2 (\text{mod. } 2\pi i)$  aber *nicht* auf  $q_1 \equiv q_2 (\text{mod. } 2\pi i)$  schliessen.

# ÜBERSICHTS-TABELLE.

Stufe.	Addition.	Subtraction.	"Trennzahl" ( $^{*0}$ ).	"Negative Zahlen.	"Positive Zahlen.	"Reelle Zahlen.	" $i$
-1	$a + b = ll(e^a + e^b)$ , $^{-1}$	$a - b = ll(e^a - e^b)$ , $^{-1}$	$ll(o)$	$ll(-\infty) \dots ll(o)$	$ll(o) \dots ll(+\infty)$	$ll(-\infty) \dots ll(+\infty)$	$ll(i)$
0	$a + b = l(e^a + e^b)$ , $^0$	$a - b = l(e^a - e^b)$ , $^0$	$l(o)$	$l(-\infty) \dots l(o)$	$l(o) \dots l(+\infty)$	$l(-\infty) \dots l(+\infty)$	$l(i)$
1	$a + b = a + b$ , $^1$	$a - b = a - b$ , $^1$	0	$-\infty \dots -0$	$0 \dots +\infty$	$-\infty \dots +\infty$	$i$
2	$a + b = a \times b = e^{la+lb}$ , $^2$	$a - b = a : b = e^{la-lb}$ , $^2$	1	$0 \dots 1$	$1 \dots +\infty$	$0 \dots +\infty$	$e^i$
3	$a + b = e^{lla+llb}$ , $^3$	$a - b = e^{lla-llb}$ , $^3$	$e$	$1 \dots e$	$e \dots \infty$	$1 \dots +\infty$	$e^i$
4	$a + b = e^{llla+lllb}$ , $^4$	$a - b = e^{llla-lllb}$ , $^4$	$e^e$	$e \dots e^e$	$e^e \dots \infty$	$e \dots +\infty$	$e^{e^i}$
$n$	$a + b = e^{la+lb}$ , $^{n-1}$	$a - b = e^{la-lb}$ , $^{n-1}$	$e^{e^e} \dots (n-2)$	$e^{e^e} \dots (n-2)$	$e^{e^e} \dots (n-2)$	$e^{e^e} \dots (n-1) \dots +\infty$	$e^{e^e} \dots (n-1) \dots +\infty$



## BIBLIOGRAPHIE.

---

Beginnelsen der hoogere meetkunde, door C. VAN ALLER, leeraar aan de Koninklijke militaire academie. Een deel in 8°, 293 p., 6 pl., Breda, ter stoomdrukkerij van Gebrs. Oukoop, voor rekening van de Koninklijke militaire academie, 1899. Prijs f 3.—.

Dit voor ons liggende werk is ten gevolge eener hem verstrekte opdracht door den schrijver ontworpen en bestemd bij het onderwijs aan de militaire academie het werk met den gelijkkluidenden titel van de hand van wijlen J. Badon Ghyben, dat uitverkocht is, te vervangen. Dit verklaart, waarom de titel hoogere meetkunde is behouden, hoewel analytische meetkunde thans meer gebruikelijk is.

Bij de beoordeeling van dit werk moet in aanmerking genomen worden, voor welken kring van lezers het bestemd is. In het bijzonder moet het in zijn geheel worden gebruikt door de cadetten der Artillerie en Genie, terwijl een gedeelte er van moet worden bestudeerd door de cadetten der Infanterie en Cavalerie. Hoewel deze cadetten niet opgeleid worden tot wiskundigen, moeten zij bij hun studie toch een zekere hoeveelheid wiskunde opnemen, die — wat de analytische meetkunde betreft — uit de leer der kegelsneden met inbegrip van de discussie der algemeene vergelijking van den tweeden graad, een beknopte theorie van de oppervlakken van den tweeden graad met uitsluiting van de discussie der algemeene vergelijking, en de wording van enkele merkwaardige krommen als cycloïden en spiralen bestaat. De in het werk behandelde leerstof beantwoordt geheel aan dit program; ja zelfs de volgorde, waarin ze wordt aangeboden, wordt er door beheerscht. Een sprekend voorbeeld hiervan is dit, dat bij de kegelsneden de behandeling van de algemeene vergelijking van den tweeden graad volgt op de opzettelijke behandeling van ellips, parabool en hyperbool, elk afzonderlijk. De cadetten van de infanterie en cavalerie kunnen zich dan bij het eerste bepalen en de beschouwing van de algemeene vergelijking aan de overigen overlaten.

Het leerboek, dat wij bespreken, is dus te beschouwen als een

poging om op korte, eenvoudige en duidelijke wijs met de voornaamste eigenschappen van kegelsneden, oppervlakken van den tweeden graad en krommen als cycloïden en spiralen bekend te maken. En, naar het ons voorkomt, is die poging over het geheel goed geslaagd. Het boek is duidelijk, het vermijdt zooveel mogelijk sprongen in de redeneering en kan daarom een uitstekende eerste leiddraad genoemd worden, ook voor hem die zich zonder onderwijs in de beginselen der analytische meetkunde thuis wil werken. Het wordt door een groot aantal vraagstukken ter oplossing voor dit laatste doel nog meer geschikt gemaakt en bevat op een zestal uitslaande platen bijzonder goede figuren, vooral van de oppervlakken van den tweeden graad. S<sup>c</sup>.

Leerboek der analytische meetkunde, door Dr. P. VAN GEER, hoogleeraar te Leiden. Tweede deel: Oppervlakken en ruimtekrommen. Een deel in 8<sup>o</sup>, 266 p. Leiden, A. W. Sythoff, 1900.

Het eerste deel van dit werk is aangekondigd in het vorige stuk van dit tijdschrift (deel 4, p. 255). Aan de voorrede van het tweede deel is het volgende ontleend:

„Dit tweede deel der analytische meetkunde sluit zich onmiddellijk aan bij het eerste en is op dezelfde wijze bewerkt. „Doch het standpunt is nu anders geworden. Terwijl voor het eerste deel geen andere voorbereidende kennis wordt ondersteld dan die der hoogere algebra, wordt nu ook gebruik gemaakt van de differentiaalrekening. De enkele integralen en differentiaalvergelijkingen, die er in voorkomen, kunnen ook wel begrepen worden zonder dat men nog een bijzondere studie der integraalrekening heeft gemaakt. Zelfs wordt er gebruik gemaakt van de eerste beginselen der variatie-rekening, doch niet meer dan noodig is om te wijzen op het belang van de beoefening van dezen dikwijls verwaarloosden tak der hoogere wiskunde.”

„Wat is noodzakelijk en wat kan bij eerste oefening gevoegelijk ter zijde worden gelaten? Deze vraag heb ik met dit werk trachten te beantwoorden, door een behoorlijken leiddraad te geven aan hen, die door eigen studie, hetzij ter verkrijging eener akte van bekwaamheid M. O., hetzij om een andere reden zich in de hoogere deelen der wiskunde wenschen te bekwamen.”

„De theorie der oppervlakken van den tweeden graad, hier

„O<sub>2</sub> genoemd, is behandeld volgens de methode van Hesse. „Voor een eerste beoefening heeft dit het groote bezwaar, dat „geen enkele figuur aan de voorstelling te hulp komt. Dit „bezwaar meen ik door gepaste wijziging te hebben vermeden; „daarom is het streng doorvoeren der methode opgegeven, „zoodra een vereenvoudiging tot beter inzicht kon leiden.”

„Op de behandeling der O<sub>2</sub> volgt een overzicht van de alge- „meene theorie der oppervlakken, in het bijzonder van de „ontwikkelbare en schele regelvlakken met hun analytische „kenmerken. De daarop volgende theorie der ruimtekrommen „is zelfstandig opgesteld met vermijding van bekortingen, die „de symmetrie doen verloren gaan.”

„De laatste hoofdstukken handelen over de kromming van „oppervlakken en de voornaamste krommen, die op opper- „vlakken zijn gelegen. Hierbij treden de kromtelijnen en „geodetische lijnen op den voorgrond. Het hoofddoel is hier „niet een volledige theorie te geven, maar een inleiding tot de „hoogere studie van dit gewichtig onderwerp. Daartoe dient „ook het laatste hoofdstuk, handelende over de theorie van „Gauss. Intusschen eischt de verhandeling van Gauss, die een „nieuw gezichtspunt op de theorie der oppervlakken opende, „eenige nadere verklaring, en deze heb ik getracht te geven.”

„Moge dit leerboek, het eerste dat in onze taal over dit „onderwerp verschijnt, aan een behoefte voldoen, dan is mijn „doel met het schrijven er van bereikt.”

Na de lezing van deze voorrede, die ons veel verwachten deed, zijn we — tot ons leedwezen moeten we het zeggen — in het boek zelf teleurgesteld. Wel staat de schrijver thans op een ruimer standpunt dan voorheen bij de samenstelling van het eerste deel. Werkelijk zijn hier homogene en vlak-coördinaten gebruikt, terwijl lijn-coördinaten — natuurlijk met het oog op de gewenschte beknoptheid — zijn blijven ontbreken. Doch de begrippen graad, rang en klasse van een oppervlak en van een ruimtekromme komen ook hier nog slechts tot zeer onvoldoende ontwikkeling.

We stippen thans eenige minder gelukkige punten aan, die bij het vluchtig doorloopen van het werk onze aandacht troffen.

In het derde hoofdstuk worden de oppervlakken O<sub>2</sub> naar het middelpunt gerangschikt. In de verkregen uitkomst (blz. 56) worden de gevallen, waarin de vergelijking ontaardt, ter zijde

gelaten en is geen onderscheid gemaakt tusschen de elliptische en hyperbolische cylindervlakken aan den eenen kant en den parabolischen cylinder aan den anderen. Naar onze meening verdient de bekende verdeeling in vijf groepen, waarbij achtereenvolgens

- 1<sup>o</sup>. een middelpunt in het eindige,
- 2<sup>o</sup>. " " " " oneindige,
- 3<sup>o</sup>. " lijn van middelpunten in het eindige,
- 4<sup>o</sup>. " " " " " " oneindige,
- 5<sup>o</sup>. " vlak " "

gevonden wordt, verreweg de voorkeur.

Op blz. 103 treffen we de uitbreidingen van de bij de kegelsneden voorkomende stellingen van Apollonius op de ellipsoïde aan. Hierbij had vermeld moeten worden, dat er bij de ellipsoïde drie betrekkingen bestaan; dat de som der vierkanten van de oppervlakken der parallelogrammen, die een parallelipedum op toegevoegde middellijnen begrenzen, standvastig is, is den schrijver in de pen gebleven.

Op blz. 105 onderaan vinden de stellingen van Apollonius — natuurlijk weer twee der drie — uitbreiding op de beide hyperboloïdes. Hier is, waarschijnlijk door het streven onbestaanbare grootheden buiten beschouwing te laten — dat naar ons oordeel geen aanbeveling verdient —, aan de continuïteit te kort gedaan. Zoo hadden wij gaarne het verschil tusschen de eerste stelling bij de hyperboloïdes met die bij de ellipsoïde in verband gebracht gezien met het omkeeren van het teeken van  $c_1^2$  in de vergelijking op toegevoegde middellijnen, — die geheel ontbreekt. En wat de leerling doen zal, wil hij overeenstemming brengen tusschen de eigenaardige uitkomst midden op blz. 106 en de op blz. 104 bovenaan gevonden meetkundige plaats van de hoekpunten der parallelopipeda op toegevoegde middellijnen bij de ellipsoïde, is ons een raadsel.

Op blz. 113 hadden we gaarne den naam van Ivory, den ontdekker der bewezen eigenschap, vermeld gezien.

We komen nu tot de afleiding van de vergelijking van het raakvlak in het zesde hoofdstuk. Deze kan naar onze overtuiging niet logisch genoemd worden en staat in duidelijkheid zeker ver achter bij die, waar gebruik gemaakt wordt van de vergelijkingen der raaklijn aan een ruimtekromme. Wat iemand,

die eerst sedert korten tijd kennis gemaakt heeft met het scherpe ontleedmes der analyse van de „gemeenschap van de eerste orde” denken moet, die hem op blz. 130 onderaan zonder nadere verklaring wordt voorgelegd, kunnen we ons niet recht voorstellen.

Op blz. 151 komt een onjuistheid voor, die we, zelfs nu ze zich op blz. 158 in nog sprekender vorm herhaalt, gaarne als een onnauwkeurigheid van redactie zullen beschouwen. Als  $f(x, y, z, \alpha) = 0$  de vergelijking is van het met  $\alpha$  veranderlijk oppervlak, waarvan we de omhullende zoeken, wordt de volgende stand van dat oppervlak volgens Taylor's theorema — zoo lezen we op blz. 151 — gevonden door  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  nul te stellen. Dit is natuurlijk

aldus te verbeteren: Als  $f(x, y, z, \alpha) = 0$  de vergelijking is van het met  $\alpha$  veranderlijk oppervlak, wordt de volgende stand van dat oppervlak door  $f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0$  aangegeven en vindt men dus de omhullende door  $\alpha$  te elimineeren uit de beide vergelijkingen  $f(x, y, z, \alpha) = 0$  en  $f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0$  of volgens Taylor's theorema uit  $f(x, y, z, \alpha) = 0$  en  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ .

Aan de theorie der omhullenden in het platte vlak ontleenen we een met betrekking tot dit verschil wel zeer eenvoudig maar sprekend voorbeeld. Terwijl de vergelijking  $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$  de normaal in het punt  $x = a \cos \alpha$ ,  $y = a \sin \alpha$  van den cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  voorstelt, doet  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$  in stede van de normaal in het volgende punt de door het aan alle punten gemeenschappelijke kromtemiddelpunt loodrecht op de normaal getrokken lijn, d. i. de in hoekmaat zoo ver mogelijk van de normaal verwijderde lijn door dit punt kennen.

Op blz. 158 lezen we bij de afleiding van het analytische kenmerk der ontwikkelbare oppervlakken: Is de beschrijvende lijn bepaald door

$$z = x f_1(\alpha) + f_2(\alpha), \quad z = y f_3(\alpha) + f_4(\alpha),$$

waarin  $\alpha$  den veranderlijken parameter voorstelt, dan zal de volgende beschrijvende lijn door

$$0 = x f'_1(\alpha) + f'_2(\alpha), \quad 0 = y f'_3(\alpha) + f'_4(\alpha)$$

gegeven worden. Dus — zoo redeneert de argelooze lezer — is elke volgende beschrijvende lijn van een ontwikkelbaar oppervlak evenwijdig aan de  $z$ -as van het coördinatenstelsel. Natuurlijk

treedt hier weer de boven aangewezen onnauwkeurigheid van redactie op en is de beschouwing zelve door verscherping der uitdrukkingen geheel te redden.

Waarschijnlijk vergt de opmerking op blz. 159 omtrent het verband tusschen de orde van het differentiaalkenmerk en het aantal richtlijnen te veel van den lezer; zelfs als hem dit punt na de lezing van blz. 162 op het midden volkomen duidelijk geworden is, kunnen we hem gelukwenschen.

Het standpunt, dat de schrijver bij de behandeling der ruimtekrommen inneemt, is zeker al bijzonder eigenaardig. Hier blijkt, dat hij — wat ons bij de bespreking van het eerste deel moest ontgaan — reeds bij de bepaling van unicursale krommen in het platte vlak een opvatting huldigt, die ten eenenmale van de gebruikelijke afwijkt. Tot heden verstond men onder unicursale kromme een kromme van het geslacht nul, wat dan insluit dat een transcendente kromme niet unicursaal zijn kan. Hier wordt echter de transcendente kromme

$$x = a_1 u + b_1 \sin u, \quad y = a_2 u^2 + b_2 \log u, \quad c = a_3 u^3 + b_3 e^u$$

als unicursaal beschouwd en dus het woord unicursaal in een geheel andere beteekenis gebezigd. Natuurlijk is dit een kwestie van smaak, zoodat over dit punt niet te redetwisten valt. Verba valent usu; wil de schrijver voor krommen van het geslacht nul uitsluitend de nieuwe uitdrukking „rationale kromme” bezigen, waardoor dan het woord unicursaal vrij komt, wie zal hier tegen zijn? Doch dan was het ter vermijding van misverstand noodzakelijk geweest op dit punt te wijzen. Evenzoo is het een kwestie van smaak of men de schroeflijn wil beschouwd zien als type der „ruimtekromme” dan wel of men, wat ons aannemelijker voorkomt, wil spreken van twee typen, de kubische ruimtekromme of „kegelsnee der ruimte” als type der algebraïsche ruimtekrommen en de schroeflijn als type der transcendente ruimtekrommen. Maar het mag geen kwestie van smaak genoemd worden, dat men bij het schrijven van een leerboek der analytische meetkunde, mede bestemd voor hen, die een akte van bekwaamheid M. O. wenschen te verkrijgen, het standpunt „alles, waarin geen differentiaalrekening voorkomt, is bij de behandeling der ruimtekrommen uit den boeze” in die mate huldigt, dat zelfs het onderscheid tusschen algebraïsche en transcendente krommen

verdwijnt onder een groot aantal beschouwingen, die eigenlijk meer in een „Cours d'analyse" thuis behooren.

Een laatste punt, dat we bespreken, staat in verband met den indicatrix van Dupin. We hebben nl. overwegend bezwaar tegen substituties als  $dx = x$ , enz., zie bovenaan blz. 206, die tegen alle regelen der differentiaalrekening indruischen en dan ook eenige regels verder tot het verrassend resultaat voeren, dat de indicatrix, gelegen in een vlak evenwijdig aan het  $xy$ -vlak, een parabool kan worden met de vergelijking  $x^2 = 2pz$ .

Gaarne erkennen wij ten slotte, dat het werk van den Leid-schen hoogleeraar, naast de aangewezen eigenaardigheden, ook goede eigenschappen bezit, die het tot een niet onbruikbaar leerboek stempelen. De groote reeksen van goed gekozen vraagstukken zullen vooral hem, die zijn eigen weg moet zoeken, welkom zijn. De figuren zijn met zorg geteekend. De druk is voortreffelijk; alleen zouden wij wenschen te vragen, of er op de drukkerij van de firma A. W. Sythoff geen cijfers *nul* voorradig zijn. 8°.

Het onderlinge verband der regelmatige lichamen en twee der half-regelmatige lichamen, door F. J. VAES, werktuigkundig ingenieur en leeraar h. b. s. te Rotterdam. Een deel in 8°, 58 p., 45 f. Leiden, A. W. Sythoff, 1899.

Uitgangspunt der in deze brochure gegeven beschouwingen vorint de opmerking, dat de kubus alle andere regelmatige lichamen zoo omvatten kan, dat ribben of hoekpunten van de laatste op een symmetrische wijs in de zijvlakken van den eersten komen te liggen. Om dit te bewijzen moet de verdeling der lijn in de uiterste en middelste reden en een groot aantal metrische eigenschappen van de regelmatige tien- en vijfhoeken eerst behandeld worden. Daarna worden de regelmatige lichamen afgeleid en op de bedoelde wijs in den kubus geplaatst. Met behulp van de assen der lichamen blijkt dan meer algemeen, dat in elk der vijf regelmatige lichamen de vier andere op symmetrische wijs ingeschreven kunnen worden. Na in de ribbe van den omgeschreven kubus als eenheid de ribbe en de stralen der drie bekende concentrische bollen voor elk der vier andere lichamen te hebben berekend, breidt de schrijver zijn gezichtsveld uit door enkele half-regelmatige

lichamen in de beschouwing op te nemen. Hij doet dit met behulp van twee constructies, vooreerst door de in de zijvlakken van den kubus gelegen ribben van het ingeschreven twaalfvlak te vergrooten of te verkleinen, ten tweede door door de ribben der regelmatige lichamen vlakken te leggen, die met de twee door de ribben gaande zijvlakken gelijke hoeken maken. Zoo komt hij tot sommige stervormige lichamen, tot het ruitentwaalfvlak, het ruitendertigvlak, enz.

De figuren zijn met veel zorg geteekend.

S°.

PETER GUTHRIE TAIT, M. A., Sec. R. S. E., honorary fellow of Peterhouse, Cambridge, professor of natural philosophy in the University of Edinburgh. *Scientific Papers*, II. In 4°, 500 p., Cambridge, University press, 1900.

Dit tweede deel van de algemeene werken van den beroemden geleerde, dat nog door een derde zal worden gevolgd, bevat behalve een reeks van in wis- en natuurkundige tijdschriften verschenen verhandelingen eenige artikelen overgedrukt uit de laatste uitgaaf der *Encyclopaedia Britannica* en een in de *Contemporary Review* van 1878 verschenen opstel gewijd aan de beantwoording der vraag, hoe „Natural Philosophy” behoort te worden onderwezen.

De inhoud van dit deel kan in levensberichten, verhandelingen van natuur- en werktuigkundigen aard en wiskundige verhandelingen verdeeld worden. De levensberichten betreffen J. B. Listing, Balfour Stewart, G. R. Kirchhoff, W. R. Hamilton en M. Rankine. Van de natuur- en werktuigkundige studies noemen we alleen de vijf stukken over de grondslagen der kinetische gastheorie en de twee verhandelingen over den duur der aanraking (impact), waarin de met het golf-spel geheel vertrouwde schrijver langs experimenteelen weg tot merkwaardige resultaten komt; de eigenlijk wiskundige verhandelingen bespreken we wat nader.

Hoofdzak vormen ook hier de quaternions, met welke een veertiental opstellen in verband staan. We stippen hierbij drie punten aan. Eerstens het vraagstuk in een gegeven bol een  $n$ -hoek te beschrijven, waarvan de zijden door  $n$  gegeven punten gaan; tweedens het twistgeschrijf met Cayley over de beteekenis der quaternions; derdens de vraag in hoever Gauss vóór Hamilton als ontdekker der quaternions is te beschouwen.



Van de overige wiskundige verhandelingen vermelden we nog die, welke betrekking hebben op Listing's topologie, op de sommeerding van eenige reeksen, op een bij botsing van molekulen optredend vraagstuk van waarschijnlijkheidsrekening, op hun vlak in vierkantjes verdeelende krommenstelsels, op de „glissette” van ellips en hyperbool, op een vraagstuk van eliminatie, op de ruimteverdeeling, op kromtecirkels en op het vraagstuk van Josephus. Vooral het eerste opstel hebben wij herhaaldelijk met bijzonder veel genoegen gelezen. S<sup>c</sup>.

MAURICE D'OCAGNE, Ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'école des ponts et chaussées, répétiteur à l'école polytechnique. *Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques.* In 8<sup>o</sup>, 480 p., 177 fig., Paris, Gauthier-Villars, 1899. Prijs gebrocheerd 14, gebonden 17 frs.

Het lijvige boekdeel, waarover we hier verslag uitbrengen, is te beschouwen als een tweede grondig herziene en zeer vermeerderde uitgaaf van een in 1891 door den schrijver in het licht gegeven brochure getiteld „*Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*”, waarvan een door Van den Berg begonnen en door Korteweg voltooide uitvoerige aankondiging verschenen is in het Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs (instituutsjaar 1891—1892, p. 224—234). Terwijl we ons aan deze belangrijke studie refereeren en overigens verwijzen naar de veelvuldige beoordeelingen van d'Ocagne's nieuwe schepping, in het bijzonder naar die van J. Tannery, welke in het „Bulletin” van Darboux is opgenomen, vatten we hier in het kort de hoofdzaken samen.

Het eerste hoofdstuk bevat een grondige studie van het begrip der functieschalen en zijn toepassing op de afbeelding der vergelijkingen met twee onbekenden. Door een gegeven vergelijking  $f(p_1, p_2) = 0$  te beschouwen als het resultaat der eliminatie van  $x$  uit de vergelijkingen  $x = \varphi_1(p_1)$ ,  $x = \varphi_2(p_2)$  en op een zelfde as van denzelfden oorsprong af aan naar denzelfden kant de bij gegeven  $p_1$  en  $p_2$  behoorende waarden van  $x$  uit te zetten — bijv. de bij  $p_1$  behoorende aan de eene, de bij  $p_2$  behoorende aan de andere zijde — leest men op deze lijn de stellen aan  $f(p_1, p_2) = 0$  voldoende waarden  $p_1, p_2$  af.

In het tweede hoofdstuk worden de bovenstaande beschouwingen op vergelijkingen  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  met drie onbe-

kenden uitgebreid. Daarbij denkt men zich  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  verkregen door  $x$  en  $y$  te elimineeren uit de drie vergelijkingen  $\varphi_i(x, y, p_i) = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Door  $x$  en  $y$  als cartesische coördinaten te beschouwen levert een stel aan  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  voldoende waarden  $p_1, p_2, p_3$  dan drie op een zelfde assenstelsel betrokken krommen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  op, die een punt gemeen hebben. Brengt men nu in hetzelfde vlak met betrekking tot dezelfde assen de drie stelsels van krommen  $\varphi_i(x, y, p_i) = 0$  in teekening en geeft men dan bijv. aan den rand der teekening bij elke kromme de overeenkomstige waarde van  $p_i$ , die wij haar „koers” noemen, aan, dan doet elk punt van het vlak door de koersen  $p_1, p_2, p_3$  van drie in dit punt samenkomende krommen der verschillende stelsels een stel oplossingen van de gegeven vergelijking  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  kennen. Natuurlijk geeft elk punt van het vlak slechts dan alleen een enkel stel  $p_1, p_2, p_3$  als de stelsels  $\varphi_i = 0$  werkelijk bundels zijn; natuurlijk is de constructie der teekening, die de *abacus* der vergelijking  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  heet, des te gemakkelijker, naarmate de stelsels  $\varphi_i = 0$  eenvoudiger zijn. Het eenvoudige geval, waarbij  $x$  en  $y$  slechts tot den eersten graad in  $\varphi_i = 0$  voorkomen en men dus met de raaklijnenstelsels aan drie krommen te doen heeft, is door E. Duporcq behandeld; in het nog eenvoudiger geval van drie stelsels van evenwijdige lijnen kan de hexagonale *abacus* van Lallemant dienst bewijzen. Nu kunnen twee der drie stelsels  $\varphi_i = 0$  willekeurig gekozen worden. Zoo geeft de eenvoudigste onderstelling  $p_1 = x$ ,  $p_2 = y$  voor het derde stelsel bij  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  de niveau-lijnen  $z = p_3$  van het oppervlak  $f(x, y, z) = 0$ . Is meer in het algemeen  $x = f_1(p_1)$ ,  $y = f_2(p_2)$ , dan blijkt gemakkelijk, dat een zekere transformatie, die men in navolging van Lalanne een „anamorphose” noemt, het derde stelsel van krommen tot rechten kan herleiden als  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  in den vorm  $f_1(p_1)\varphi(p_3) + f_2(p_2)\psi(p_3) + \chi(p_3) = 0$  geschreven kan worden. Van het algemeene geval van drie stelsels van krommen wordt alleen dat van drie overkruisende cirkelstelsels afzonderlijk behandeld. En in het algemeen wordt telkens die homographische transformatie van den *abacus* opgespoord, welke de beide eischen „eenvoudigheid van constructie” en „gemakkelijkheid van aflezing” zooveel mogelijk bevredigt.

Wil men onderzoeken, of drie gegeven waarden van  $p_1, p_2, p_3$

een oplossing van de gegeven vergelijking vormen, dan moet men in het eenvoudige geval van drie lijnenstelsels nagaan, of de bij deze koersen behorende rechten elkaar in een punt snijden. Dit is, als de abacus met lijnen overladen is, in de praktijk ver van gemakkelijk. Daarom mag het een gelukkig denkbeeld genoemd worden op den abacus een dualistische transformatie toe te passen, waardoor drie lijnen door een punt in drie punten op een lijn overgaan. Tot dit doel maakt de schrijver in het derde hoofdstuk gebruik van de vervanging der gewone cartesische punt-coördinaten door een bepaald stelsel van tangentieele coördinaten, de evenwijdige coördinaten. In dit mede door K. Schwering ingevoerde stelsel, dat eigenlijk van Unverzagt afstamt, wordt een lijn bepaald door de stukken  $u$  en  $v$ , die ze van twee gegeven evenwijdige assen — van gegeven punten af gerekend — afsnijdt. Daardoor gaat dan de abacus met zijn drie overkruisende stelsels van bepaalde krommen omhullende raaklijnen, waarvan er ter bepaling van een stel bij elkaar behorende koersen  $p_1, p_2, p_3$  drie door een zelfde punt moeten gaan, over in een abacus, bestaande uit drie meetkundige plaatsen van punten, welke elk een schaalverdeeling dragen en waarvan drie bij elkaar behorende koersen dier verdeelingen op een rechte lijn gelegen moeten zijn. Voor door een punt gaande lijnentripels komen collineaire punten-tripels in de plaats, wat met het oog op de praktijk zeker vereenvoudiging geeft; bovendien laat het beginsel zich door middel van een abacus met dubbele collineariteit gemakkelijk op vergelijkingen met meer dan drie onbekenden uitbreiden. Ook hierbij worden weer verschillende bijzondere gevallen, waarbij een of meer der kromme dragers van de puntenreeksen door rechten vervangen zijn, nader beschouwd en door aan de praktijk ontleende voorbeelden toegelicht.

Het vierde hoofdstuk behandelt het geval, dat twee vergelijkingen  $f(p_1, p_2, p_3) = 0$  en  $F(p_1, p_2, p_4) = 0$  naast elkaar bestaan. Door voor beide vergelijkingen dezelfde krommenstelsels  $\varphi_1(x, y, p_1) = 0, \varphi_2(x, y, p_2) = 0$  te kiezen, verkrijgt men dan een overkruisings-abacus, waarbij elk viertal door een zelfde punt gaande krommen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  een oplossing oplevert. Hiervan worden toepassingen op den parallaxischen driehoek en het vraagstuk van afgravings- en ophoogingsprofielen uitgewerkt.

In het vijfde hoofdstuk vinden de vergelijkingen met meer dan drie veranderlijken een afzonderlijke beschouwing. Deze klimt echter niet op tot de meest willekeurige vergelijking met meer dan drie veranderlijken, wijl zij slechts vat heeft op bepaalde stelsels van tamelijk algemeene vergelijkingen, waaronder ten naaste bij al de door de toepassingen opgeleverde vergelijkingen behooren. Hulpmiddel vormt hier het gebruik van elementen (punten, lijnen, enz.) met meer dan een koers, het construeeren van den abacus met drie afmetingen (R. Mehmke) en het aanbrengen van beweegbare schalen (F. J. Vaes en Torres).

Eindelijk geeft het laatste hoofdstuk, dat voor den wiiskundige wel het belangrijkste is, de algemeene theorie, die voert tot de bepaling van alle vergelijkingen met een willekeurig aantal onbekenden, waarop de nomographie toepasselijk is. Hierbij komen dan elementen met  $n$  koersen, op elkaar gelegde vlakken en meerdere stelsels van collineaire puntentriplets ter sprake. Evenwel, gebrek aan plaataruimte verbiedt ons den hoogst verdienstelijken schrijver hier verder te volgen.  
S.

Analytische Theorie der Ruimtekrommen. Proefschrift, door J. W. LEM, 4<sup>o</sup>, 142 p., Leiden, Eduard Ydo, 1899.

Dit geschrift bevat een overzicht van de differentiaalmeetkunde voor zoover het betreft de omgeving van een gewoon punt eener analytische kromme. Beschouwingen over eene ruimtekromme in haar geheel zijn niet opgenomen, al zou de titel dit misschien doen verwachten. De schrijver heeft het van belang geacht, uitsluitend algebraïsch en analytisch te werk te gaan. Meetkundige methoden zijn vermeden, alleen cōördinaten-rekening is tot afleiding van de verschillende uitkomsten gebruikt. Vooraf gaat eene korte geschiedkundige schets van de ontwikkeling der behandelde theorie, aan het einde komt eene uitvoerige opgave van de bestaande litteratuur. Wie de toepassingen der differentiaalrekening op de meetkunde wenscht te bestudeeren, vindt hier geordend bijeen, wat hij elders verspreid zou aantreffen. De duidelijkheid der uiteenzetting is te prijzen.  
Kl.

Leçons sur les fonctions entières, door E. BOREL. Een deel groot 8<sup>o</sup>, 124 p., Parijs, Gauthier-Villars, 1900.

Het bovenstaand werkje maakt deel uit van eene reeks van lessen over verschillende hoofdstukken der functietheorie, die de schrijver zich voorstelt achtereenvolgens uit te geven. Een goed begrensde onderwerp uit die theorie wordt door hem gekozen, en, terwijl hij bij zijne lezers niet veel meer dan eenige kennis van de beginselen der analyse onderstelt, tracht hij van zulk een onderwerp een behandeling te geven, welke zich verder uitstrekt dan hetgeen de leerboeken daarover kunnen mededeelen. Inzonderheid is het streven van den schrijver er op gericht om de uitkomsten van de jongste onderzoekingen, die met zijn onderwerp verband houden, te bespreken en toe te lichten.

Als eerste reeks van deze lessen verscheen reeds in 1898 een deel onder den titel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, groot 8°, 136 p., Parijs, Gauthier-Villars, waarin een ieder, die een juist inzicht in de beteekenis van Cantor's „théorie des ensembles” wenscht te verkrijgen, op eene geleidelijke wijze met het doel en de strekking dezer theorie bekend wordt gemaakt.

Thans geldt het de geheele (transcendente) functies. Het uitgangspunt vormt Weierstrass's productontwikkeling. De schrijver doet in het kort de beteekenis dezer ontwikkeling uitkomen, en brengt in herinnering hetgeen men daarover gewoonlijk in de leerboeken vermeld vindt. Daarna gaat hij over tot eenige belangrijke onderzoekingen, die met de stelling van Weierstrass in verband staan.

In de eerste plaats komen de onderzoekingen van Laguerre in aanmerking. Het begrip geslacht, zoo juist door dezen gevormd, wordt toegelicht en voor functies van eindig geslacht worden eenige algemeene eigenschappen vermeld, die analogie vertoonen met die van de algebraïsche veeltermen.

In het volgende hoofdstuk worden de ongelijkheden van Poincaré besproken, die voor eene functie van eindig geslacht enig verband aanwijzen tusschen dat geslacht en de wijze, waarop de modulus der functie voor groote absolute waarden van de veranderlijke aangroeit.

Het derde hoofdstuk, waaraan de onderzoekingen van Hadamard en van Schou ten grondslag liggen, sluit zich nauw bij het voorafgaande aan. Daar werd aangegeven, hoe uit het geslacht eene bovenste grens voor de aangroeiing der functie kon worden bepaald, hier is het de vraag om uit eene gegeven wijze van aangroeiing eenige gegevens aangaande het geslacht

te verkrijgen, althans om eene bovenste grens te vinden voor het aantal nulpunten, waarvan de modulus een gegeven getal niet te boven gaat.

In het vierde hoofdstuk vindt men beschouwingen naar aanleiding van het bekende theorema van Picard, volgens hetwelk de functie  $F(z)$  noodzakelijk eene constante wordt, als gegeven is, dat geen der beide vergelijkingen  $F(z) = a$ ,  $F(z) = b$  eene oplossing toelaat. Wederom wordt in het bijzonder de aandacht geschonken aan functies met eindig geslacht en voor deze de vraag gesteld, wat er te zeggen valt van de verspreiding der wortels van  $F(z) = a$  in het  $z$ -vlak, waardoor eenige uitbreiding aan het theorema van Picard kan worden gegeven.

Ten slotte volgen in de aantekeningen, ten eerste een rechtstreeksch bewijs voor Picard's theorema, waarbij van modulaire functies geen gebruik wordt gemaakt en eindelijk eenige korte mededeelingen over de functies „à croissance régulière” en „à croissance irrégulière.”

Ongetwijfeld bevatten deze lessen veel, waarvan door den beoefenaar der functietheorie met belangstelling zal worden kennis genomen. Zonder vrucht zal niemand dit boek raadplegen; moge het hier te lande eene ruime verspreiding vinden.

Kl.

Transactions of the American Mathematical Society. Volume 1, n<sup>o</sup>. 1, groot 8<sup>o</sup>, 96 p., Lancaster, Pa., en New York, The Macmillan Company, 1900. Het *Nieuw Archief* ontving het eerste nummer dezer nieuwe uitgave van de American Mathematical Society, waarvan de redactie gevormd wordt door de heeren Eliakim Hastings Moore, Ernest William Brown en Thomas Scott Fiske. Het nummer bevat een elftal artikelen van onderscheiden aard, waarvan de schrijvers welbekend zijn aan een ieder, die de *Revue Semestrielle* gewoon is te raadplegen. In aard en strekking is de verwantschap met Duitsche tijdschriften, zooals de *Mathematische Annalen*, niet te miskennen. Uit alles blijkt, dat wij hier te doen hebben met een tijdschrift, dat de aandacht van de Nederlandsche beoefenaars der wiskunde ten volle verdient. Wij uiten onze beste wenschen voor den bloei en den voorspoed der nieuwe uitgave.

Kl.





A. N. GODEFROY.



beginnen met de  
op, waarvan de  
1876 v. d. d.  
lang hij de  
d. d.  
d. d.



A. N. GODEFROY.

<p>ABRAHAM NIKOLAAS GODEFROY, 1822—1899.</p>
--

Gedurende het laatste gedeelte van zijn leven heeft de Amsterdamsche bouwkundige A. N. GODEFROY, die 29 December 1899 in zijn woning, Oude Turfmarkt 8, overleed, zooveel voor het Wiskundig Genootschap gedaan, dat wij ons genoopt gevoelen in het tijdschrift van dit genootschap een enkel woord aan de nagedachtenis van den overledene te wijden. Wjl in het „Bouwkundig Weekblad” — het orgaan van de Maatschappij ter bevordering der bouwkunst, welke in de eerste plaats GODEFROY's genegenheid bezat — reeds een uitvoerig levensbericht verschenen is en daarin (zie het nummer van 6 Jan. 1900) in het bijzonder de verdiensten van GODEFROY met betrekking tot zijn hoofdvak van studie, de bouwkunst, geschetst worden, kunnen we ons hier geheel bepalen tot het bespreken van GODEFROY's wiskundige werkzaamheid en van zijn verdiensten ten aanzien van het Wiskundig Genootschap. We achten ons daarbij gelukkig dat we, dank zij de welwillendheid van den schrijver van het bedoelde levensbericht, den heer C. T. J. L. RIEBER, in staat zijn aan ons kort artikel een reproductie van GODEFROY's beelden toe te voegen; vooral zij, die GODEFROY gekend hebben, zullen den heer RIEBER hiervoor dankbaar zijn.

---

We beginnen met GODEFROY's betrekking tot het wiskundig genootschap, waarvan hij in 1873 lid werd. In het winterseizoen 1875—1876 vervulde hij er de eerste spreekbeurt. In Juni 1876 sloeg hij een benoeming tot bestuurslid af; doch in April 1878 fungeerde hij als 2<sup>de</sup> secretaris ad interim. In April 1880 kwamen Prof. F. J. VAN DEN BERG en GODEFROY beide door een vrijwillige bijdrage van f 100 aan een tekort in de kas van het genootschap te hulp en werd GODEFROY tevens door storting van een tweede som van hetzelfde bedrag lid voor

het leven. Eerst in Mei 1883 nam hij een definitieve benoeming tot bestuurslid aan. Dat hij van toen af het wiskundig genootschap ook door persoonlijke medewerking wenschte te steunen, kan hieruit blijken, dat hij in den eersten tijd geen jaar liet voorbijgaan, zonder zich op de wintervergaderingen te doen hooren. Zoo sprak hij (zie *Nieuw Archief*, reeks 1, deel 16, p. 200—202) in Nov. 1884 over de rectificatie van den cirkelboog en de verdeeling van een hoek in drie gelijke deelen, in Jan. 1885 over de verandering van krommen met een middelpunt door projectie, in Dec. 1885 over het transformeeren van cirkels tot kubische krommen in verband met de wig van Wallis, in Maart 1886 over de kromme  $x^3 + y^3 = a^3$ , in Maart 1887 over conchoïdale lijnen en raaklijnen, kubische krommen en kubische oppervlakken door afbeeldingen toegelicht, transformatie door cirkels en bepaling van normalen, in Dec. 1887 over bepaalde transformaties van den cirkel, in April 1889 over den kubischen cirkel en de daarmee in verband staande kubische oppervlakken, in Oct. 1889 (*Nieuw Archief*, reeks 1, deel 18, p. 119—121) over het verband tusschen den cirkel en de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool met dezelfde middellijn en in Jan. 1892 (*Nieuw Archief*, reeks 1, deel 20, p. 108—111) over het afleiden van kubische en bikwadratische regelvlakken uit den cirkel. Gedurende die periode van 1884 tot 1892, toen het wel wat moeilijker scheen dan tegenwoordig om een voldoende aantal sprekers voor de wintervergaderingen van het genootschap te vinden, was GODEFROY steeds bereid iets ten beste te geven. De ontwikkeling van oppervlakken uit kromme lijnen of de transformatie van kromme lijnen in elkaar in verband met oppervlakken was hem een onuitputtelijke bron van materiaal daartoe.

Twee jaren achtereen, van Mei 1889 tot Mei 1891, was GODEFROY voorzitter van het wiskundig genootschap. Aan het einde van het eerste der beide jaren hield hij op de algemeene vergadering een rede over het verband tusschen Bouwkunst en Wiskunde; hierin wees hij er o.a. op, hoe de wiskundige vormen kunnen worden dienstbaar gemaakt tot de versiering van vlakken als plafonds, parketvloeren, paneelen, enz. Deze voordracht werd toegelicht door een reeks van afbeeldingen van moskee-versieringen van de twaalfde tot de vijftiende eeuw van den architect Bourgoin. En aan het einde van het tweede jaar

deed hij in een korte schets voornamelijk uitkomen, dat het bij het behandelen van wiskundige problemen gewenscht is rekening te houden met de geschiedenis der eerste oplossingen en der daarbij gevolgde methode. Werd aan den eenen kant met bewondering gewezen op Poncelet en onze landgenooten van Schooten en van Swinden, aan den anderen kant werd met verontwaardiging melding gemaakt van „de slinksche en laaghartige wijze, waarop Cardanus zich heeft weten meester te maken van het geheim van Nicolo Tartaglio”, waardoor hij ten onrechte voor den eersten oplosser van de kubische vergelijking geldt.

In 1896 — dus nog bij zijn leven — vermaakte GODEFROY het grootste gedeelte van zijn wiskundige bibliotheek aan het wiskundig genootschap van Amsterdam. Hierdoor is de bibliotheek van dit genootschap ruim een vijfhonderd nummers rijker geworden, waaronder naast veertig overdrukjes een groot aantal zeldzame en kostbare werken, naast belangrijke werken van den jongsten tijd allerlei werken van historisch belang voorkomen. Door den bibliothecaris is (zie blz. 358 onderaan) dit geschenk van den edelmoedigen gever afzonderlijk gecatalogiseerd, zie het in Jan. 1897 verschenen „Vierde vervolg van den catalogus.”

Toen GODEFROY door zijn wankelende gezondheid verhinderd werd de bestuursvergaderingen langer bij te wonen, bedankte hij voor het lidmaatschap. Dit was aanleiding, dat hij op de algemeene vergadering van 1898 tot eerelid van het bestuur benoemd werd.

Behalve door het houden van voordrachten op de wintervergaderingen, nam GODEFROY aan de werkzaamheden van het wiskundig genootschap deel door het inzenden van vraagstukken in de „Wiskundige Opgaven”. De deelen 4, 5, 7 en 8 der nieuwe reeks bevatten een vijftiental vraagstukken van zijne hand, die voor het meerendeel met de boven opgesomde onderwerpen in verband staan. Van twee van deze zijn de oplossingen eerst zeer onlangs verschenen.

---

Slaan wij thans nog een blik op GODEFROY's eigenlijke wiskundige werkzaamheid.

Bij de beoordeeling van een zoo ruim standpunt uit moet natuurlijk op den voorgrond gesteld worden, dat GODEFROY bij

zijn opleiding tot architect slechts zeer oppervlakkige kennis van wiskunde had opgedaan en hij alles, waarin hij later zoo goed thuis bleek te zijn, door eigen studie heeft moeten vermeesteren. Als we bedenken, hoe de verschillende takken der wetenschap zich in de laatste vijftig jaren hebben uitgebreid en hoe moeilijk het tegenwoordig ook den wiskundige van professie is, zich op de hoogte te houden van de synthetische meetkunde, als hij voorkeur heeft voor functietheorie of omgekeerd, moet het ons de natuurlijkste zaak van de wereld toeschijnen, dat GODEFROY slechts van enkele onderdeelen een diep inzicht had en deze veel meer bij hem, dan bij den wiskundige van beroep eilanden vormden in een zee van onbekendheden. Natuurlijk hebben we hier op die eilanden het licht te laten vallen; we bepalen ons tot een enkel.

Na de voordracht over het transformeeren van cirkels tot kubische krommen, in Dec. 1885 door GODEFROY gehouden, had ik het genoegen een langdurig gesprek met hem over dit onderwerp te voeren. Daarin trachtte ik hem te overreden, enkele uitkomsten van zijne studie te publiceeren; dit gelukte mij echter niet, wijl het hem niet wel mogelijk scheen de verschillende stukken door eenige algemeene beschouwingen tot een afgerond geheel te vereenigen. Het einde van dit onderhoud was, dat hij mij beloofde mij al zijne teekeningen, voorzien van een korten uitleggenden tekst, te zullen toezenden. Tot mijn groot genoegen ontving ik kort daarna het beloofde en kon ik in een opstel, waaraan ik reeds begonnen was, „Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen” (*Nieuw Archief*, reeks 1, deel 12, p. 1—37), de uitkomsten van GODEFROY openbaar maken. Wjl dit zelfde opstel later in fransch gewaad verscheen in de *Archives Néerlandaises*, kon G. DE LONGCHAMPS van GODEFROY's werk kennis nemen. Zoo heeft dit een weg gevonden in twee fransche leerboeken van dien wiskundige, het „*Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre*”, dat 1890 verscheen, en het „*Supplément comprenant la trigonométrie et la mécanique*”, deel uitmakende van den algemeenen „*Cours de mathématiques spéciales*”, dat in 1893 daaraan werd toegevoegd.

De transformatie, waarvan GODEFROY gebruik maakt, staat in verband met de voortbrenging van kegelsneden door MAC LAURIN. Daarom heb ik deze transformatie, die per slot van rekening

een niet-involutorische kwadratische transformatie in het vlak is, de Mac Laurin'sche transformatie genoemd. Deze transformatie stelde GODEFROY in staat, niet alleen om uit den cirkel verschillende unicursale krommen af te leiden, maar ook om met behulp van de raaklijn aan den cirkel — en hierin komt zijn constructief talent het voordeeligst uit — de raaklijn in het overeenkomstige punt der nieuwe kromme te bepalen. En nu is DE LONGCHAMPS, die met behulp van de theorie der met betrekking tot een driehoek isotoom verwante lijnen voor verschillende kromme lijnen ingenieuze raaklijnenconstructies gegeven heeft, juist de meest competente beoordeelaar van GODEFROY's beschouwingen. Welnu, deze spreekt telkens met lof over GODEFROY's werk. Zoo lezen we aan het slot van de wiskundige inleiding tot het „Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre” omtrent de bedoelde raaklijnconstructie op blz. 107: „Cette remarquable construction nous a été indiquée par M. GODEFROY, architecte à Amsterdam, etc”, op blz. 109: „la tangente au point I a été tracée en appliquant l'élégante construction de M. GODEFROY”, op blz. 112: „la tangente au lieu se détermine simplement, en observant, avec M. GODEFROY, etc.”

---

Aan het graf van den overledene, dien we met het oog op zijn werkzaam en weldadig leven gelukkig mogen prijzen, werd namens het genootschap door den ondervoorzitter, den heer D. COELINGH, een waardeerend woord gesproken. Vooral nu het mij onmogelijk was bij deze plechtigheid tegenwoordig te zijn, was het mij aangenaam door de opstelling van bovenstaande regelen van mijne waardeering te doen blijken. Zeker zal GODEFROY, mede door zijn aangenamen omgang, nog langen tijd bij velen onzer in vriendelijke herinnering blijven.

---

#### N A S C H R I F T.

Nadat het bovenstaande was opgesteld ontving het bestuur van het Wiskundig Genootschap een afschrift van GODEFROY's

testament, reeds in Januari 1896 opgemaakt, waaraan het volgende ontleend is:

Ik vermaak aan het Wiskundig Genootschap, ter spreuke voerende „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven”, gevestigd te Amsterdam:

1°. Alle mijne wiskundige werken, alsmede die betreffende perspectief, sterrekunde, natuurkunde en geologie, onder voorwaarde dat het Genootschap alle kosten van vervoer voor zijne rekening neme <sup>1)</sup>);

2°. Jaarlijks f 500, ter bestrijding der kosten van door het Genootschap uit te geven werken en toe te kennen belooningen voor bekroonde prijsvragen en het inbinden van mijne boekwerken, onder voorwaarde dat de zetel van het Genootschap gevestigd blijve te Amsterdam en niet langer dan tot op het tijdstip dat het Genootschap om welke reden dan ook mocht worden ontbonden.

3°. Alle mijne aantekeningboekjes en geschreven opstellen over en teekeningen van kromme lijnen en gebogen oppervlakken, voor zoo ver die nog aanwezig zullen zijn, onder voorwaarde dat daarvan in de werken van het Genootschap een overzicht opgenomen en met vermelding van mijn naam uitgegeven worde.

Natuurlijk is deze schenking dankbaar aanvaard, te meer wijl de daaraan verbonden voorwaarden niet bezwarend zijn. Terwijl dit korte levensbericht aan GODEFROY gewijd dit deel van het *Nieuw Archief* besluit, zal het volgende met een door KORTEWEG opgemaakt overzicht, als boven verlangd wordt, openen.

S<sup>e</sup>.

---

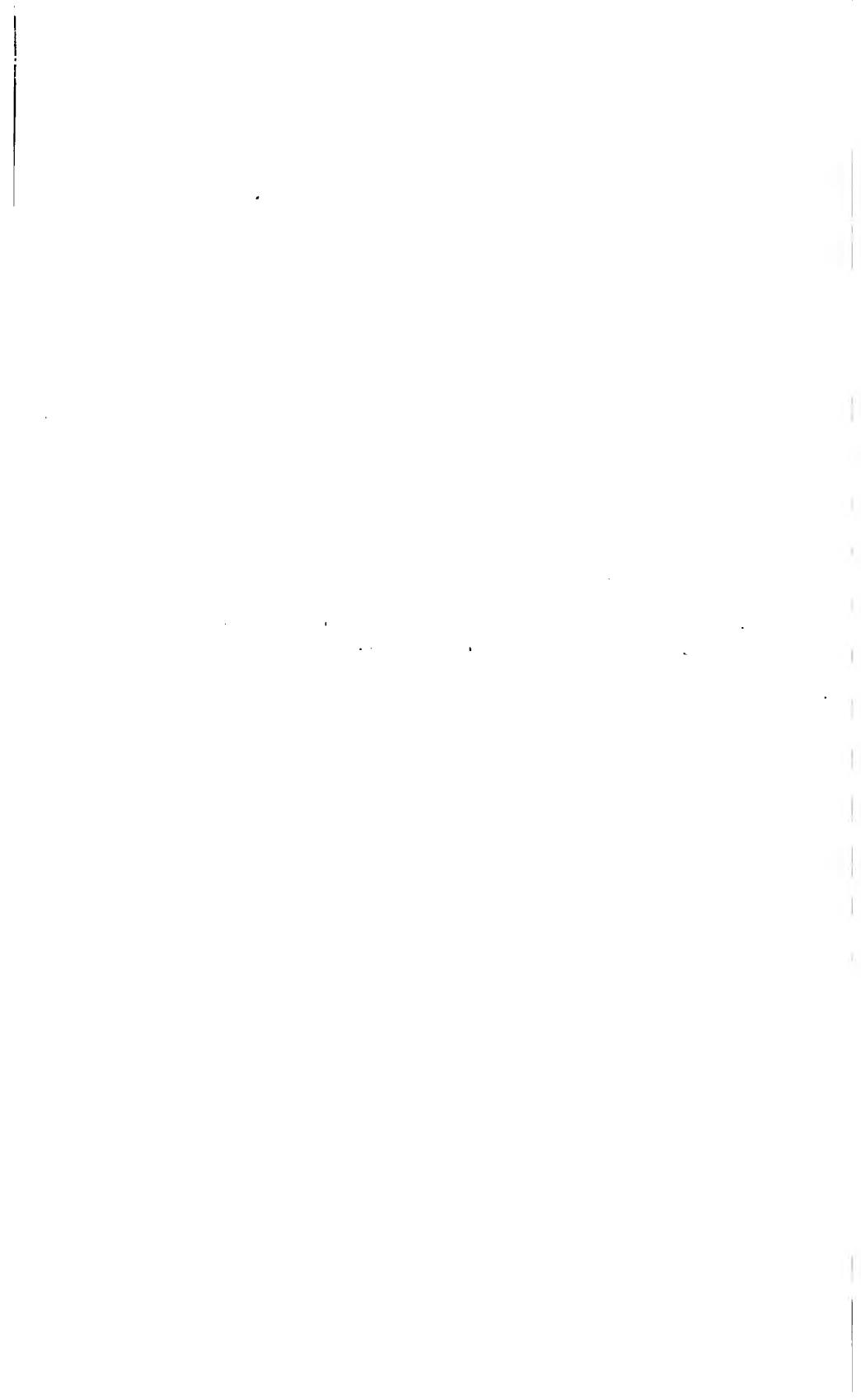
<sup>1)</sup> De boeken zijn (zie boven blz. 356) grootendeels reeds in 1896 ontvangen en gecatalogiseerd.







**NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE.**



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEEDE REEKS

DEEL V

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1902



# I N H O U D.

<b>V 9, P 1, 4, 6, M<sup>1</sup> 5—7, M<sup>2</sup> 3 a, h <math>\beta</math>, L<sup>1</sup> 6 a. D. J. KORTEWEG.</b> Overzicht der door den heer A. N. Godefroy nagelaten handschriften en teekeningen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken, aanwezig op de Universiteits- Bibliotheek te Amsterdam . . . . .	1
<b>P 4 b, O 2 e. P. H. SCHOUTE.</b> De prijsvraag van Godefroy .	33
<b>H 9 h. W. KAPTEYN.</b> Sur la solution la plus générale de deux équations aux dérivées partielles . . . . .	41
<b>R 7. A. J. SWART.</b> Een vraagstuk der dynamica . . . . .	44
<b>V 1 a, D 6 d. G. SCHOUTEN.</b> De enkelvoudige periodiciteit van de functiën $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ . . . . .	57
<b>L 17 d. H. DE VRIES.</b> Eenige opmerkingen naar aanleiding van Emil Weyr's „Beiträge zur Curvenlehre” . . . . .	68
<b>V 1 a, R 8 a. G. SCHOUTEN.</b> De differentiaalvergelijkingen voor de beweging van een vast lichaam . . . . .	86
<b>V 6, 7. N. L. W. A. GRAVELAAR.</b> Stevin's Problemata Geometrica	106
<b>C 2 h, E 5. W. KAPTEYN.</b> Sur la transformation d'une inté- grale définie. . . . .	192
<b>S 3 b a. W. A. WYTHOFF.</b> Een geval van vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen. . . . .	212
<b>R 1 e. F. J. VAES.</b> De vergelijking voor de indeeling der stan- genvierhoeken . . . . .	242
<b>D 6 c s. J. C. KLUYVER.</b> Ontwikkelingscoëfficiënten, die eenige overeenkomst met de getallen van Bernoulli vertoonen	249
<b>R 7 b, F 2 h, 8 h. G. SCHOUTEN.</b> De centrale beweging en de functiën van Weierstrass . . . . .	255
<b>I 2 a. E. D. J. DE JONGH Jr.</b> Over het kleinste gemeene veel- voud van meer dan twee getallen. . . . .	262
<b>K 14 c, c a, g. F. J. VAES.</b> De opvulling der ruimte door regelmatige en half-regelmatige lichamen . . . . .	268
<b>R 8 c y. F. SCHUH.</b> Ueber die Gestalt eines schweren Cylind- ders, der, auf einer horizontalen Ebene rollend, tau- tochron schwingt . . . . .	277
<b>L 18 a. JAN DE VRIES.</b> Ueber die Simultaninvarianten zweier Kegelschnitte . . . . .	298

Blz.

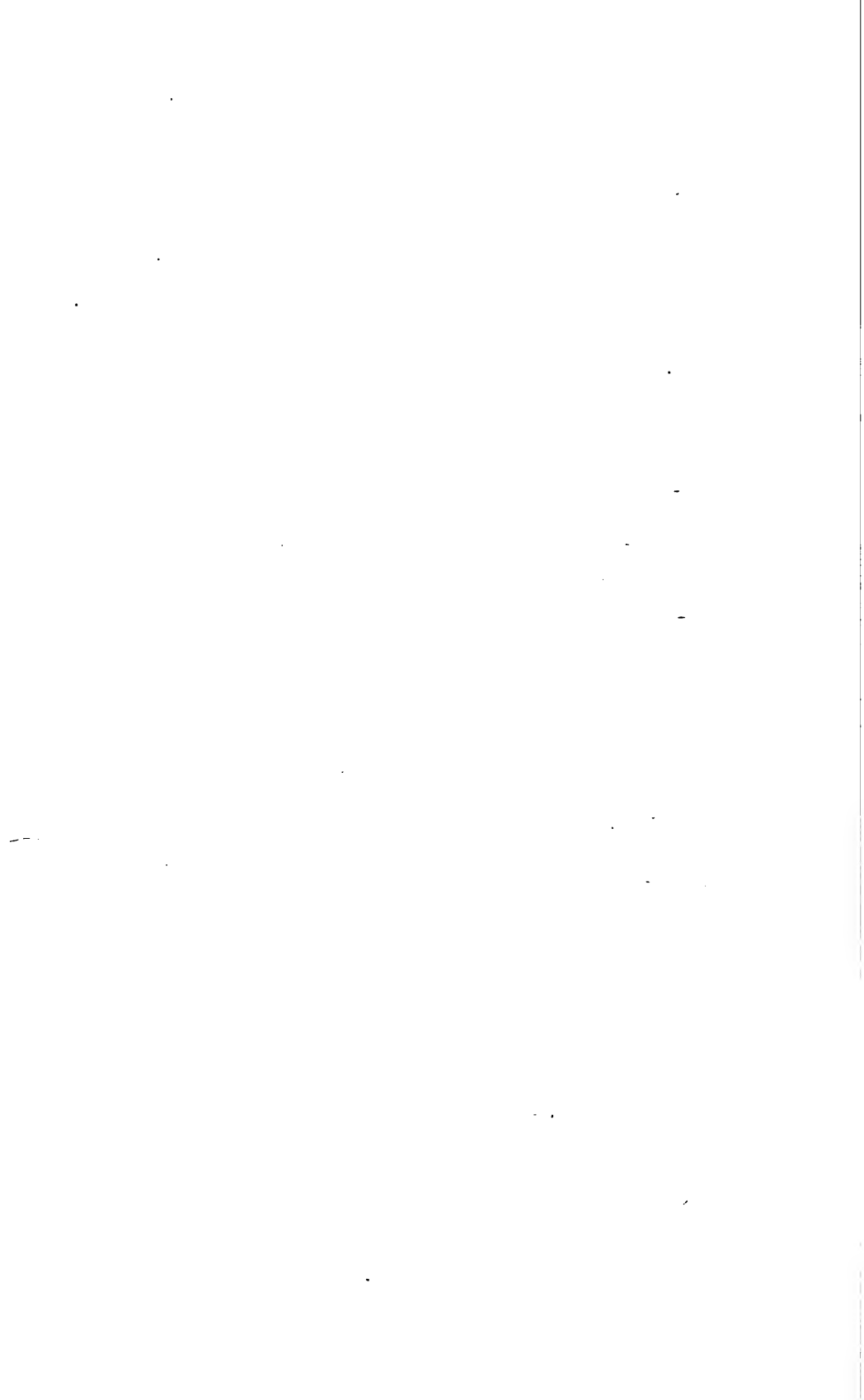
	Blz.
R 7 b, F 2 h, 8 h. G. SCHOUTEN. De centrale beweging en de functiën van Weierstrass. . . . .	301
V 9. P. H. SCHOUTE. Johann Wendel Tesch (1840—1901) met portrait . . . . .	310
E 1 e. L. U. H. C. WERNDLY. Démonstration directe de la formule de Stirling . . . . .	325
M <sup>1</sup> 6 b a. H. DE VRIES. Ueber eine einfache Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniscate . . . . .	329
R 7 f, F 2 h, 8 h. G. SCHOUTEN. De mathematische slinger en de functien van Weierstrass. . . . .	338
R 8 b, F 2 h, 8 h γ. G. SCHOUTEN. De wenteling van een lichaam en de functien van Weierstrass . . . . .	346
K 9 a. C. A. CIKOT. Iets over het bepalen van het middelpunt van evenwijdige krachten, die aangrijpen op de zijden van eenige bepaalde veelhoeken, zonder analytische meetkunde . . . . .	357
X 7. F. J. VAES. Enkele berekeningen met de rekenlineaal . . . . .	362
K 2 d. H. A. W. SPECKMAN. Een nieuwe cirkel in den modernen driehoek . . . . .	367
R 8 a, 9 b a. M <sup>evr.</sup> A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF. Over de verandering, die de levende kracht van een zich vrij bewegend lichaam van onveranderlijke gedaante door het plotseling in rust brengen van een punt daarvan ondergaat. . . . .	374
I 2 a. N. L. W. A. GRAVELAAR. Over het kleinste gemeene veelvoud van meer dan twee getallen . . . . .	389
V 9, L <sup>1</sup> 5 b. P. M. SCHOUTE. Erratum. . . . .	389

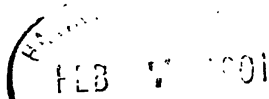
#### Bibliographie.

V 1 a. C. A. LAISANT et H. FEHR. L'enseignement mathématique. Paris, Georges Carré et C. Naud . . . . .	90
U 10 b, V 7. W. SNELLIUS. Le Degré du Méridien terrestre mesuré, publié par HENRI BOSMANS. Bruxelles, Polleunet Ceuterick . . . . .	99
I 1. P. BRASSEUR. Rekenkunde. Gent, Ad. Hoste . . . . .	101
X 8. Catalog mathematischer Modelle. Halle a. S., 1900 . . . . .	101
K, Q. F. GIUDICE. Geometria piana, Geometria solida. Brescia, F. Apollonis, 1897—1900. . . . .	101
I 1. H. DE GUCHTENAERE. Nijverheids- en Handelsrekenen. Gent, Ad. Hoste, 1900. . . . .	102
A 1. G. M. TRESTI. Trattato di Algebra elementare. Livorno, R. Giusti, 1900 . . . . .	102
K. G. A. WENTWORTH. A Text-Book of Geometry. Boston, U. S. A. Ginn & Company, 1899. . . . .	102
K, Q 1. E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Traité de géométrie. Paris, Gauthier-Villars, 1900 . . . . .	102
K, L, M <sup>1</sup> , M <sup>2</sup> . F. MICHEL. Recueil de problèmes de géométrie analytique. Paris, Gauthier-Villars, 1900 . . . . .	103



	Blz.
<b>K 22 a.</b> J. BADON GHYBEN. Gronden der beschrijvende meetkunde. Breda, 1900 . . . . .	104
<b>I 1.</b> J. S. MACKAY. Arithmetic theoretical and practical. London & Edinburgh, Chambers, 1899 . . . . .	104
<b>I 1.</b> F. AMODEO. Arithmetica particolare e generale. Naples, L. Pierro, 1900 . . . . .	105
<b>K.</b> G. VERONESE e P. CAZZANIGA. Elementi di geometria. Verona e Padova, Fratelli Drucker, 1900 . . . . .	105
<b>K 20 e.</b> A. J. PRESSLAND and CH. TWEEDIE. Elementary trigonometry. Edinburgh, Oliver & Boyd, 1900 . . . . .	105
<b>V 7, K 20.</b> H. BOSMANS. Le traité des sinus de Michel Coignet. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1901 . . . . .	194
<b>K 7, L<sup>1</sup>.</b> P. VAN GEER. Grondslagen der synthetische meetkunde. Leiden, A. W. Sythoff, 1901 . . . . .	196
<b>K 22, 23.</b> A. VON OETTINGEN. Elemente des geometrischperspektivischen Zeichnens. Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1901. . . . .	197
<b>B 12 h.</b> S. PINCHERLE e U. AMALDI. Le operazioni distributive et le loro applicazioni all' analisi. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1901 . . . . .	198
<b>C 1.</b> L. KIEPERT. Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. Hannover, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, 1901 . . . . .	200
<b>V 9, T.</b> CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ. Rapports présentés au Congrès International de Physique. Paris, Gauthier-Vilars, 1901 . . . . .	201
<b>V 8, 9.</b> G. BIGOURDAN. Le système métrique des poids et mesures. Paris, Gauthier-Villars, 1901. . . . .	209
<b>S 2 c.</b> H. BÉNARD. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Paris, Gauthier-Villars, 1901. . . . .	210
<b>C 1, 2.</b> C. ARZELÀ. Lezioni di Calcolo Infinitesimale. Florence, Successori Le Monnier, 1901 . . . . .	317
<b>R.</b> J. VAN DER BREGGEN. Leerboek der Mechanica. Groningen, P. Noordhoff, 1901 . . . . .	318
<b>K 6, L<sup>1</sup>, L<sup>2</sup>.</b> Oplossing van Vraagstukken uit de Analytische Meetkunde van het platte vlak en der ruimte, voorkomende in „BRIOT et BOUQUET. Leçons de géométrie analytique”, benevens een gelijk aantal vraagstukken ter oefening door D. J. KORTEWEG, hoogleeraar te Amsterdam. Derde druk, vermeerderd en bewerkt door Dr. W. A. Wythoff. 's-Hertogenbosch, W. C. van Heusden, 1901 . . . . .	318
<b>I, Q 4 b a.</b> E. FOURREY. Récréations arithmétiques. Paris, Nony en Co., 1899 . . . . .	319
<b>U, V 6.</b> Tychonis Brahe Dani die XXIV octobris a.d. MDCI defuncti operum primitias de nova stella summi civis memor denuo edidit regia societatis scientiarum Danica. Copenhagen, 1901 . . . . .	319





OVERZICHT DER DOOR DEN HEER A. N. GODEFROY NAGELATEN  
HANDSCHRIFTEN EN TEEKENINGEN OVER KROMME LIJNEN  
EN GEBOGEN OPPERVLAKKEN, AANWEZIG OP DE UNI-  
VERSITEITS-BIBLIOTHEEK TE AMSTERDAM,

DOOR

D. J. KORTEWEG.  
(Amsterdam.)

---

Bij zijne, voor ons Genootschap zoo gunstige, laatste beschikkingen, gaf de heer GODEFROY den wensch te kennen, dat in de werken van ons Genootschap een overzicht zoude verschijnen van de door hem aan ons nagelaten „aanteekenboekjes en geschreven opstellen over- en teekeningen van kromme lijnen en gebogen oppervlakken.”

Als bibliothecaris van ons Genootschap meende ik, dat op mij in de eerste plaats de taak rustte, dezen wensch te vervullen. Daarbij bleek het mij spoedig, dat het verlangde overzicht of vrij uitvoerig moest worden, of anders van geene beteekenis zoude zijn.

Zoowel de gevoelens van erkentelijkheid jegens den overledene, alsook de overtuiging, dat zijne onvermoeide nasporingen, vooral op het gebied der transformaties van kromme lijnen, waarvan er meerdere zeer eenvoudige door hem zijn uitgedacht en toegepast, eene nadere kennisname verdienen, maakten de keuze niet twijfelachtig. Wat voor GODEFROY's onderzoekingen over de MACLAURIN'sche transformatie reeds is verricht door Dr. P. H. SCHOUTE in zijne verhandeling „Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen” (*Nieuw Archief*, XII, p. 1—37), zal ook voor andere zijner onderzoekingen, wier inhoud in ons overzicht der „aanteekenboekjes” wordt toegelicht, allicht met vrucht kunnen geschieden.

Deze aanteekenboekjes en de dikwijls zeer uitvoerige en met talent bewerkte teekeningen zijn, evenals de overige hand-

schriften, op de universiteits-bibliotheek voorhanden en zoodanig gecatalogiseerd en gemerkt, dat zij met behulp der hier aangegeven nummers gemakkelijk zullen worden teruggevonden.

Het heeft ons ondertusschen gewenscht toegeschenen aan het overzicht der aantekenboekjes en der verdere handschriften te doen voorafgaan de korte verslagen, door GODEFROY zelven opgesteld, van de beide eerste voordrachten door hem op 5 Nov. en 24 Dec. 1873 in ons Genootschap gehouden. Deze korte verslagen waren voor het toenmalige tijdschrift van het Genootschap, het „*Archief*” bestemd, maar zijn daarin nimmer opgenomen. Dit verzuim wenschen wij thans te herstellen, te eer omdat deze verslagen, vooral wanneer men de daarbij behorende teekeningen raadpleegt, een duidelijk denkbeeld geven van het karakter der talrijke mondelinge voordrachten, door GODEFROY op ons Genootschap gehouden, ons tevens de wijze doen kennen, waarop GODEFROY tot zijne belangrijkste nasporingen gekomen is en bovendien gelegenheid geven reeds dadelijk van een vrij groot gedeelte der voorhanden teekeningen de beteekenis te verklaren, beter dan dit op andere wijze zoude kunnen geschieden.

#### A. Kort verslag der voordracht van 5 Nov. 1873.

Als spreker had zich bereid verklaard op te treden de architect A. N. GODEFROY, in den loop van het genootschapsjaar als lid aangenomen, en die tot onderwerp had gekozen het bepalen van den omtrek der kegelsneden in het algemeen, door punten ontstaande door stelsels snijlijnen om 2 vaste punten draaijende, alsmede de bepaling van de raaklijn in ieder punt van den omtrek.

Uit de inleiding bleek, dat het denkbeeld tot deze beschouwing was ontstaan door eene figuur, voorkomende in een bouwkundig werk van JOOST VERMAARSCH, mr. metselaar te Leiden, leerling van den landmeter ABRAHAM WURTZ, in 1678 te Amsterdam uitgegeven<sup>1)</sup> en waarin wordt verklaard, hoedanig

---

<sup>1)</sup> In een der manuscripten van GODEFROY, gedateerd 25 Januari 1875, waarin de in de voordrachten van 5 Nov. en 24 Dec. 1873 behandelde stof eenigermate uitvoeriger is uitgewerkt, wordt melding gemaakt van eene vroegere uitgave van dit zelfde werk, getiteld: *Eerste deel der Bouwkunst ofte grondige bewijzenredenen over den Sin en de Practijck van den auteur VINCENT SCAMOZZI* . . . .

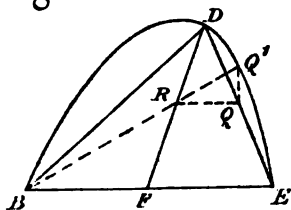
men den omtrek van eene parabool zal kunnen vinden, wanneer drie punten van dien omtrek gegeven zijn<sup>2)</sup>.

Spreeker wees er op, dat men eene parabool kan beschouwen als de perspectief of centrale projectie van een cirkel, en leidde daaruit eene hoogsteenvoudige methode af om ook ellipsen en hyperbolen door middel van zulke stelsels snijlijnen te bepalen. Hieruit bleek o.a., hoedanig men bij parabolen en hyperbolen het beginsel van voortdurendheid (principe de continuité) bevestigd vond, en het onderscheid tusschen de *lineaire* eigenschappen in tegenstelling met de *beschrijvende* of *descriptive* eigenschappen; een en ander naar aanleiding van de denkbeelden door J. V. PONCELET ontwikkeld in zijn „*Traité der propriétés projectives des figures*”, al hetwelk met in het groot geteekende figuren<sup>3)</sup>, door kleuren verduidelijkt, werd toegelicht en mondeling verklaard.

door JOOST VERMAARSCHE, meester metselaar tot Leyden.... Gedrukt bij ABRAHAM VERHOEFF 1664. Op de Amsterdamsche Universiteitsbibliotheek is aanwezig de Amsterdamsche editie van 1678. De bedoelde figuur komt aldaar voor op de eerste plaat aan het einde der inleiding als figuur D. Zij dient tot toelichting van het werkstuk „*Hoe men een Parabole om een gegeven triangel kan beschrijven*.” Zij bevat slechts de constructie punt voor punt; de raaklijn-constructie, die GODEFROY gediend heeft tot grondslag van de meeste zijner latere raaklijn-constructies, is dus van GODEFROY's eigen vinding.

<sup>2)</sup> De constructie van VERMAARSCHE wordt, voor zoover de ééne helft der parabool betreft, weergegeven door nevensgaande figuur. Het is niet moeilijk daarin eene MACLAURIN'sche transformatie der rechte DE te herkennen, zooals die door P. H. SCHOUTE omschreven is in het Nieuw Archief, deel XII, p. 20—22 (1885). Daarbij is dan DF de richtlijn  $f$ , het eerste straalpunt A is het punt in 't oneindige der lijnen BQ, het tweede is het punt B, het derde C het punt in 't oneindige der lijnen QQ'. Men vergelijke slechts de voorstelling der MACLAURIN'sche transformatie hier gegeven in fig. 2. Inderdaad voert de constructie van VERMAARSCHE, door perspectiveering, onmiddellijk tot den meest algemeenen vorm der MACLAURIN'sche transformatie.

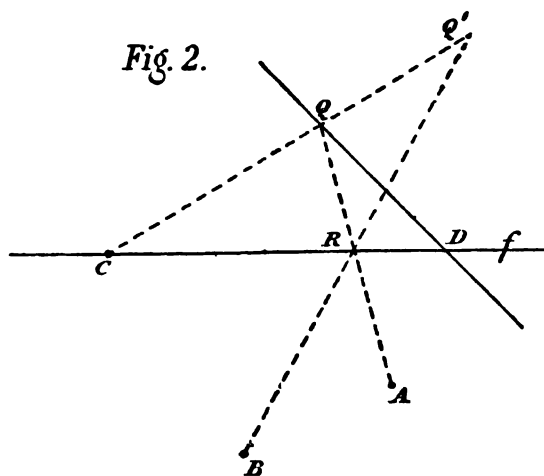
Fig. 1.



<sup>3)</sup> De bedoelde figuren vindt men vereenigd op eene teekening gemerkt 1A. De bovenste bevat de constructie der parabool volgens VERMAARSCHE met deze bijzonderheid dat BE loodrecht staat op de richtlijn DF, welke tevens de as is der parabool en waaraan de lijnen QQ' evenwijdig loopen. Door vervolgens het straalpunt C niet in het oneindige, maar op eindigen afstand ergens op de richtlijn te kiezen, ontstaan ellipsen of hyperbolen, waarvan er van elk soort ééne wordt voorgesteld in de beide onderste figuren.

Daarna behandelde de spreker uit hetzelfde oogpunt de kegelsneden door 5 gegeven punten, waarvan de algemeene vergelijking werd opgemaakt, en ook daarbij werd aangetoond op welke hoogsteenvoudige wijze alle overige punten door het trekken van drie lijnen kunnen worden gevonden, terwijl de raaklijn in dat punt door het trekken van slechts ééne lijn dadelijk bepaald wordt<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Gestoken in het kleeid der MACLAURIN'sche transformatie, zooals deze door SCHOUTE (zie noot (2)) beschreven werd, komt de constructie neer op de hier in fig. 2 aangegevene. De vijf punten door welke zich GODEFROY de kegelsnede bepaald denkt en welke dan op hunne beurt de straalpunten A, B, C, de richtlijn  $f$  en de te transformeeren rechte QD gemakkelijk bepalen, zijn de volgende: vooreerst de drie punten B, C en D der figuur, ten tweede het snijpunt van AB en QD dat wij E zullen noemen, en ten derde een willekeurig door de MACLAURIN'sche constructie bepaald punt Q'.



De raaklijn in eenig punt Q' wordt nu eenvoudig gevonden door het snijpunt H te bepalen van CQ met BA, daarna te trekken de lijn RH, haar snijpunt U met QD te bepalen en dit te vereenigen met Q'. Inderdaad vloeit deze constructie onmiddellijk voort uit den zesboek van PASCAL, indien men, opmerkende dat C, Q', B, E en D allen op de kegelsnede gelegen zijn, CQ' als de 1<sup>e</sup>, de raaklijn in Q' als de 2<sup>e</sup>, Q'B als de 3<sup>e</sup>, BE als de 4<sup>e</sup>, ED als de 5<sup>e</sup> en DC als de 6<sup>e</sup> zijde beschouwt, waarbij dan RHU als de PASCAL'sche lijn optreedt. De afleiding der constructie door GODEFROY is evenwel eene andere. Zij is te vinden in zijn opstel van 25 Januari 1875, vermeld bij de „overige handschriften” (onder D) als N<sup>o</sup>. 2 en komt ongeveer hierop neer, dat de juistheid der overeenkomstige raaklijnconstructie bij de parabool van VERMAARSCH langs analytisch-metrischen weg bewezen wordt. Daarna wordt dan perspectiveering toegepast.

Ten slotte merken wij nog op, dat één der drie aspunten of straalpunten, het punt A namelijk, door GODEFROY steeds het *vergaarpunt* genoemd wordt, C beschouwd hij als het *eerste*, B als het *tweede* aspunt.

Hij wees daarbij aan, dat die oplossing ten eenemaal verschillend is van die door Prof. JACOB DE GELDER gegeven in zijne „Handleiding tot het meetkundig teekenen”, in 1829 verschenen, en gaf alsnog eene meer algemeene beschouwing en oplossing te dien aanzien, waarvan de handelwijze van Prof. DE GELDER als een bijzonder geval kan worden aangemerkt; een en ander werd wederom met figuren in het groot toegelicht<sup>5)</sup>.

Na aldus de *kegelsneden* in het algemeen te hebben behandeld, ging spreker over tot de toepassing op de *cirkelomtrekken*, en wees daarna weder met geteekende figuren<sup>6)</sup> aan, door welke onderscheidene en hoogsteenvoudige stelsels van snijlijnen de geheele omtrek, punt voor punt, kan worden bepaald, wanneer drie punten van den omtrek gegeven zijn, en tevens de raaklijn in elk punt kan gevonden worden.

Hierbij werd gewezen op de praktische toepassingen bij het uitbakenen van groote cirkelbogen op het veld, waarvan drie punten gegeven zijn, zoodat men alleen door bakens en zichtlijnen de punten van den cirkelomtrek kan bepalen. Hij herinnerde hierbij aan de „simpele werkstukken” in het 2<sup>e</sup> boek der „Mathematische oefeningen” van Prof. FR. VAN SCHOOTEN, te Amsterdam in 1660 uitgegeven, aangehaald bij PONCELET in het bovengenoemde werk en aldaar aangeprezen als toepassingen van de „Géometrie de la Règle” in tegenstelling van de „Géometrie du Compas”.

Daarna vervolgde spreker zijne beschouwingen door de verklaring van een ander stelsel snijlijnen, door twee vaste punten draaijende of pivoteerende, in verband met reeksen punten op gegeven lijnen, bepaald door onderling evenwijdige lijnen, en deed uitkomen, welke toepassingen hiervan bij de perspectief van cirkelomtrekken<sup>7)</sup> gemaakt kunnen worden, waarbij werd

<sup>5)</sup> Deze figuren vindt men op de met I<sup>B</sup> gemerkte teekening, waarop tevens voorkomt eene constructie van den cirkel volgens de gewijzigde methode van VERMAARSCHE, beschreven in noot (3).

<sup>6)</sup> Een groot aantal van zulke constructies, daaronder ook die van POHLKE, welke zoo straks ter sprake komt, vindt men vereenigd op de met I<sup>C</sup> en I<sup>D</sup> gemerkte teekeningen. Nadere bijzonderheden over deze en andere der hier besproken constructies zijn te vinden in het reeds geciteerde opstel van 25 Januari 1875. Dewijl zij echter de hoofzaak van GODFRÖY'S arbeid niet raken, meenen wij ze hier achterwege te moeten laten.

<sup>7)</sup> Teekening I<sup>B</sup> bevat constructies betrekking hebbende op het in perspectief brengen van een cirkel.

herinnerd, hoedanig dit onderwerp was behandeld bij VERGNAUD en THIBAUT in hunne werken over de perspectief.

Hier vond spreker aanleiding tot mededeeling van de door Prof. POHLKE voor weinige jaren bekend gemaakte hoogsteenvoudige manier tot bepaling der raaklijnen aan den cirkelomtrek, waarvan het omgeschreven vierkant gegeven is, en die door projecteeren evenzeer op alle kegelsneden kan worden toegepast; maar deed opmerken, dat POHLKE niet aangeeft waar de *raakpunten* gelegen zijn; hetgeen door spreker op hoogsteenvoudige wijze werd aangetoond en eveneens met geteekende figuren toegelicht.

Voorts werd nog aangetoond, op welke wijze de oplossing van POHLKE kan toegepast worden op het beschrijven van den cirkel, die de drie zijden van den driehoek inwendig aanraakt<sup>a)</sup>. Daarbij wees spreker aan, op welke wijze de raakpunten gevonden worden op de zijden van den gegeven driehoek, door alleen gebruik te maken van de lengten der zijden; die raakpunten onderling met rechte lijnen vereenigd, gaven onmiddellijk, in verband met de hoekpunten van den driehoek, al het noodige om den gevraagden cirkelomtrek door middel van raaklijnen te bepalen en aan te wijzen wáár het raakpunt op iedere raaklijn gelegen is.

Voorts trad spreker in eene beschouwing, hoe men door hetzelfde beginsel als door hem op de kegelsneden was toegepast, kon geraken tot stelsels kromme lijnen van den 3<sup>en</sup> en van den 4<sup>en</sup> graad en het bijzonder geval, waarin deze lijnen overgaan in eene parabool. Hij gaf de toezegging omtrent dit onderwerp op eene der volgende vergaderingen in nadere ontwikkeling te treden, en wees nog kortelijk voorloopig aan, op welke wijze men door stelsels snijlijnen met een gegeven cirkel wederom de 3 soorten kegelsneden door punten kan bepalen en de raaklijnen in die punten vinden.

Het laatst gesprokene werd zooveel doenlijk toegelicht met figuren uit de hand op het bord met krijt geschetst, doch die spreker zich voorstelt eveneens met in het groot geteekende figuren, door kleuren verduidelijkt, later te verklaren.

Op voorstel van den heer L. JANSE werd de spreker uitgenoodigd tot het mededeelen der gehouden voordracht met de

---

<sup>a)</sup> De daarbij behorende teekening is gemerkt IF.



noodige figuren in het *Archief* van het Genootschap en verklaarde hij zich daartoe bereid.

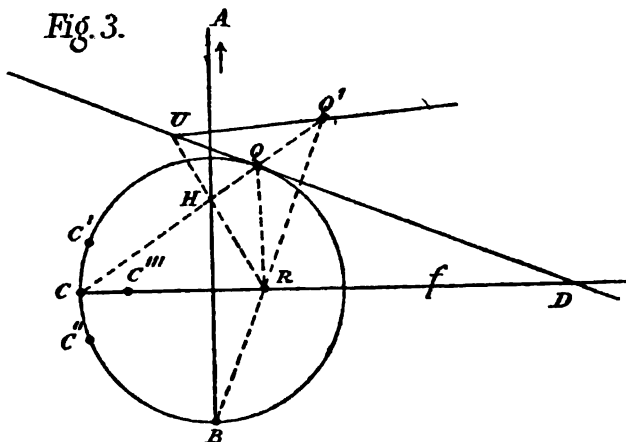
Amsterdam, 6 Nov. 1873,  
aldus opgemaakt door A. N. GODEFROY.

**B. Kort verslag der voordracht van 24 Dec. 1873.**

Als spreker had zich bereid verklaard het lid A. N. GODEFROY, die, naar aanleiding van het besprokene op de eerste Bijeenkomst (5 Nov. l.l.), in behandeling nam de kromme lijnen van den vierden graad, die ontstaan door de snijding van twee stelsels rechte lijnen in gegeven aspunten ronddraaijende.

Aanvangende met de onderstelling, dat die aspunten gelegen zijn op den omtrek van een gegeven cirkel en dat de eene straal zich beweegt op den omtrek, en de daarbij behoorende op de middellijn en door het voetpunt van de loodlijn, die uit den omtrek op die middellijn is neergelaten<sup>9)</sup>, werd de vergelijking van de dus ontstaande kromme lijn opgemaakt.

<sup>9)</sup> Tot toelichting van de hier aangegevene constructie dient in het „kort verslag” nevensgaande figuur, waarbij door ons letters zijn geplaatst die onmiddellijk het verband met de algemeener constructie (zie noot (4)) met drie in het eindige gelegen straalpunten en de daarbij beschrevene raaklijn-constructie doen zien. In die figuur ligt het straalpunt A, het *vergaarpunt* van Go-



DEFROY, in het oneindige. De ligging van het straalpunt C op den cirkel, die getransformeerd wordt, heeft voorts ten gevolge dat de vierdegraadskromme, die in het algemeene geval zoude optreden, degenereert in de rechte BC en in eene derdegraadskromme, die in C een keerpunt vertoont. Men vindt deze kromme afgebeeld op de I<sup>o</sup> gemerkte teekening, waarover nader in de volgende noot.

Wat de raaklijn-constructie betreft, daartoe wordt de cirkel vervangen door

Vervolgens werden andere en zeer uiteenlopende plaatsingen voor de aspunten in beschouwing genomen en de verschillende gedaanten der daaruit ontstaande kromme lijnen aangewezen, met teekeningen toegelicht <sup>10)</sup>, en de vorm der vergelijkingen aangetoond, waartoe die analytisch aanleiding geven — zijnde in het algemeen van den vierden graad. Daarbij werd eene zeer eenvoudige handelwijze aangegeven voor het trekken der raaklijnen, die evenwel eene bijzondere wijziging ondergaat voor het geval, dat het aspunt niet op de middellijn is gelegen <sup>11)</sup>.

Voorts werd het aspunt van den stralenbundel, die langs den cirkelomtrek loopt, verplaatst in het middelpunt, en daardoor bleek alsnu de parabool te ontstaan, hebbende tot parameter de middellijn van den cirkel en tot brandpunt het centrum <sup>12)</sup>.

Door verplaatsing van het tweede aspunt buiten of binnen den cirkelomtrek ontstond op gelijke wijze eene ellips of eene hyperbool, waarbij altijd de middellijn van den cirkel gelijk is aan den parameter, en het middelpunt een der brandpunten. Ook de asymptoten werden bepaald.

hare raaklijn in het te transformeeren punt Q. Die raaklijn transformeert zich dan in eene kegelnede, welke de uit den cirkel ontstaande kromme in het punt Q' raakt, en wier raaklijn kan gevonden worden door de in noot (4) der vorige voordracht beschrevene constructie, welke hier ter plaatse werkelijk is uitgevoerd.

<sup>10)</sup> De met I<sup>G</sup> gemerkte teekening bevat drie krommen van den derden graad respectievelijk met keerpunt, dubbelpunt en geïsoleerd punt verkregen door het punt C achtereenvolgens te plaatsen in C, C' en C'' (zie fig. 3) en eene unicursale kromme van den vierden graad met dubbelpunten in B en C'' verkregen door C te verplaatsen naar C'''. Daarbij is C''' een dubbeltellend dubbelpunt, gevormd door twee elkander rakende takken der vierdegraadskromme.

Daarentegen bevat de met I<sup>H</sup> gemerkte teekening (achterzijde van I<sup>E</sup>), op ééne uitzondering na, uitsluitend krommen van den vierden graad verkregen door de straalpunten buiten den cirkel te kiezen. Bij de ééne uitzondering ligt het straalpunt C weder op den cirkel, en treedt daarbij op als geïsoleerd punt eener unicursale derdegraadskromme met drie bestaانبare asymptoten.

<sup>11)</sup> Inderdaad wordt de constructie der raaklijn bij de MACLAURIN'sche transformatie eenigszins ingewikkelder zoodra het straalpunt C buiten de richtlijn *f* valt. Zie daaromtrent de reeds in noot (2) aangehaalde verhandeling van SCHOUTE, aldaar p. 22.

<sup>12)</sup> Deze constructie en de volgende, waardoor ellipsen en hyperbolen ontstaan, is voorgesteld op teekening I<sup>J</sup> en op grootere schaal op de teekeningen I<sup>K</sup>, I<sup>L</sup>, I<sup>M</sup> en I<sup>N</sup>. Voor meerdere bijzonderheden, deze teekeningen betreffende, moet weder verwezen worden naar het opstel van 25 Januari 1876. Bij al deze figuren gaat de MACLAURIN'sche transformatie in eene homographische over, omdat de drie straalpunten in ééne rechte gelegen zijn (zie de verhandeling van SCHOUTE, p. 22).

Bij deze constructie bleek verder, dat de lijn getrokken door het tweede aspunt, evenwijdig aan de middellijn waarop geprojecteerd wordt, niets anders is dan de richtlijn.

Voorts werd aangewezen, dat die middellijn tevens is eene gemeenschappelijke koorde van den cirkel en de kegelsnede, zoodanig dat de raaklijnen aan de overeenkomstige punten getrokken, elkander op die koorde ontmoeten.

Na nog andere eigenschappen te hebben aangetoond, wees spreker aan, dat bij de ellips en hyperbool nog eene tweede gelijkvormige lijn bestaat, waarvan het cirkelcentrum almede een brandpunt is, en verklaarde dit door de gevonden kegelsneden te beschouwen als de projectiën van de doorsneden van twee gelijke rechte cirkelvormige kegelvlakken, waarvan de assen onderling rechthoekig zijn. Bij scherpe top hoeken ontstaan twee ellipsen. Bij rechte top hoeken eene parabool en eene rechte lijn. Bij stompe hoeken twee hyperbolen <sup>13)</sup>.

De vorm der lijnen werd nog onderzocht voor het geval dat de aspunten bezijden het middelpunt waren geplaatst en ook bij scheefhoekige ordinaten; in het algemeen bleek de kromme lijn steeds te behooren tot de kegelsneden <sup>14)</sup>, en bleek dadelijk, welke soort er ontstond uit de verhouding van den afstand der aspunten tot den straal. Bij gelijkheid: parabool; grooter: ellips; kleiner: hyperbool.

Bij de behandeling van de lijnen van den 4<sup>den</sup> graad deed spreker nog uitkomen, dat de beschouwde constructiën kunnen beschouwd worden als bijzondere gevallen eener algemeene constructie, waarbij de cirkel en eene rechte naar willekeur worden aangenomen, benevens drie punten mede naar welgevallen, waarop als aspunten zich drie stelsels van stralen of rechte lijnen bewegen, en die door hunne onderlinge snijding

<sup>13)</sup> Dit wordt nader door figuren toegelicht op de vier in de vorige noot aangehaalde teekeningen. Met de tweede gelijkvormige lijn is bedoeld de tweede kegelsnede, welke naast de eerste als doorsnede optreedt, zoodat beiden te zamen de gedegeneerde vierdegraadsruimtekromme vormen, welke bij willekeurige plaatsing der kegels hunne doorsnede aangeeft.

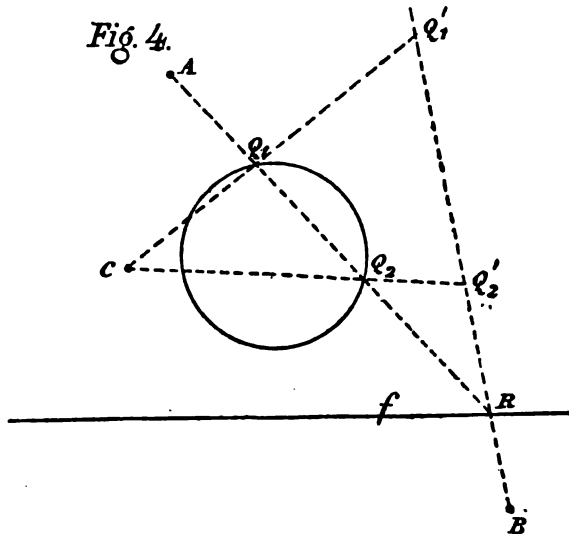
<sup>14)</sup> Natuurlijk omdat bij de keuze der aspunten steeds werd zorg gedragen de punten B en C met het vergaarpunt A in het oneindige in ééne rechte te houden. Figuren hierop betrekkelijk vindt men op eene met 10 gemerkte teekening.

aanleiding geven tot eene kromme lijn van den tweeden, vierden of hoogerden graad <sup>15)</sup>.

Bij een der behandelde bijzondere gevallen, waarbij een der aspunten op eindigen en de beide anderen op oneindigen afstand werden ondersteld, wees de spreker aan, dat de ontstaande kromme kon worden beschouwd als de projectie der doorsnede van een recht cirkelvormig kegelvlak met een parabolischen cylinder, hebbende tot parameter den afstand van het eindige aspunt tot het cirkelcentrum. De horizontale projectiën dezer doorsneden bleken te zijn epicycloïden (gewone, verlengde of verkorte), naar gelang van de plaatsing van het aspunt *in*, *binnen* of *buiten* den cirkelomtrek <sup>16)</sup>.

Al het besprokene werd toegelicht met figuren uit de hand

<sup>15)</sup> De bedoelde constructie stemt overeen met de algemeene MACLAURIN'sche transformatie, zooals blijkt uit de figuur, waarvan het bovenstaande vergezeld is, en die wij hier reproduceeren, de letters weder plaatsende in overeenstemming met de verhandeling van SCHOUTE. Waarschijnlijk is het de bedoeling, dat de



krommen van hoogerden graad dan den vierden optreden kunnen door herhaling der transformatie. Zooals men weet, kunnen echter daarbij steeds slechts *unicursale* krommen ontstaan.

<sup>16)</sup> Zulke overgangen tot ruimtebeschouwingen waren zeer kenmerkend in de voordrachten van GODFROY. De hier besprokene wordt toegelicht door eene fraaie teekening gemerkt IP.

of op het bord met krijt geschetst en bovendien met acht stuks uitvoerige teekeningen <sup>17)</sup> met kleuren verduidelijkt, waarbij ten slotte nog werd opgemerkt, hoe men door voortzetting van projecteeren der gevonden punten tot nieuwe stelsels kromme lijnen kan geraken, waarbij zoowel het aspunt als de lijn, waarop geprojecteerd wordt, kunnen worden verplaatst <sup>18)</sup>.

C. Overzicht der aantekeningboekjes door A. N. GODEFROY bij zijne voordrachten gebruikt en der bijbehorende teekeningen.

N<sup>o</sup>. 1. Dit boekje heeft gediend bij de voordrachten van 24 Dec. 1873 en 28 Januari 1874. Voor de eerste dezer voordrachten verwijzen wij naar het kort verslag, dat hier vooraf is gegaan. Bij de tweede werd, naar aanleiding der in de eerstgenoemde voordracht besprokene transformatie van den cirkel in eene kegelsnede, waarvan een der brandpunten met het middelpunt van den voortbrengenden cirkel samenvalt, o.a. de poolvergelijking der kegelsneden opgemaakt, een drietal constructies voor de raaklijn en eene voor den kromtestraal afgeleid. Ten slotte werd eene benaderde constructie voor de ellips uit cirkelbogen aangegeven, welke men kan terugvinden op teekening N<sup>o</sup>. 1<sup>o</sup>. Een kort verslag ook van deze voordracht bevindt zich onder de manuscripten.

N<sup>o</sup>. 2. *Voordracht van 28 Oct. 1874.* Bepaling der kromtestralen van kegelsneden in verband met hunne constructie door stelsels snijlijnen of stralenbundels. In deze voordracht zijn blijkbaar een groot

<sup>17)</sup> In werkelijkheid zijn er negen verschillende teekeningen gevonden, thans gemerkt 1<sup>o</sup>, 1<sup>H</sup>, 1<sup>P</sup>, 1<sup>K</sup>, 1<sup>L</sup>, 1<sup>M</sup>, 1<sup>N</sup>, 1<sup>O</sup> en 1<sup>P</sup>, welke alle op deze voordracht betrekking hebben of althans gemakkelijk er mede in verband kunnen worden gebracht.

<sup>18)</sup> Aan eene andere bewerking van het kort verslag van deze voordracht ontleenen wij nog de volgende, voor den spreker zeer kenmerkende zinsnede: „Na nog tal van andere vormen dier lijnen te hebben aangetoond in uitgewerkte „figuren, besprak hij het bepalen der raaklijnen, en verder de wijze waarop bij „voortzetting van de gevolgte handelwijze geheele reeksen van kromme lijnen „van hoogere orde kunnen geacht worden te ontstaan met keerpunten, buigpunten „en knoopen. Enkele dezer lijnen herinnerden aan bouwkunstige vormen, om- „trekken van vazen, wrongen van schepen, enz.”. Deze laatste zinsnede betreft waarschijnlijk vooral de vierdegraadskrommen op 1<sup>H</sup>.

aantal constructies dezer kromtestralen beschreven en met elkander in verband gebracht. Dit blijkt nog nader uit een bundeltje teekeningen met toelichting, aanwezig in eene kleine portefeuille (opgenomen in de groote), welke wij met II hebben gemerkt. Op een tiental afzonderlijke bladen zijn ongeveer even zoovele verschillende constructies uitgevoerd. De drie laatsten zijn naar SCHLÖMILCH, BRESSE en TERQUEM genoemd.

Nº. 3. *Voordracht van 27 Oct. 1875.* Vervorming van kegelsneden tot kromme lijnen van 3<sup>e</sup> en hoogere graden door middel van stralenbundels, en bepaling der raaklijnen. De vervormingen geschieden met de MACLAURIN'sche transformatie (zie noot 4 en 15), welke hier meestal op den cirkel of de parabool wordt toegepast. Op die wijze ziet men o.a. ontstaan de semicubische parabool en door herhaling de parabolen van hoogere orde, de cissoïde van DIOCLES, de kromme van AGNESI en het folium van DESCARTES. (Vergelijk de verhandeling van SCHOUTE, aldaar p. 31.) Bij deze voordracht behooren drie teekeningen, gemerkt III<sup>a</sup>, III<sup>b</sup> en III<sup>c</sup>, voorstellende de cissoïde, de kromme van AGNESI en het folium van DESCARTES.

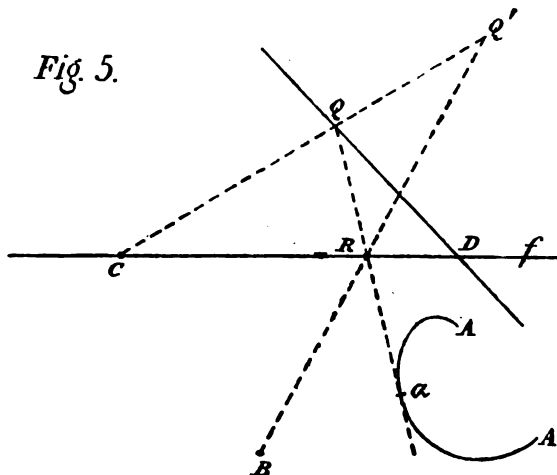
Nº. 4. *Voordracht van 6 Febr. 1876.* Vervolg van het voorafgaande. Uitbreiding der MACLAURIN'sche transformatie\* <sup>19)</sup>. In deze voordracht is *vooreerst* besproken eene toepassing der MACLAURIN'sche transformatie ter verkrijging der cissoïde, strophoïde en conchoïde, waarbij de richtlijn  $f$  naar het oneindige is verplaatst (verg. SCHOUTE, p. 24 en p. 32). *Ten tweede* wordt eene uitbreiding der MACLAURIN'sche transformatie aangegeven, die door nevensgaande figuur wordt voorgesteld, welke men vergelijkte met fig. 2 van noot 4. Men zal dan bespeuren, dat de uitbreiding hierop neerkomt, dat het straalpunt A vervangen is door eene kromme AA, zoodat de vroeger door het vaste punt A gaande stralen AQ, welke op de richtlijn het punt R aanwijken, thans raak-

---

<sup>19)</sup> Deze en de overige met een sterretje voorziene titels zijn niet van GODEFROY, die trouwens in 1876 zijne transformatie niet als de MACLAURIN'sche zoude hebben aangeduid. De niet met een sterretje voorziene zijn aan de aantekenboekjes zelve of aan de opgave voor het Nieuw-Archief ontleend.

lijnen geworden zijn aan de gegeven kromme AA. Daarbij is de rechte QD de te vervormen lijn. Kiest men voor AA een cirkel of in het algemeen eene kegelsnede, dan beschrijft Q' in 't algemeen een kromme van den vierden graad, die echter afdaalt tot den derden, wanneer de bedoelde cirkel of

Fig. 5.



kegelsnede raakt aan de richtlijn  $f$ . Dit geval wordt voorgesteld op de teekeningen IV<sup>a</sup> en IV<sup>b</sup>. De raaklijn aan de getransformeerde kromme kan daarbij gemakkelijk gevonden worden door het raakpunt  $\alpha$ , dat bij de constructie van het punt Q' gediend heeft, te beschouwen als een vast straalpunt. De getransformeerde van QD wordt daardoor eene kegelsnede, de getransformeerde kromme rakende in Q', en wier raaklijn daar ter plaatse gemakkelijk kan worden geconstrueerd.

Spreker merkt daarbij nog op, dat ook de straalpunten B en C en evenzeer de rechten RD en QD door gegeven krommen vervangen kunnen worden. Daardoor ontstaat een ruim veld van nieuwe transformaties, bij alle welke tevens de raaklijnconstructie gemakkelijk kan worden verricht, door namelijk de krommen, welke voor de vaste straalpunten opgetreden zijn, door de oogenblikkelijke raakpunten, en daarentegen de krommen QD en RS door hunne raaklijnen te vervangen.

Ten derde begeeft spreker zich in eene beschouwing van verschillende voetpuntslijnen (podaires) (zie SCHOUTE, l. c. p. 26).

Behalve de reeds besproken teekeningen, behoort ook bij

deze voordracht een gedeelte van III<sup>c</sup>, aangevende de constructie der strophoïde, conchoïde en eene andere constructie der cissoïde, dan op III<sup>a</sup> voorkomt. Alles natuurlijk met bijbehorende raaklijn-constructies.

N<sup>o</sup>. 5. *Voordracht van 31 Jan. 1877.* Vervolg der toepassingen van de MACLAURIN'sche transformatie. Eene gewijzigde MACLAURIN'sche transformatie\*<sup>19)</sup>. Vooraf gaat eene nadere beschouwing der MACLAURIN'sche transformatie ter verkrijging der strophoïde en conchoïde uit den cirkel, waarbij in het bijzonder gelet wordt op de meetkundige plaats van het snijpunt der raaklijnen in de overeenkomstige punten van den cirkel en van de verkregen kromme. Die meetkundige plaats vindt men op teekening V<sup>a</sup> voor de strophoïde (waar zij met den limaçon van PASCAL overeenkomt), en op V<sup>b</sup> voor de conchoïde voorgesteld. Het snijpunt bij SCHOUTE, evenals in onze figuur 3, steeds door de letter U aangeduid, speelt inderdaad bij de constructie der raaklijn aan de getransformeerde kromme eene gewichtige rol.

Daarna volgt de beschrijving van eene transformatie, die met de MACLAURIN'sche in verband kan worden gebracht door het straalpunt A ongewijzigd te laten bestaan, de lijn in het oneindige tot richtlijn  $f$  te kiezen, maar de beide straalpunten B en C op de bij de vorige voordracht beschrevene wijze door parabolen te vervangen. Zij wordt in plaat V<sup>c</sup> toegepast op de raaklijn aan den top van de parabool CC en levert zoo eene derdegraadskromme. Op eene andere teekening V<sup>d</sup>, waarschijnlijk evenzeer bij deze voordracht behoord hebbende, is daarentegen het straalpunt B onveranderd blijven bestaan.

Eindelijk volgden beschouwingen over den kromtestraal van het folium van DESCARTES en van de parabolen van hoogere orde, hunne ontwonden en vervormingen.

N<sup>o</sup>. 6. *Voordracht van 31 Oct. 1877.* Kromtestraal-constructie door hulpfiguur. Uit de analytische uitdrukking voor den kromtestraal wordt eene constructie afgeleid, die een eenvoudig karakter aanneemt zoo vaak de uitdrukking  $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-2}$  eene constante is of althans onder een eenvoudigen vorm kan gebracht worden. Toepassing op



de krommen  $y = a^x$ ,  $x^m y^n = p^m + n$ ,  $a^m x^n + b^m y^n = p^m + n$ ; meer in het bijzonder op de kegelsneden. Geene hierbij behorende teekeningen zijn gevonden.

N<sup>o</sup>. 7. *Voordracht van 1878.* Bepaling der normaal aan onderscheidene soorten van podaires of voetpuntslijnen met daaruit afgeleide krommen. Eene eenvoudige constructie punt voor punt wordt voor de voetpuntslijnen der parabool aangegeven en daarna voor deze krommen eene raaklijn-constructie afgeleid, berustende op de welbekende voor de voetpuntslijnen van den cirkel. Daaruit volgt dan weer de raaklijn-constructie aan eene kromme, wier elementen telkens geacht kunnen worden samen te vallen met die van de voetpuntslijnen eener parabool, waaruit dan op hare beurt wordt verkregen de raaklijn-constructie aan de op plaat V<sup>2</sup> (zie voordracht N<sup>o</sup>. 5) geconstrueerde kromme, welke vervolgens nog eenigermate wordt gegeneraliseerd.

Evenzeer wordt besproken de overeenkomstige meetkundige plaats bij het folium van DESCARTES en een paar transformaties van de rechte lijn, bij welke de raaklijn-constructie gelukt door terugvoering tot de gegeneraliseerde MACLAURIN'sche transformatie bij voordracht N<sup>o</sup>. 4 nader aangeduid.

Eindelijk vindt men als eene ontwerp-prijsvraag het algemeene vraagstuk gesteld, om bij toepassing der MACLAURIN'sche transformatie de kromtestraal der getransformeerde kromme te vinden, als die van de te transformeeren kromme gegeven is <sup>20)</sup>. Ongetwijfeld in verband daarmede wordt de constructie van den kromtestraal voor de cissoïde en strophoïde geschetst. De prijsvraag is werkelijk gesteld voor 1880—1884.

Bij deze voordracht zijn geene teekeningen gevonden, maar in het aantekenboekje zelve, zooals in vele anderen, zijn vrij uitvoerige, gekleurde schetsen aangebracht.

N<sup>o</sup>. 8. *Voordracht van 26 Febr. 1881.* Kromme lijnen van den derden graad uit parabool en cirkels afgeleid. Spreker heeft opgemerkt, dat bepaalde krommen van den derden graad, in het bijzonder die welke een gesloten tak vertoonen, door zijne transformatie niet uit den cirkel, noch

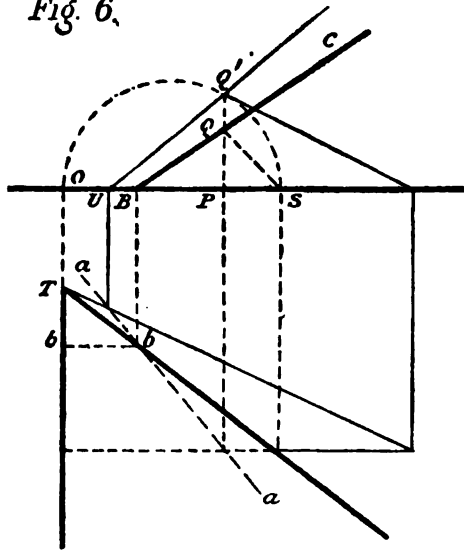
---

<sup>20)</sup> Zie daaromtrent een opstel van Dr. P. H. SCHOUTE in deze zelfde aflevering.

uit de parabool kunnen verkregen worden. (Inderdaad levert de MACLAURIN'sche transformatie, op kegelsneden toegepast, slechts unicursale derde- en vierdegraadskrommen.) Hij zoekt daarom naar eene andere transformatie, waarmede dit doel wèl te bereiken valt, en geraakt nu langs analytischen weg tot de volgende in het bovenste gedeelte van fig. 6 voorgestelde. Daarbij is  $Q$  een punt der te transformeeren kromme,  $O$  een vast punt,  $PQS$  een gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek,  $OQ'S$  een cirkel op  $OS$  als middellijn beschreven,  $Q'$  een punt der getransformeerde kromme.

Beschrijft  $Q$  eene rechte  $BC$ , zooals in onze figuur is aangegeven, dan levert  $Q'$  eene kegelsnede; welke gemakkelijk blijkt

Fig. 6.



te kunnen worden opgevat als de verticale projectie van de doorsnede van een verticaal plat vlak, welks horizontale doorsnede door  $aa$  wordt voorgesteld, met een scheeven cirkelvormigen kegel, welke het punt  $T$  in het horizontale vlak tot top heeft en den verticalen cirkel, op  $bb$  der grondlijn beschreven, als richtlijn.

Deze ruimtebeschouwing voert dan onmiddellijk tot de constructie der raaklijn  $UQ'$ , welke constructie wij in onze figuur door de dunne getrokken lijnen hebben aangegeven.

Daaruit volgt dan weder de raaklijn-constructie bij de trans-

formatie eener willekeurige kromme, welke immers tot dat doel in het te transformeeren punt Q door hare raaklijn BQ kan vervangen worden.

Soortgelijke ruimtebeschouwingen doen de uit parabolen en cirkels ontstaande derdegraadskrommen kennen als doorsneden van oppervlakken, die op eenvoudige wijze door cirkels beschreven kunnen worden. Deze opmerking voerde spreker voor het eerst op het gebied der derde- en vierdegraadsoppervlakken, waarover vele der latere voordrachten handelen.

Bij deze voordracht behoort een blad, gemerkt VIII, met meer dan dertig teekeningen van uit den cirkel afgeleide vierdegraadskrommen, allen zich zelven rakende in het punt O en in het algemeen van het geslacht één. Derdegraadskrommen van dit geslacht worden verkregen door de constructie toe te passen op kegelsneden met eene asymptotenrichting loodrecht op OP. Daarvan zijn echter geene teekeningen voorhanden.

Nº. 9. *Voordrachten van 14 Dec. 1881 en 14 Maart 1883.* Kromme lijnen door stralenbundels bepaald en beschouwd als projectiën van kromme lijnen in de ruimte. Verschillende der vroeger besproken lijnen, nam. de in noot 16 aangehaalde, de conchoïde, de strophoïde, de cissoïde en in een toevoegsel van 23 Dec. 1881 ook het folium van DESCARTES, worden hier beschouwd als projectiën van ruimtekrommen, verkregen door de doorsnijding van tweede-graadskegels en cylindrs in bijzondere standen geplaatst, van welke ruimtekrommen daarna ook andere projectiën worden geconstrueerd. Twee der platen, gemerkt IX<sup>a</sup> en IX<sup>b</sup> hebben betrekking op dit toevoegsel, hetwelk is voorgedragen op 14 Maart 1883. (Zie bij Nº. 12.)

Nº. 10. *Voordrachten van 21 Febr. 1883 en 26 November 1884.* Doorsnijding van cirkels en hoeken, die in hetzelfde vlak gelegen zijn, in verband met de wijze waarop deze verondersteld worden te ontstaan. *Eerste gedeelte.* De cirkel of hoek als stralenbundel, ontstaan door draaijing van eene regte lijn om een vast punt. Ontdaan van de eenigermate zonderlinge inkleeding, waarbij bijv. twee elkaar doordringende vlakke figuren geacht worden elkander te snijden volgens eene

bepaalde lijn, welke niets anders is dan de meetkunstige plaats der snijpunten van de krommen of rechten, door wier voortbeweging de vlakke figuren worden ondersteld te zijn ontstaan, houdt deze voordracht zich hoofdzakelijk bezig met de krommen, wier bipolaire-poolhoekenverg. voorgesteld worden kan door  $\varphi_2 = n\varphi_1$ . Een naschrift van 20 April 1884, voorgedragen 26 Nov. '84, bevat eene nadere beschouwing der hyperbool  $\varphi_2 = 2\varphi_1$  en der trisectrix  $\varphi_2 = 180^\circ - 3\varphi_1$ . Bij deze voordracht behooren twee teekeningen, gemerkt  $X^A$  en  $X^B$ , waarop verschillende kromme lijnen zijn voorgesteld met lineaire bipolaire-poolhoekenvergelijkingen. Daarbij wordt ook het geval beschouwd, dat een der polen naar het oneindige gaat, wat aanleiding geeft tot het ontstaan der quadratrix.

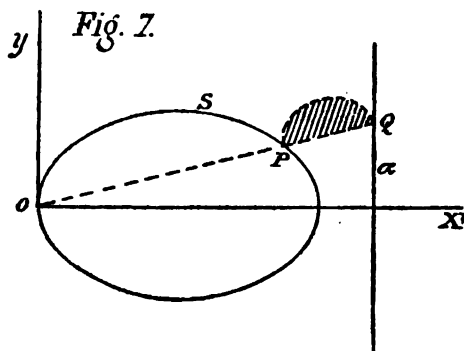
Nº. 11. *Voordracht van 21 Febr. 1883. Tweede gedeelte.* Het cirkelvlak ontstaan uit concentrische omtrekken, wier aantal evenredig is aan den straal, onafhankelijk van eenigen bepaalden hoek. Overeenkomstige beschouwing van den cirkel  $r_2 = nr_1$  als de doordringing van twee cirkels, elk voor zich door concentrische cirkels voortgebracht. Toepassing van hetzelfde beginsel op ruimtefiguren. Aanvang der later voortgezette beschouwingen over derdegraadsoppervlakken. Bij deze voordracht behooren drie teekeningen,  $XI^A$ ,  $XI^B$  en  $XI^C$ , voorstellende verschillende zoogenaamde doordringingen van cylinder- en bol- en van kegel- en bolruimten.

Nº. 12. *Voordrachten van 14 Maart 1883 en 26 Nov. 1884.* De kromme lijn van de derde macht, waardoor een hoek in drie gelijke deelen wordt gedeeld; afleiding van deze kromme uit den cirkel, enz. De trisectrix wordt hier beschouwd op de door SCHOUTE l. c. p. 24 besprokene wijze. In verband daarmee wordt in herinnering gebracht de soortgelijke constructie (door de MACLAURIN'sche transformatie) van strophoïde, cissoïde en conchoïde. Zie voorts over deze voordracht het onder Nº. 9 vermelde. Dit aantekenboekje heeft tevens gediend voor eene voordracht, gehouden 26 Nov. 1884, over de driedeeling van den hoek, de trisectrix, en eene daartoe dienstige voetpuntslijn van den cirkel, en over eene benaderde rectificatie van cirkelbogen door LAMBERT.

N<sup>o</sup>. 13 en 14. *Voordracht van 21 Nov. 1883. Constructiën van oppervlakken van den derden graad door kegelsneden van veranderlijken parameter, in verband met onveranderlijke kegelsneden en eene rechte lijn.* Aanvankelijk, blijkens den titel van het laatste gedeelte der voordracht van 14 Maart 1883, vermeld in het *Nieuw Archief*, deel XI, p. 47, letter c, met het doel om de verschillende soorten van derdegraadskrommen te doen optreden als doorsneden van ééNZelfde oppervlak, heeft GODEFROY verschillende ontstaanswijzen van cubische oppervlakken bedacht, welke uit een constructief oogpunt zoo eenvoudig mogelijk gekozen zijn geworden. Dewijl het onderzoek van de zoo verkregen oppervlakken GODEFROY geruimen tijd bezig gehouden heeft, zullen wij hier omtrent die ontstaanswijzen in eenige meerdere bijzonderheden treden, daarbij in hoofdzaak GODEFROY's aantekeningen ten grondslag leggende.

Zij kunnen tot een *drietal* worden teruggebracht.

Bij de eerste worden aanvankelijk als richtlijnen gekozen



eene willekeurige kegelsnede S en eene rechte lijn  $\alpha$  loodrecht op de as dezer kegelsnede, beiden in het vlak van teekening. Als beschrijvende lijnen doen daarbij dienst ellipsen of hyperbolen, gelegen in vlakken loodrecht op het vlak van teekening, allen *onderling gelijkvormig*, terwijl een hunner

assen telkens begrensd wordt door de snijpunten P en Q van een door den top O der kegelsnede S getrokken straal met de kegelsnede S en met de rechte  $\alpha$ . (Zie nader fig. 7 waar de helft van eene der beschrijvende kegelsneden op het vlak van teekening is neergeslagen).

Stelt men nu voor de vergelijking der kegelsnede S:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx = 0$$

dan wordt gemakkelijk voor de vergelijking van het oppervlak verkregen:

$$kxz^2(Ax^2 + By^2) + (x^2 + y^2)(x - a)(Ax^2 + By^2 + 2Cx) = 0$$

alwaar  $k$  de onderlinge verhouding aanwijst der vierkanten der assen van de bewegende kegelsnede.

Deze vergelijking is van den vijfden graad. Kiest men echter voor de kegelsnede  $S$  een cirkel

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

dan gaat zij over in de derdegraadsvergelijking:

$$kxz^2 + (x - a)(x^2 + y^2 - 2rx) = 0.$$

Voor GODEFROY zijn nu bijzonder belangrijk die oppervlakken, waarbij ook de beschrijvende kegelsneden door cirkels of desnoods door gelijkzijdige hyperbolen worden gevormd. Derhalve de gevallen  $k = 1$  en  $-1$ .

Laten wij er bijvoegen, dat de verkregen oppervlakken allen vier knooppunten bezitten en dus in het algemeen projectief zijn met SCHLÄFLI's „species XVI 1, 2 of 3", d. w. z. met de oppervlakken met vier reële, twee reële en twee imaginaire, of met vier imaginaire knooppunten. (*Phil. Trans.* 1863. Vol. 153, p. 193.)

Die knooppunten bestaan namelijk 1° uit de snijpunten der kegelsnede  $S$  met de rechte  $\alpha$ , 2° uit twee punten op de  $Z$ -as

op afstanden  $\sqrt{\frac{-2ar}{k}}$  aan weerskanten van het vlak van tee-

kening gelegen, welke laatste bijzonderheid gemakkelijk uit de beschouwing der doorsneden met vlakken  $y = mx$  af te leiden is, welke doorsneden allen door deze punten heengaan.

Het oppervlak met vier reële knooppunten kan overigens natuurlijk slechts met behulp van hyperbolen verkregen worden. Anders is het echter met de beide andere soorten van oppervlakken, SCHLÄFLI's XVI 2 en 3. Deze kunnen met behulp van cirkels alleen verkregen worden.

Voor hen vooral kan GODEFROY's ontstaanswijze inderdaad uit een constructief oogpunt als zeer eenvoudig en fraai worden aangemerkt en als bijzonder geschikt om, zelfs zonder model, eene duidelijke voorstelling omtrent hunne gedaante te geven.

Als overgangsgeval, wanneer de cirkel  $S$  de rechte  $\alpha$  raakt, treedt daarbij op SCHLÄFLI's XVIII, 2. GODEFROY's constructie uitsluitend met cirkels, welke een oppervlak levert, dat als projectieve afbeelding van alle overigen van deze soort dienst kan doen, is ook hier zeker niet minder fraai dan de door SCHLÄFLI aangegevene met parabool en bewegelijken cirkel. Gebruikt men daarentegen in dit overgangsgeval voor de bewegende krommen gelijkzijdige hyperbolen, dan zal SCHLÄFLI's XVIII, 1 ontstaan.

Hetzelfde oppervlak (XVIII, 2) verkrijgt men overigens door den cirkel  $S$  tot een enkel punt samen te trekken <sup>21)</sup>. Trouwens zulk eene dubbele ontstaanswijze uit cirkels is ook eigen aan het algemeene oppervlak in geval er van de knooppunten twee of vier onbestaanbaar zijn, zooals gemakkelijk is in te zien. Men beschouwe slechts de in het, op het vlak van teekening loodrechte, symmetrievlak gelegen cirkel als de vaste cirkel der nieuwe ontstaanswijze en de vroegere vaste cirkel als een der bewegelijke, waarbij dan de vroegere rechte  $\alpha$  thans als wentelingsas der bewegelijke cirkels dienst doet.

Een ander bijzonder geval doet zich voor als de lijn  $\alpha$  naar het oneindige gebracht wordt. De vergelijking van het oppervlak gaat dan over in:

$$kxz^2 + x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

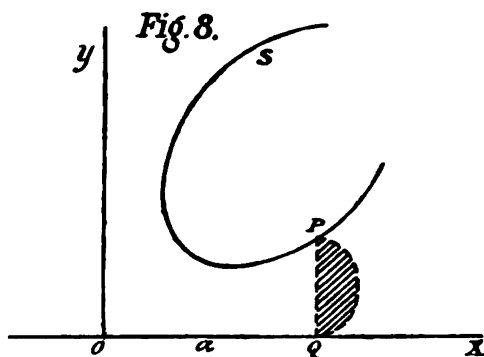
waarbij thans twee imaginaire knooppunten naar het oneindige zijn gegaan. De beide anderen kunnen reëel of imaginair zijn. De beschrijvende kegelsneden zijn daarbij parabolen geworden, wier toppen zich langs den cirkel bewegen, terwijl hunne parameters omgekeerd evenredig zijn met  $OP$  of, als men wil, recht evenredig met  $OQ$ , alwaar thans de door  $Q$  beschrevene rechte eene willekeurige lijn is, loodrecht op  $OX$ . Als zoodanig vindt men deze ontstaanswijze bij GODEFROY beschreven.

Is bovendien  $r = 0$ , dan treedt natuurlijk weder SCHLÄFLI's XVIII, 2 op.

---

<sup>21)</sup> De oppervlakken stemmen, namelijk, bij beide ontstaanswijzen overeen. Denkt men zich echter de cirkels gevuld, dan is het eene lichaam als het ware het negatief van het andere.

Wij gaan thans over tot GODEFROY's tweede ontstaanswijze.



Daarbij beschouwen wij (fig. 8) eene geheel willekeurige in het vlak van teekening gekozen kegelsnede:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$   
en eene rechte  $\alpha$  die wij tot X-as kiezen.

De onderling gelijkvormige kegelsneden kiezen wij thans in evenwijdige vlakken,

allen loodrecht op de X-as, terwijl hunne assen wederom bepaald worden door de snijpunten P en Q.

De algemeene vergelijking van het zoo ontstaande oppervlak luidt als volgt:

$$Ax^2y^2 + 2Bxy(y^2 + kz^2) + C(y^2 + kz^2)^2 + 2Dxy^2 + 2Ey(y^2 + kz^2) + Fy^2 = 0.$$

Een cubisch oppervlak ontstaat derhalve als  $C=0$  is, d. w. z. zoodra de Y-as evenwijdig loopt met eene der asymptotenrichtingen der kegelsnede S, of, indien deze eene parabool mocht voorstellen, met hare as.

Ook dit oppervlak vertoont weder vier knooppunten, die twee aan twee bestaanbaar of onbestaanbaar zijn, terwijl er ook twee samenvallen kunnen. Deze knooppunten zijn 1° de snijpunten der kegelsnede met de rechte  $\alpha$ , 2° de punten in het oneindige der beschrijvende kegelsneden.

In het bijzondere geval dat S eene parabool,  $\alpha$  de raaklijn in haar top voorstelt, verkrijgt men de zoo straks aangeduide constructie van SCHLÄFLI voor een oppervlak XVIII, 2.

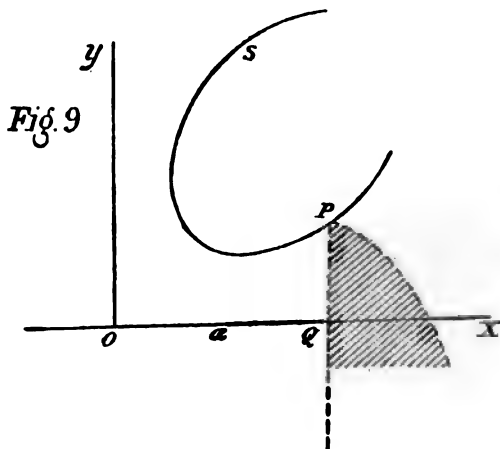
Uit een constructief oogpunt is het natuurlijk wenschelijk voor de bewegende kegelsneden cirkels te kiezen, voor de vaste kegelsnede S is dit echter niet mogelijk, daar zij bestaansbare asymptotenrichtingen bezitten moet.

Wordt de lijn  $\alpha$  naar het oneindige gebracht, dan gaan de beschrijvende lijnen weder over in parabolen, zooals in fig. 9 is aangewezen. Deze parabolen hebben thans echter een standvastigen parameter.



Voor de verg. van het oppervlak wordt daarbij weder gemakkelijk gevonden:

$Ax^2 + 2Bx(y + kz^2) + C(y + kz^2)^2 + 2Dx + 2E(y + kz^2) + F = 0$ ,  
wederom afdalende tot den derden graad voor het geval  $C = 0$ .



Deze bijzondere ontstaanswijze blijkt nu steeds te voeren tot SCHLÄFLI's „species XIX”, dat wil zeggen tot een oppervlak van de vierde klasse met een gewoon en een tweevlaks-knooppunt, beide echter in het oneindige gelegen<sup>22)</sup>. Dit oppervlak is trouwens asymptotisch projectief met dat met vier reële knooppunten. (Verg. *Nieuw Archief*, XX, 1892, p. 93—95).

<sup>22)</sup> Dit kan bijv. algebraïsch bewezen worden als volgt. Maken wij eerst de vergelijking homogeen, dan luidt zij:

$$A\omega^2\lambda + 2B\omega x\lambda + 2(B\omega + E\lambda)kx^2 + 2D\omega\lambda^2 + 2E\lambda^2 + F\lambda^3 = 0.$$

Door de lineaire substitutie  $Ax + 2By = \omega$  kan zij, na eliminatie van  $y$ , gebracht worden in den vorm:

$$B\omega\lambda + 2B(B\omega + E\lambda)kx^2 + (2BD - AE)\omega\lambda^2 + E\omega\lambda^2 + BF\lambda^3 = 0.$$

De nieuwe substitutie  $B\omega + E\lambda = v$  voert dan tot:

$$Bv\omega\lambda + 2B^2k\omega x^2 + (2BD - AE)v\lambda^2 + [B^2F + AE^2 - 2BED]\lambda^3 = 0$$

en eindelijk de substitutie  $B\omega + (2BD - AE)\lambda = w$  tot den door SCHLÄFLI p. 238 aangegeven vorm, nam. hier:

$$vw\lambda + 2B^2k\omega x^2 + [B^2F + AE^2 - 2BED]\lambda^3 = 0.$$

Kiest men nu het tetraëder  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\lambda = 0$  tot fundamentaaltetraëder, dan is het duidelijk, dat in het hoekpunt tegenover  $v = 0$  een gewoon, in dat tegenover  $w = 0$  een tweevlaks-knooppunt aanwezig is. Dewijl voor beide knooppunten echter  $\lambda = 0$  is, moeten zij beiden oorspronkelijk in het oneindige gelegen zijn geweest.

Drie dezer knooppunten zijn in het tweevlaksknooppunt samen-gefallen, zooals ook meetkundig gemakkelijk is in te zien, als men nagaat, wat er van de vier knooppunten van het algemeenere oppervlak geworden is.

Eindelijk beschouwen wij GODEFROY's *derde* ontstaanswijze. Deze kan uit de bij fig. 9 behoorende door de volgende wijzigingen worden afgeleid: *vooreerst* plaatse men den top der beschrijvende parabolen op de rechte OX, dus in Q in plaats van in P; *ten tweede* late men hun parameter veranderen evenredig met QP.

Voor de vergelijking van het oppervlak wordt dan verkregen:

$$Ax^2y^2 + 2Bkz^2y + Ck^2z^4 + 2Dxy^2 + 2Ekz^2y + Fy^2 = 0,$$

waaruit blijkt, dat voor  $C = 0$  weder een derdegraadsoppervlak ontstaat.

Dit oppervlak is steeds eene XVIII, 1 of 2. De snijpunten der kromme met OX leveren namelijk de beide gewone knooppunten, het aan alle bewegelijke parabolen gemeenschappelijke punt in het oneindige het tweevlakspunt.

Overigens wordt het verband van deze *derde* ontstaanswijze met de vorige het gemakkelijkst ingezien door de bewegelijke parabolen te veralgemeenen tot onderling gelijkvormige kegelsneden met één der toppen steeds in Q, een der assen langs PQ en de parameter  $p$  der topvergelijking evenredig met PQ.

In dit meer algemeene geval toch beschrijft de tweede top eene kegelsnede, zoodat de ontstaanswijze dan met de tweede van GODEFROY samenvalt.

Thans meer in bijzonderheden omtrent de aanteeckenboekjes tredende, vermelden wij nog slechts, dat in N°. 13 behalve vele voorbeelden der verschillende ontstaanswijzen, eene beschouwing over het kegelvlak  $z^2x = y^3$  te vinden is. N°. 14 behandelt daarentegen vooral de bijzondere gevallen aan het slot der eerste ontstaanswijze besproken. Bekende derdegraadskrommen worden als doorsneden verkregen.

Hoewel deze voordracht, blijkens *Nieuw Archief*, deel XI, p. 47 met vele teekeningen opgeluisterd werd, zijn de meesten van deze niet bewaard gebleven, maar waarschijnlijk vervangen

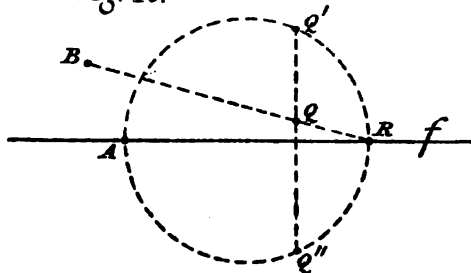
door de later bij N<sup>o</sup>. 21 te vermelden uitvoeriger teekeningen van cubische oppervlakken.

Slechts twee teekeningen gemerkt XIV<sup>a</sup> en XIV<sup>b</sup> willen wij hier aanvoeren. Zij stellen oppervlakken voor verkregen door de tweede ontstaanswijze met vaste parabool en bewegelijken cirkel en eenige hunner vlakke doorsneden.

N<sup>o</sup>. 15. *Voordracht van 21 Jan. 1885.* Constructiën van kegelvlakken en van wigvormige of scheeve oppervlakken, waarbij enkele van den derden graad, en over de kromme lijnen, die door de snijding met platte vlakken ontstaan. Door middel van kegeloppervlakken worden de cubische krommen met middelpunt afgeleid uit die met eene as van symmetrie. Door middel van conoidale oppervlakken worden cubische krommen uit kegelsneden verkregen.

N<sup>o</sup>. 16. *Voordracht van 16 Dec. 1885.* Doorsneden van de wig van Wallis met platte vlakken in het algemeen en in het bijzonder eenige, die door eene beschrijvende lijn van het oppervlak gaan. Deze laatste doorsneden zijn, daar de wig van WALLIS van den vierden graad is, natuurlijk cubische krommen van vele verschillende gedaanten. Vermelding verdient voorts eene transformatie (1, 2), in nevensgaande figuur afgebeeld, die als eene

Fig. 10.

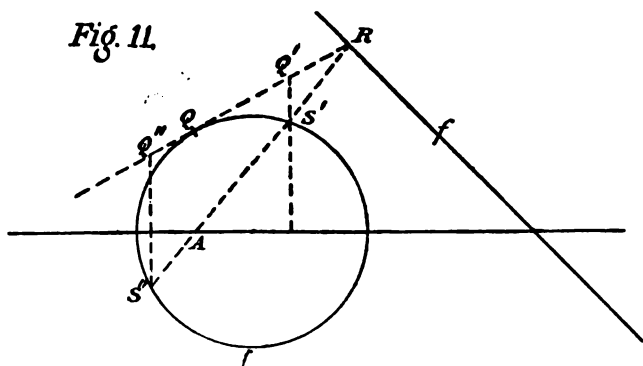


uitbreiding der bij N<sup>o</sup>. 8 besprokene kan worden beschouwd en waardoor op eenvoudige wijze uit gegeven rechte lijnen symmetrische derdegraadskrommen met een asymptoot op eindigen afstand verkregen worden.  $A$  en  $B$  zijn hier vaste punten,  $Q$  het te

transformeeren punt,  $f$  eene vaste lijn,  $AR$  de middellijn van een veranderlijken cirkel,  $Q'$  en  $Q''$  de uit  $Q$  ontstaande punten.

No. 17. *Voordracht van 16 Maart 1887.* Over conchoïden en de raaklijnen daaraan. Derdemachtslijnen en oppervlakken afgeleid uit kegelsneden. Transformatie door cirkels en bepaling der normaal uit de afgeleide. Eene door DE GELDER aangegevene transformatie van den cirkel wordt tot de MACLAURIN'sche teruggevoerd. Raaklijnconstructies aan de conchoïde en verwante krommen. Beschrijving eener nieuwe transformatie van die van fig. 10 daardoor verschillende dat 1° B naar het oneindige gaat, 2° R als middelpunt van den cirkel dienst doet, 3° de lijnen  $Q'Q''$  met de as  $f$  evenwijdig loopen. Derdegraadsoppervlakken voornamelijk volgens de tweede, bij N°. 13, 14 beschrevene, ontstaanswijze. Toepassing eener transformatie  $x' = x$ ;  $y' = \sqrt{xy}$ , afgeleid uit die van figuur 10, door B in het oneindige en  $\angle BRA = 45^\circ$  te nemen, welke transformatie dus geheel overeenstemt met de bij N°. 8 besprokene.

No. 18. *Voordracht van 14 Dec. 1887. Transformatiën van den cirkel in vijfde machtskrommen door raaklijnen. De grondslag van het onderzoek wordt gevormd door eene transformatie van den cirkel, die in de meest algemeene*



gedaante, waarin zij door GODEFROY is gebracht, door fig. 11 wordt voorgesteld. Q is hier het te transformeeren punt, QR eene raaklijn aan den cirkel, terwijl A een vast centrum,  $f$  eene vaste lijn is. De lijn AR bepaalt de punten S' en S'' en daarna de punten Q' en Q'', die voor Q in de plaats treden.

De door deze punten  $Q'$  en  $Q''$  beschrevene kromme is *in het algemeen* aan den achtsten graad, en bezit o.a. de eigenschap

van, waar zij den cirkel bereikt, dezen te raken, daarbij steeds blijvende aan hare buitenzijde.

Valt echter het vaste punt A op een der beide uiteinden van de middellijn van den cirkel, dan splitst zich de raaklijn in dit punt driemaal van de kromme af en daalt deze derhalve tot den vijfden graad.

Opmerkelijk is ook het geval, dat de vaste lijn  $f$  naar het oneindige is gegaan en het straalpunt A met het middelpunt van den cirkel samenvalt, dewijl in dat geval de kromme zich splitst in twee vierdegraadskrommen, waarvan de eene beschreven wordt door het punt Q', de andere door Q'', tusschen welke beide punten alsdan onderscheid kan worden gemaakt.

Voor deze laatste nu wederom unicursale vierdegraadskrommen, welke met zich zelve in het oneindige eene aanraking van de tweede orde hebben (zoodat dit aanrakingspunt voor drie dubbelpunten telt), wordt tevens eene hoogsteenvoudige raaklijn-constructie aangegeven. Men vindt hen afgebeeld op teekening XVIII<sup>a</sup> <sup>23)</sup>, waarop tevens twee achtstegegraadskrommen voorkomen, welke door excentrische plaatsing van het straalpunt A ontstaan; terwijl teekening XVIII<sup>b</sup> eenige der zooveen besproken vijfdegraadskrommen aangeeft. Voorts vindt men op XVIII<sup>c</sup> en XVIII<sup>d</sup> nog meerdere door deze zelfde transformatie ontstane krommen bij bijzondere plaatsingen van de vaste lijn  $f$ , op de teekeningen poollijn genoemd, en van het straalpunt A, welke plaatsingen ten deele, bijv. als de vaste lijn  $f$  eene raaklijn van den cirkel is, tot graadsverlaging voeren.

Enkele dier krommen kunnen met voordeel beschouwd worden als ontstaan door de ordinaten van eenvoudiger krommen te sommeeren. Dit geeft GODEFROY aanleiding op teekening XVIII<sup>a</sup> zulke som- en verschilkrommen voor de cissoïde, de strophoïde en de trisectrix met den cirkel, waaruit zij door de MACLAURIN'sche transformatie ontstaan zijn, af te beelden. (Zie in verband hiermede SCHOUTE, t. a. p. p. 31.)

Ten slotte wordt de transformatie ook op kegelsneden uitgebreid en worden enkele vijfdegraadsoppervlakken besproken, verkregen volgens de eerste der bij de voordracht van 21 Nov. 1883 aangegeven ontstaanswijzen, waarbij echter ook wel de

<sup>23)</sup> Deze en al de andere bij deze voordracht behoorende teekeningen vindt men op de achterzijde van bij de eerste voordracht gediend hebbende teekeningen.

in fig. 7 aangegeven bewegende onderling gelijkvormige kegelsneden door parabolen vervangen worden, wier parameters met PQ, en dus niet zooals daar met OQ, evenredig zijn. Deze ontstaanswijze levert namelijk vijfdegraadsoppervlakken als de kegelsnede S in een cirkel overgaat.

Nº. 19. *Voordracht van 17 April 1889.* De zoogenaamde derdemachtscirkel en de daarmede in verband staande derdemachtsoppervlakken. In deze voordracht worden drie verschillende constructies besproken van de kromme  $x^3 + y^3 = a^3$ , aan welke door E. DÜHRING den naam van derdemachtscirkel is gegeven. Elk van deze constructies kan worden opgevat als eene ruimteconstructie, opleverende de doorsnede van een plat vlak met een cubisch oppervlak. De eerste van deze voert tot het cubisch oppervlak  $z^3 = (a - x)(a^2 + ay + y^2)$  of, op andere assen,  $z^3 = -x(y^2 + \frac{4}{3}a^2)$ . Dit oppervlak is afgebeeld op teekening XIX<sup>A</sup>, waar ook nog eenige constructies van andere derdegraadskrommen, nam. van de cubische hyperbool  $xy^2 = a^3$  en de NEIL'sche parabool  $x^3 = ay^2$  aangegeven zijn. Als eene soort tegenstelling is daarenboven op teekening XIX<sup>B</sup> de constructie uitgevoerd van het oppervlak  $z^3 = x(a^2 - y^2)$ .

De tweede constructie voert tot de oppervlakken  $3yz^2 = (a^2 + ay + 3xy - 2y^2)(a - x)$  en  $3yz^2 = (a^2 + ay + 4y^2 - 3xy)(x - a)$ , welke beiden, volgens de tweede, bij Nº. 13 en 14 besprokene, ontstaanswijze, kunnen worden voortgebracht zooals men onmiddellijk inziet, indien men snijvlakken  $y = \text{constante}$  aanbrengt, welke cirkels opleveren, en daarna het symmetrievlak  $z = 0$  onderzoekt. Beide deze oppervlakken zijn afgebeeld op teekening XIX<sup>C</sup>.

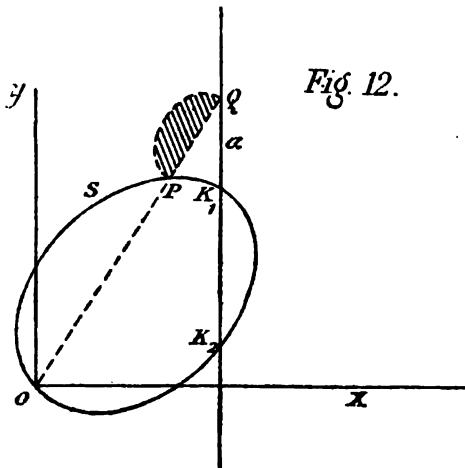
De derde constructie kunnen wij hier laten rusten. Daarentegen hebben wij nog te vermelden eene teekening XIX<sup>D</sup>, voorstellende het oppervlak  $z^3 = axy$ .

Nº. 20. *Voordracht van 30 Oct. 1889.* Over het verband tusschen den cirkel en de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool met dezelfde middellijn. Een vrij uitvoerig overzicht van deze voordracht vindt men in het *Nieuw Archief*, deel XVIII, p. 119—121.

Nº. 21. *Voordracht van 21 Maart 1891.* Over eene

bipodaire (of voetpuntskromme) van den zesden graad met 6 knooppunten, bepaling van de normaal. *Toevoegsels*: 1° Beknopt overzicht van eenige oppervlakken van den derden graad, 2° Transformatie van kromme lijnen door stralenbundels en bepaling der raaklijnen van ieder geconstrueerd punt.

Van de voordracht zelf is een overzicht verschenen in het *Nieuw Archief*, deel XVIII, p. 151–152.



Omtrent het eerste *toevoegsel* valt op te merken, dat GODEFROY hier behalve de bij N<sup>o</sup>. 13 en 14 besprokene ontstaanswijzen er nog eene meer algemeene behandelt, welke tot oppervlakken met twee knooppunten, dus in het algemeen tot SCHLÄFLI's „Species IV. 1, 2, 3, 4, 5, 6”, en als overgang, indien de twee knooppunten samenvallen, tot zijne „Species V. 1, 2, 3, 4” voert.

Ook bij deze meer algemeene ontstaanswijze zijn de beschrijvende lijnen onderling gelijkvormige kegelsneden, waarvoor dus cirkels of gelijkzijdige hyperbolen kunnen gekozen worden.

Zij kan uit de eerste bij N<sup>o</sup>. 13, 14 besprokene ontstaanswijze worden afgeleid door de aldaar optredende kegelsnede te vervangen door ééne, welke wel door O heengaat (zie fig. 12), maar overigens gansch willekeurig gekozen wordt.

Stelt men voor de vergelijking dier kegelsnede:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$

dan wordt voor de vergelijking van het oppervlak gevonden:

$$kxz^2 (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \\ + (x^2 + y^2) (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey) (x - a) = 0$$

derhalve in het algemeen een oppervlak van den vijfden graad. Neemt men evenwel voor de kegelsnede een cirkel:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$

dan ontstaat een cubisch oppervlak, dat tot vergelijking heeft:

$$kxz^2 + (x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey) (x - a) = 0.$$

Als dubbelpunten treden daarbij op de snijpunten  $K_1$  en  $K_2$  der lijn  $\alpha$  met den cirkel S.

Een drietal uitvoerige teekeningen kunnen als bij dit toevoegsel behoorende worden beschouwd. Op de eerste, gemerkt XXI<sup>a</sup>, vindt men een oppervlak met vier bestaانبare knooppunten afgebeeld, verkregen volgens de eerste bij N<sup>o</sup>. 13, 14 besproken ontstaanswijze. XXI<sup>b</sup> bevat een evenzoo verkregen oppervlak, waarbij echter twee der vier knooppunten tot een tweevlaks punt zijn samengevallen en tevens een ander oppervlak, verkregen door de zoo even beschrevene meer algemeene ontstaanswijze, met een voor twee knooppunten tellend tweevlaks punt. XXI<sup>c</sup> eindelijk vertoont een volgens deze algemeene ontstaanswijze verkregen oppervlak met twee reële knooppunten.

Het *tweede toevoegsel* behelst eene beknopte uiteenzetting der MACLAURIN'sche transformatie met enkele toepassingen.

N<sup>o</sup>. 22. *Voordrachten van 20 Jan. 1892 en 31 Maart 1894.* Over het afleiden van regelvlakken van den derden en vierden graad uit de transformatie van den cirkel. Een overzicht van den voornaamsten inhoud der eerste voordracht is te vinden in het *Nieuw Archief*, Deel XX, p. 108—111. Het laatste gedeelte van het boekje is met N<sup>o</sup>. 23 benuttigd bij de voordracht van 31 Maart 1894. Verder blijkt uit dit boekje en uit de teekeningen gemerkt XXII<sup>a</sup>, XXII<sup>b</sup> en XXII<sup>c</sup>, dat ook nog eenige zeer bijzondere transformaties besproken zijn. Op de *eerste* teekening wordt eene rechte in gelijkzijdige hyperbolen, op de *tweede* eene hyperbool in eene derdegraadskromme met dubbelpunt, op de *derde* een cirkel in vierdegraadskrommen met drievoudig punt omgezet.



N<sup>o</sup>. 23. *Voordracht van 31 Maart 1894. Algemeene afleiding van derdemachtsregelvlakken.* Deze voordracht is later omgewerkt tot eene vrij uitvoerige verhandeling, te vinden *Nieuw Archief*, Tweede reeks, Deel I, p. 137—162.

*D. Overzicht der overige handschriften en teekeningen van A. N. GODEFROY.*

Na onze uitvoerige bespreking der aanteekenboekjes en bijbehorende teekeningen, meenen wij omtrent het overblijvende kort te kunnen zijn. Het bestaat uit enkele teekeningen, waaronder die op de ovalen van DESCARTES, de cycliden en de lemniscaat betrekking hebben, die wij niet aan eene bepaalde voordracht hebben kunnen aansluiten, maar waarvan wij evenwel eene nadere beschrijving achterwege meenen te mogen laten; uit een zeker aantal manuscripten over onderwerpen van elementaire aard, oplossingen van vraagstukken enz., welke wij niet meenen te moeten begrijpen onder de „opstellen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken”, waarvan in GODEFROY's testament sprake is, en voorts uit de volgende stukken, welke wel daarop betrekking hebben en daarom met een enkel woord behooren te worden vermeld.

1°. De korte verslagen der voordrachten van 5 Nov. en 24 Dec. 1873 en van 28 Januari 1874, waarvan reeds vroeger melding is gemaakt. (Zie A, B en bij C N<sup>o</sup>. 1.)

2°. Een daaraan aansluitend opstel, gedateerd 25 Januarij 1875 en getiteld: „Bepaling der kegelsneden door stelsels snijlijnen en raaklijnen, en vervorming van figuren in het algemeen.”

3°. Twee dito met soortgelijken titel, ongedateerd.

4°. Een dito „Vervorming van kromme lijnen door stralenbundels en bepaling der raaklijn” van 2 Febr. 1879.

5°. Een uitvoerig stuk, gedateerd 1884, handelende over de MACLAURIN'sche transformatie, de transformatie één op twee, in de voordracht van 26 Febr. 1881 (zie bij C N<sup>o</sup>. 8) besproken en de ontstaanswijzen der derdegraadsvlakken.

6°. Een opstel van vijftig bladzijden met sierlijke teekeningen voorzien, gedateerd 10 Oct. 1890 en getiteld: Transformatie van kegelsneden tot kromme lijnen van hoogere orden

volgens MACLAURIN, en bepaling der raaklijn in eenig getransformeed punt der kromme.

Deze manuscripten, welke allen in hoofdzaak op de transformatie van kromme lijnen betrekking hebben, zijn in eene *eerste* portefeuille bijeengebracht.

Eene *tweede* portefeuille bevat opstellen over 3<sup>e</sup> graadsopervlakken, waaronder zeer uitvoerige met vele teekeningen voorzien. Zij zijn gedateerd van 1884—1894. In hoofdzaak worden de bij de aanteeckenboekjes besprokene denkbeelden hier nader uitgewerkt.

---

DE PRIJSVRAAG VAN GODEFROY,

DOOR

P. H. SCHOUTE.

(Groningen.)

---

In verband met de vorige verhandeling van Dr. D. J. KORTEWEG laten we hier onveranderd een in October 1884 opgestelde oplossing van de prijsvraag

„eene kromme lijn, waarvan de kromtestraal bekend is, wordt „vervormd door stralenbundels door drie vaste punten en eene „vaste lijn; men vraagt den kromtestraal van de vervormde „kromme te vinden door constructie”

van GODEFROY volgen; ze sluit zich aan bij mijn in KORTEWEG's studie aangehaald opstel.

1. Daar de in het vraagstuk aangewezen MACLAURIN'sche transformatie een zich tot de constructie van kromme lijnen uitstekend leenend bijzonder geval van de algemeene kwadratische overeenkomst tusschen twee vlakke stelsels  $\Sigma$  en  $\Sigma'$  is, behandelen we het vraagstuk eerst met betrekking tot dit algemeene geval der geheel willekeurig aangenomene kwadratische verwantschap. Wijl in het algemeen met twee elkaar osculeerende krommen van  $\Sigma$  twee elkaar eveneens osculeerende krommen van  $\Sigma'$  overeenstemmen en de bepaling van punten en raaklijnen der kromme van  $\Sigma'$ , die met een gegeven kromme van  $\Sigma$  overeenkomt, in de aangehaalde verhandeling geheel is uitgewerkt, kunnen we hierbij echter geheel volstaan met de eenvoudige onderstelling, dat de bedoelde kromme van  $\Sigma$ , waarvan in elk willekeurig punt P de kromtestraal bekend is, door haren kromtecirkel in dit punt is vervangen. Waardoor de oplossing van het tot het geval der algemeene kwadratische verwantschap in betrekking staande vraagstuk zich herleidt tot

de bepaling van den kromtestraal der kromme van  $\Sigma'$ , die met een gegeven cirkel van  $\Sigma$  overeenstemt, en wel meer bepaald van den kromtestraal dier kromme in het punt  $P'$ , dat met een gegeven punt  $P$  van den cirkel overeenkomt.

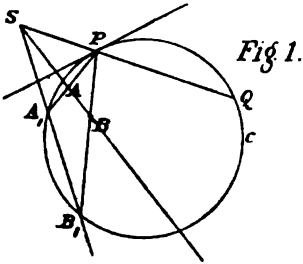
Zijn nu  $A, B, C$  de fundamentealpunten van het vlakke stelsel  $\Sigma$  des gegeven cirkels en  $A', B', C'$  de overeenkomstige fundamentealpunten van het met  $\Sigma$  kwadratisch verwante vlakke stelsel  $\Sigma'$  der vervormde kromme, dan leidt de opmerking, dat met een kegelsnee  $K$  door twee der drie punten  $A, B, C$  van  $\Sigma$  een kegelsnee  $K'$  door de twee overeenkomstige fundamentealpunten van  $\Sigma'$  overeenkomt, spoedig tot de verlangde oplossing. Want, neemt men voor  $K$  de kegelsnee door  $A$  en  $B$ , die de gegeven cirkel in  $P$  osculeert, dan zal  $K'$  de kegelsnee door  $A'$  en  $B'$  zijn, die in het overeenkomstige punt  $P'$  drie op elkaar volgende punten met de vervormde kromme gemeen heeft, en de kromtestraal van  $K'$  in  $P'$  dus de verlangde kromtestraal der vervormde kromme wezen. Wjl het construeeren van punten en raaklijnen der vervormde kromme hier als bekend wordt aangenomen, splitst bovenstaande beschouwing de oplossing van het gegeven vraagstuk in twee deelen. Wil men namelijk den overgang van de kegelsnee  $K$ , die door de punten  $A, B, P$  gaat en in  $P$  een gegeven cirkel tot kromtecirkel heeft, tot de kegelsnee  $K'$  mogelijk maken, dan moet men in de eerste plaats van  $K$  nog een nieuw punt  $Q$  bepalen. Want dan kan men  $K$  door de punten  $A, B, P, Q$  en de raaklijn  $p$  in  $P$  bepaald denken, waardoor het overgaan tot  $K'$ , van den kromtestraal van  $K$  in  $P$  onafhankelijk gemaakt, zoo eenvoudig mogelijk geworden is. En heeft men daarop van  $K'$  als bepalende grootheden de punten  $A', B', P', Q'$  en de raaklijn  $p'$  in  $P'$  bijeengezocht, dan moet in de tweede plaats van deze kegelsnee  $K'$  de kromtestraal in het punt  $P'$  geconstrueerd worden.

2. Wanneer twee collineaire vlakke stelsels  $\Sigma$  en  $\Sigma'$  in een zelfde vlak een perspectivische ligging hebben met het punt  $L$  tot centrum en de lijn  $l$  tot as van collineatie, dan komt met een kegelsnee  $K$  van  $\Sigma$ , die door  $L$  gaat en  $l$  in de punten  $M$  en  $N$  snijdt, een kegelsnee  $K'$  van  $\Sigma'$  overeen, die in  $L$  de aangenomen kegelsnee aanraakt en door  $M$  en  $N$  gaat. En ligt het centrum van collineatie  $L$  op de collineatieas, dan

zullen  $K'$  en  $K$  elkaar in  $L$  driepuntig aanraken en verder op  $l$  nog een ander punt gemeen hebben <sup>1)</sup>).

Deze stelling geeft ons onmiddellijk een oplossing van de beide werkatukken aan de hand, waarin het vraagstuk zich heeft gesplitst.

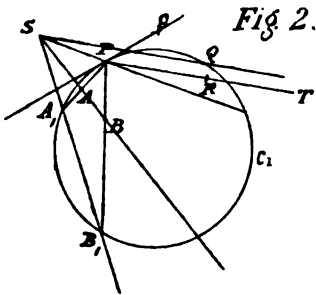
*Eerste gedeelte.* „Van een kegelsnee  $K$  door  $A$ ,  $B$  en  $P$  is de kromtecirkel  $c$  in  $P$  gegeven; het vierde snijpunt  $Q$  van dien cirkel met  $K$  te construeeren.”



*Oplossing.* Men verbindt  $A$  en  $B$  (fig. 1) met  $P$  en zoekt van de verbindingslijnen  $AP$  en  $BP$  de tweede snijpunten  $A_1$  en  $B_1$  met den gegeven kromtecirkel  $c$ . Bepaalt men daarna het snijpunt  $S$  van de lijnen  $A_1B_1$  en  $AB$ , dan zal  $PS$  den cirkel  $c$  in het verlangde punt  $Q$  snijden. De verklaring hiervan is onmiddellijk gegeven, wanneer men de kegelsnee  $K$  en den

cirkel  $c$  als perspectivisch collineair verwante krommen beschouwt met  $P$  als centrum en  $PS$  als as van collineatie.

*Tweede gedeelte.* „Van een kegelsnee  $K$  door  $A$ ,  $B$ ,  $P$ ,  $Q$  is de raaklijn  $p$  in  $P$  gegeven; den kromtestraal van  $K$  in  $P$  te construeeren <sup>2)</sup>.



*Oplossing.* Men verbindt  $A$  en  $B$  met  $P$  (fig. 2) en zoekt de snijpunten  $A_1$  en  $B_1$  van de verbindingslijnen  $AP$  en  $BP$  met den cirkel  $c_1$  door  $P$  en  $Q$ , die in  $P$  de lijn  $p$  aanraakt. Is nu  $S$  weer het snijpunt van  $AB$  met  $A_1B_1$  en  $PT$  de lijn uit  $P$  evenwijdig aan  $QS$  getrokken, dan zal het tweede snijpunt  $R$  van  $PT$  met  $K$  — en dit punt kan met behulp van de stelling

van PASCAL gevonden worden — een punt zijn van den verlangden kromtecirkel, enz.

<sup>1)</sup> Men raadplege *Die Geometrie der Lage* von TH. REYE, 2<sup>e</sup> Abtheilung, 3<sup>ter</sup> Vortrag en *Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie* u. s. w. von H. SIEGEL, Seite 145.

<sup>2)</sup> Ik laat hier de accenten weg.

Een tweede oplossing van elk der beide deelen van ons werkstuk vloeit onmiddellijk voort uit de sierlijke constructie van den kromtestraal der kegelsneden, die door P. SERRET in zijn *Géométrie de direction* <sup>1)</sup> gegeven is. Daarbij leert het eerste gedeelte ons vinden niet juist het nog onbekende vierde snijpunt Q van K met  $c$ , maar het tweede snijpunt van een willekeurige lijn door P met K. De volledige uitwerking dezer constructie mag aan den lezer worden overgelaten.

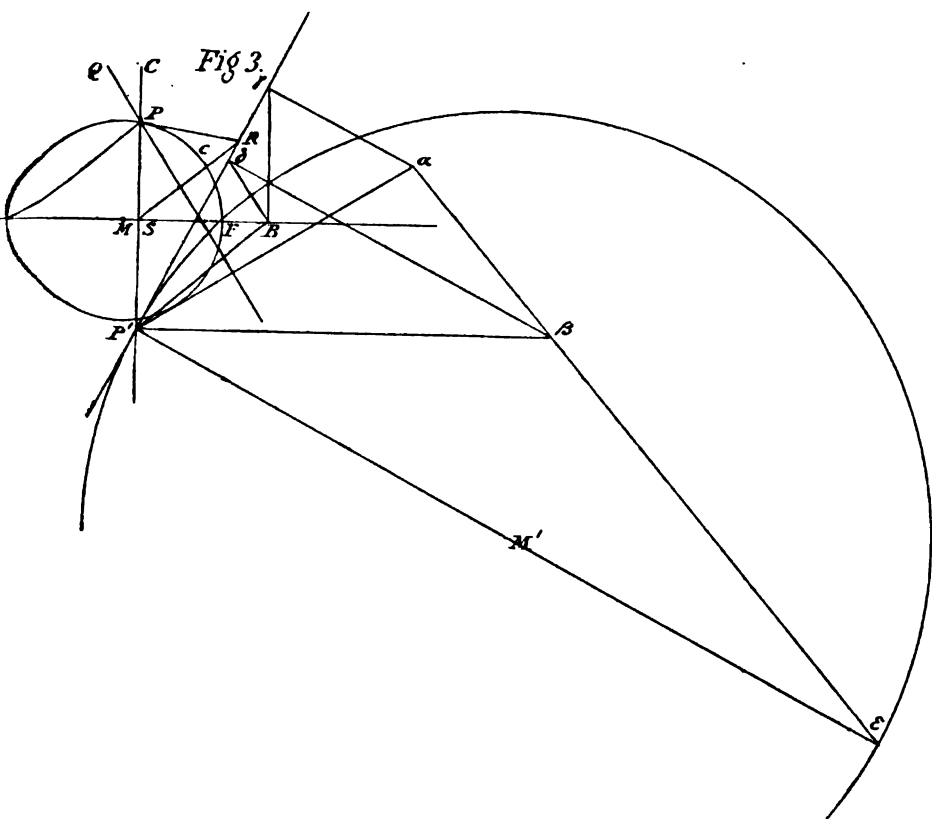
3. Gaan we thans tot de bijzondere gevallen der algemeene kwadratische overeenkomst en dan wel in de eerste plaats tot de in het vraagstuk bedoelde MACLAURIN'sche transformatie over, dan gebruiken wij deze toepassing tot het doen kennen van een constructie voor den kromtestraal der eenvoudigste krommen, die men door middel van de MACLAURIN'sche transformatie uit den cirkel afleidt, *cissoïde*, *strophoïde* en *conchoïde*.

Is van de drie „straalpunten” A, B, C (fig. 3) het punt A op den cirkel  $c$ , dien men vervormt, B ergens op de door A gaande middellijn van dien cirkel en C in het oneindige in de richting loodrecht op die middellijn gelegen en is de „richtlijn” tevens in het oneindige verdwenen, dan is de vervormde kromme een *cissoïde*, als B met het diametraal tegenover A gelegen punt F, en een *strophoïde*, als B met het middelpunt M des cirkels samenvalt. Met het willekeurig gekozen punt P van  $c$  komt volgens den aard der transformatie het punt P' overeen, terwijl de raaklijn in P' aan de vervormde kromme de verbindingslijn is van het punt P' met het snijpunt R van de raaklijn in P aan  $c$  en de lijn uit S evenwijdig aan AP getrokken <sup>2)</sup>. Beschouwen we nu de kegelsnee K, die door A, C en P gaat en in P den cirkel  $c$  tot kromtecirkel heeft, dan is het duidelijk, dat we niet behoeven te zoeken naar het vierde snijpunt van de elkaar in P driepuntig aanrakende krommen K en  $c$ , want dit vierde punt is A. Maar in verband met de bekende stelling, die zegt dat twee gemeenschappelijke koorden van een kegelsnee en een cirkel ten opzichte van de assen van die kegelsnee antiparallel zijn met elkaar en dit zelfde klaarblijkelijk van de asymptoten der kegelsnee beweerd kan

<sup>1)</sup> t. a. p., blz. 479.

<sup>2)</sup> Men vergelijkte mijn aangehaalde verhandeling.

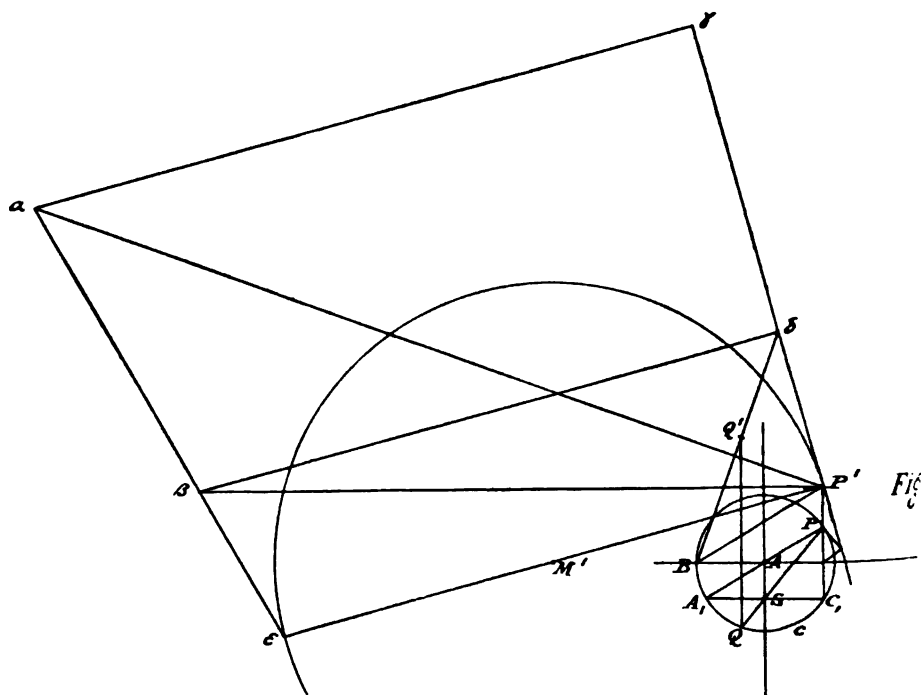
worden, moet het oneindig ver gelegen punt  $Q$ , waarvoor de hoeken  $APQ$  en  $CPR$  aan elkaar gelijk zijn, het tweede oneindig ver verwijderde punt van de hyperbool  $K$  zijn. En daar de punten van de richtlijn der transformatie met zich zelf overeenstemmen, is dit ook met het punt  $Q$  het geval, zoodat de kegelsnee  $K'$  door de punten  $B, C, P', Q$  en de raaklijn  $p'$  in



$P'$  bepaald wordt. Van deze kegelsnee  $K'$  is nu de bepaling van den kromtestraal in  $P'$  geheel naar de door SERRET gevonden constructie uitgevoerd.

Nemen we verder aan, dat het straalpunt  $A$  het middelpunt is van den te vervormen cirkel (fig. 4), dat  $B$  ergens op die kromme ligt en dat  $C$  in de richting loodrecht op  $AB$  op de oneindig ver gelegen richtlijn ligt, dan is de vervormde kromme een conchoïde. Beschouwen we nu de kegelsnee  $K$ , die door

**A en C** gaat en den gegeven cirkel  $c$  in  $P$  driepuntig aanraakt, als perspectivisch collineair verwant met  $c$ , dan moet  $P$  het collineatiecentrum en tevens een punt der as van collineatie zijn; daarbij zijn dan  $A_1$  en  $C_1$  de met  $A$  en  $C$  overeenkomende punten van  $c$ , is dus het snijpunt  $S$  van  $A_1C_1$  met  $AC$  een tweede punt der collineatieas en  $Q$  het vierde punt, dat



K en  $c$  gemeen hebben. Dus wordt de kegelsnee  $K'$  bepaald door de punten  $B, C, P', Q'$  en de raaklijn  $p'$  in  $P'$  en de kromtestraal dier kromme in  $P'$  als boven gevonden.

4. De constructies van den kromtestraal der cissoïde, strophoïde en conchoïde, die we juist ontwikkeld hebben, kunnen nog niet op eenvoudigheid bogen. Waarschijnlijk zijn er dan ook uit cinematische beschouwingen of uit analytische ontwikkelingen wel eenvoudiger constructies af te leiden. Hier echter mag het opsporen dier meer eenvoudige constructies als buiten het kader van de vraag beschouwd en daarom achterwege ge-





raaklijn in P bepaald door P in Q op CD te projecteeren,  $RC = CQ$  te nemen en R met P te verbinden. Daarna is het brandpunt F der parabool bepaald als het snijpunt van de middelloodlijn van het segment PR met de as en vervolgens de richtlijn GH. Is nu H het punt, waar de normaal der parabool de richtlijn snijdt en  $PM = 2HP$  genomen, dan is M het krommingsmiddelpunt der parabool in P<sup>1)</sup>. En wanneer verder  $\angle CPS = \angle RPC$  gemaakt en in P een loodlijn op PS opgericht wordt, dan is het snijpunt M<sub>1</sub> van die loodlijn PM<sub>1</sub> met MC het verlangde krommingsmiddelpunt. Aan den lezer te onderzoeken, of deze constructie, ontdaan van alles wat tot de uitlegging dienst deed, korter of langer is dan die van fig. 3, waarbij dan natuurlijk het verschil, dat er in de beide gevallen met betrekking tot de wijze van bepaling der cissoïde voorkomt, in rekening moet worden gebracht.

Groningen, 6 October, 1884.

---

<sup>1)</sup> *Jacob Steiner's gesammelte Werke*", zweiter Band, Seite 342.

SUR LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DE DEUX ÉQUATIONS  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR

W. KAPTEYN.

(Utrecht.)

Soit  $\lambda$  une fonction des trois variables indépendantes  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; nous nous proposons de déterminer la solution la plus générale des deux équations différentielles

$$2\lambda \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial z} + a^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right) + 2\lambda^3 \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + 2b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right) =$$

$$= 3 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + a \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 + \lambda^2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + b \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2,$$

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial z} + ab \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \right) = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + a \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + b \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right),$$

où  $a$  et  $b$  représentent des constantes.

En posant

$$H(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + a \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad G(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + b \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

les deux équations différentielles prendront la forme

$$2\lambda H H(\lambda) + 2\lambda^3 G G(\lambda) = 3H^2(\lambda) + \lambda^2 G^2(\lambda),$$

$$\lambda G H(\lambda) = \lambda H G(\lambda) = G(\lambda) H(\lambda),$$

ou

$$(1) \dots 2H \frac{H(\lambda)}{\lambda} - \frac{H^2(\lambda)}{\lambda^2} + \lambda^2 \left\{ 2G \frac{G(\lambda)}{\lambda} + \frac{G^2(\lambda)}{\lambda^2} \right\} = 0,$$

$$(2) \dots \dots \dots G \frac{H(\lambda)}{\lambda} = H \frac{G(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

De la dernière équation on déduit

$$\frac{G(\lambda)}{\lambda} = f_1(z - ax, y), \quad \frac{H(\lambda)}{\lambda} = f_2(z - by, x),$$

où  $f_1$  et  $f_2$  représentent des fonctions arbitraires.

En introduisant ces valeurs dans la première équation on aura

$$\lambda = \frac{T(z - ax, y)}{N(z - by, x)},$$

T et N étant des fonctions quelconques, que nous allons déterminer à présent.

Remarquons, pour y arriver, qu'on aura

$$H(T) = 0, \quad G(N) = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= -\lambda \frac{H(N)}{N}, \quad G(\lambda) = \lambda \frac{G(T)}{T}, \\ 2H \frac{H(\lambda)}{\lambda} - \frac{H^2(\lambda)}{\lambda^2} &= -\frac{2NHH(N) - H^2(N)}{N^2}, \\ 2G \frac{G(\lambda)}{\lambda} + \frac{G^2(\lambda)}{\lambda^2} &= \frac{2TGG(T) - G^2(T)}{T^2}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (1) on obtient

$$(3) \dots\dots 2TGG(T) - G^2(T) = 2NHH(N) - H^2(N),$$

dont le premier membre est une fonction de  $z - ax = u$  et de  $y$ , tandis que le second membre est une fonction de  $z - by = v$  et de  $x$ . Opérons maintenant sur cette équation d'abord avec l'opérateur G, ensuite avec H; alors on trouve respectivement

$$(4) \dots\dots\dots GGG(T) = 0,$$

$$(5) \dots\dots\dots HHH(N) = 0,$$

dont l'intégration ne présente aucune difficulté.

En effet, en écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial z}\right) GG(T) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial u}\right) GG(T) = 0$$

on voit aisément que l'intégrale générale prend la forme

$$GG(T) = 2b^2\phi(z - ax - by) = 2b^2\phi,$$

$\phi$  étant une fonction arbitraire. Cette équation étant équivalente à

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial u}\right) G(T) = 2b^2\phi$$

donne ensuite

$$G(T) = 2bu\phi + 2b\psi,$$

où  $\psi$  représente une nouvelle fonction de  $z - ax - by$ .

En traitant de la même manière cette dernière équation on obtient

$$T = u^2\phi + 2u\psi + \chi,$$

$\chi$  étant encore une fonction arbitraire de  $z - ax - by$ .

Il est bien évident que la solution la plus générale de l'équation différentielle (5) se réduira à

$$N = v^2\phi_1 + 2v\psi_1 + \chi_1$$

$\phi_1$ ,  $\psi_1$  et  $\chi_1$  représentant encore trois fonctions arbitraires de  $z - ax - by$ .

L'introduction des valeurs obtenues pour  $T$  et  $N$  dans l'équation (3) fait voir que les six fonctions arbitraires doivent satisfaire à la seule relation

$$(6) \dots\dots\dots b^2(\psi^2 - \phi\chi) = a^2(\psi_1^2 - \phi_1\chi_1).$$

La solution la plus générale des deux équations différentielles s'écrit donc

$$\lambda = \frac{u^2\phi + 2u\psi + \chi}{v^2\phi_1 + 2v\psi_1 + \chi_1},$$

où les fonctions arbitraires de  $z - ax - by$  sont liées par la relation (6).

# EEN VRAAGSTUK DER DYNAMICA

DOOR

A. J. SWART.

(Zutphen.)

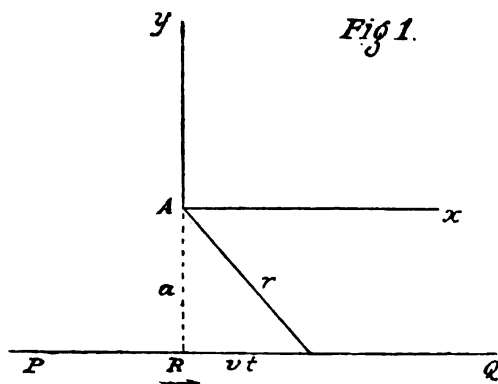
Een stoffelijk punt (massa  $M$ ) kan om zijn evenwichtsstand  $A$  kleine elastische trillingen uitvoeren (trillingstijd  $\frac{2\pi}{n}$ ). Langs eene rechte lijn  $PQ$  beweegt zich met standvastige snelheid  $v$ , komende uit het oneindige, een ander punt, dat op  $M$  eene kracht uitoefent, welke eene functie is van den afstand.

De afstand van  $A$  tot  $PQ$  is  $a$ . De uitwijkingen van  $M$  uit den evenwichtsstand zijn klein ten opzichte van  $a$ .

Welke is de trillende beweging van  $M$ , als het aantrekkende punt in het oneindige verdwenen is?

Voor welke waarde van  $v$  zal de trillingsenergie, welke  $M$  ten slotte verkrijgt, eene maximale (of minimale) waarde hebben?

I. Het punt  $M$  is oorspronkelijk in rust.



't Is a priori duidelijk, dat voor eene bepaalde waarde van

$v$  de trillingsenergie maximaal moet worden, want zoowel voor  $v = 0$  als voor  $v = \infty$  is zij nul.

Wij nemen A als oorsprong en de  $x$ -as evenwijdig aan PQ.

Als  $t = 0$  is, bevindt zich het aantrekkende punt in R.

De bewegingsvergelijkingen luiden

$$M\ddot{x} + Kx = MX \quad \text{en} \quad M\ddot{y} + Ky = MY,$$

waarin

$$X = \frac{vt}{r} F(r), \quad Y = -\frac{a}{r} F(r), \quad r = (a^2 + v^2 t^2)^{1/2}.$$

Wij stellen verder  $\frac{K}{M} = n^2$ .

De algemeene oplossing van deze vergelijkingen luidt

$$(1) \dots \begin{cases} x = A \sin(nt + \alpha) + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t X_r \sin n(t - \tau) d\tau, \\ y = B \sin(nt + \beta) + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t Y_r \sin n(t - \tau) d\tau. \end{cases}$$

Daar het punt oorspronkelijk in rust is, zoo is  $A = B = 0$ . Derhalve is

$$x = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t X_r \sin n(t - \tau) d\tau \quad \text{en} \quad y = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t Y_r \sin n(t - \tau) d\tau.$$

Voor groote waarden van  $t$  kunnen we de elementen voor  $t = r$  en  $t = -r$  samenvoegen, waarbij  $X_{-r} = -X_r$  en  $Y_{-r} = Y_r$  is.

Wij vinden

$$x = -\frac{2}{n} \cos nt \int_0^\infty X \sin ntdt \quad \text{en} \quad y = \frac{2}{n} \sin nt \int_0^\infty Y \cos ntdt.$$

Tusschen deze beide integralen bestaat de volgende betrekking

$$\begin{aligned} \int_0^\infty X \sin ntdt &= -\frac{v}{a} \int_0^\infty Y t \sin ntdt = \\ &= \frac{v}{na} \left[ Y t \cos nt \right]_0^\infty - \frac{v}{na} \int_0^\infty \left( Y + t \frac{\partial Y}{\partial t} \right) \cos ntdt. \end{aligned}$$

De geïntegreerde term is nul en daar  $t \frac{\partial Y}{\partial t} = v \frac{\partial Y}{\partial v}$  is, wordt

$$\int_0^\infty X \sin ntdt = -\frac{v}{na} \int_0^\infty Y \cos ntdt - \frac{v^2}{na} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty Y \cos ntdt.$$

Wij stellen

$$\int_0^\infty Y \cos ntdt = aU.$$

De baan, welke ten slotte door het deeltje wordt gevolgd, wordt dus bepaald door

$$(2) \dots x = \frac{2v}{n^2} \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right) \cos nt \text{ en } y = \frac{2a}{n} U \sin nt.$$

Noemen wij de energie, welke het deeltje verkrijgt, E, dan is

$$(3) \dots E = \frac{2M}{n^2} \left\{ v^2 \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + n^2 a^2 U^2 \right\}.$$

De waarde van  $v$ , waarvoor E, bij gegeven waarden van  $a$  en  $n$ , hare maximale waarde bereikt, wordt bepaald door de vergelijking

$$(4) v \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right) \left( U + 3v \frac{\partial U}{\partial v} \right) + v^3 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right) + n^2 a^2 U \frac{\partial U}{\partial v} = 0.$$

De door ons ingevoerde functie U voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(5) \dots U + v \frac{\partial U}{\partial v} + n \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

waaruit volgt

$$vU = f(nU).$$

Overigens kunnen wij omtrent deze functie geene nadere bijzonderheden mededeelen, tenzij de krachtenwet gegeven is.



Stellen wij  $F(r) = \frac{\alpha}{r^{m-1}}$ ,

dan is  $U = -\alpha \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^m} dt$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial a} = m\alpha \int_0^\infty \frac{a \cos nt}{r^{m+2}} dt,$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = m\alpha \int_0^\infty \frac{vt^2 \cos nt}{r^{m+2}} dt,$$

waaruit volgt

(6) . . . . .  $a \frac{\partial U}{\partial a} + v \frac{\partial U}{\partial v} + mU = 0.$

In verband met (5) leiden wij hieruit af

(7) . . . . .  $a \frac{\partial U}{\partial a} - n \frac{\partial U}{\partial n} + (m-1)U = 0.$

Verder is

$$U = -\alpha \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^m} dt = \left[ -\frac{\alpha}{n} \frac{\sin nt}{r^m} \right]_0^\infty - \frac{\alpha m v^2}{n} \int_0^\infty \frac{t \sin nt}{r^{m+2}} dt.$$

De geïntegreerde term is nul; dus is

$$U = \left[ \frac{\alpha m v^2 t \cos nt}{n^2 r^{m+2}} \right]_0^\infty - \frac{\alpha m v^2}{n^2} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}} dt + \frac{\alpha m(m+2)v^4}{n^2} \int_0^\infty \frac{t^2 \cos nt}{r^{m+2}} dt.$$

De geïntegreerde term is nul en derhalve

$$U = \frac{\alpha m(m+1)v^2}{n^2} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}} dt - \frac{\alpha m(m+2)a^2 v^2}{n^2} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+4}} dt,$$

of, daar

$$\alpha \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+2}} dt = \frac{1}{ma} \frac{\partial U}{\partial a}$$

en

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^\infty \frac{\cos nt}{r^{m+4}} dt &= -\frac{1}{m(m+2)a} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial a} \right) = \\ &= \frac{1}{m(m+2)a^2} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1}{m(m+2)a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \end{aligned}$$

is, zoo krijgen wij de volgende vergelijking

$$(8) \dots\dots\dots a \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + m \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{n^2}{v^2} a U = 0.$$

Wij differentieeren (6) naar  $a$  en naar  $v$  en vinden

$$(m+1) \frac{\partial U}{\partial a} + a \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + v \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v} = 0,$$

$$(m+1) \frac{\partial U}{\partial v} + v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v} = 0.$$

Door eliminatie van  $\frac{\partial U}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}$  en  $\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial v}$  uit (6), (8) en deze vergelijkingen vinden we de vergelijking

$$(9) \dots\dots \left(m - \frac{n^2 a^2}{v^2}\right) U + (m+2)v \frac{\partial U}{\partial v} + v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0.$$

Lossen wij hieruit  $\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}$  op en substitueeren we deze waarde in (4), dan wordt de voorwaarde voor maximum-energie

$$(10) \dots\dots U^2 + 2vU \frac{\partial U}{\partial v} = (m-1) \frac{v^2}{n^2 a^2} \left(U + v \frac{\partial U}{\partial v}\right)^2.$$

Wanneer het eerste lid nog den term  $v^2 \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$  bevatte, dan zouden wij door  $\left(U + v \frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$  kunnen deelen. Nu is het te verwachten, dat de beide deelen, waaruit de energie bestaat (zie (3)), nagenoeg voor dezelfde waarde van  $v$  hun maximum zullen bereiken, waaruit volgt, dat voor deze waarde van  $v$  de term  $v^2 \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2$  klein zal zijn ten opzichte van  $U^2$ .

Als benaderde waarde van  $v$ , waarvoor  $E$  hare maximale waarde bereikt, vinden wij dus:

$$(11) \dots\dots\dots v_{\max.} = \frac{na}{\sqrt{m-1}}.$$

Het zal in de onderzochte gevallen blijken, dat deze benadering eene zeer goede is.

Stellen wij  $v_{\max.} = Kna$ , dan is

$$U = -a \int_0^{\infty} \frac{\cos ntdt}{(a^2 + K^2 n^2 a^2 t^2)^{\frac{m}{2}}} = -\frac{\alpha}{a^m n} \int_0^{\infty} \frac{\cos zdz}{(1 + K^2 z^2)^{\frac{m}{2}}} = -\frac{\alpha}{a^m n} f_1(m),$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = m\alpha \int_0^{\infty} \frac{Kna t^2 \cos ntdt}{(a^2 + K^2 n^2 a^2 t^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{m\alpha K}{a^{m+1} n^2} \int_0^{\infty} \frac{z^2 \cos zdz}{(1 + K^2 z^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{m\alpha K}{a^{m+1} n^2} f_2(m).$$

Substitueeren wij deze waarden in (3), dan vinden wij

$$E_{\max.} = \frac{f_3(m)}{n^2 a^{2m-2}}.$$

Derhalve: Is de kracht welke op het deeltje werkt  $\frac{\alpha}{r^{m-1}}$ , dan is de maximale energie, welke het deeltje kan verkrijgen, omgekeerd evenredig met  $n^2$  en met  $a^{2m-2}$ .

Door substitutie van (11) in (3) vinden wij als benaderingswaarde voor de maximale energie

$$(12) \quad E_{\max.} = \frac{2Ma^2}{m-1} \left( mU^2 + 2 \frac{na}{V(m-1)} U \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{n^2 a^2}{m-1} \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 \right).$$

$$\underline{m-1=1.}$$

Als men voor eene waarde van  $m$  de waarde van  $U$  heeft berekend, kent men ze ook voor  $m+2$ ,  $m+4$  enz., want

$$(13) \quad \dots \dots \dots U_{m+2} = -\frac{1}{ma} \frac{\partial U_m}{\partial a}.$$

Wij kunnen voor  $m=2$  de integratie uitvoeren.

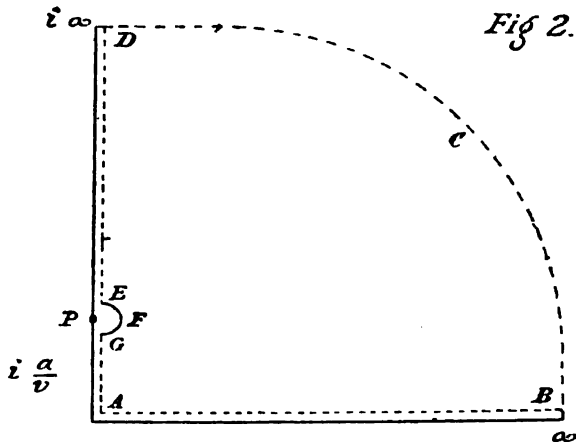
In plaats van 0 tot  $\infty$  integreeren we in het complexe vlak langs AGFEDCB. De functie is in het ingesloten gebied synektisch.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nt}{a^2 + v^2 t^2} dt = \text{reëel deel van } \int_0^{\infty} \frac{e^{iaz}}{a^2 + v^2 z^2} dz.$$

Integreerend langs AGFEDCB is alleen de integratie om P reëel.

Wij stellen  $z = i \frac{a}{v} + r(\cos \phi + i \sin \phi)$ , dan is

$$U_2 = -\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{i\pi} \frac{e^{-\frac{na}{v}} d\phi}{2av} = -\frac{\pi\alpha}{2av} e^{-\frac{na}{v}}.$$



Voor de vergelijkingen van de baan van het deeltje vinden wij

$$x = -\frac{\pi\alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt \text{ en } y = -\frac{\pi\alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

Voor elke waarde van  $v$  ontstaat dus in dit geval eene *cirkelbeweging*.

De energie der trillende beweging bedraagt

$$E = \frac{\pi^2 \alpha^2 M}{v^2} e^{-\frac{2na}{v}}.$$

Hare maximale waarde

$$E_{\max.} = \frac{\pi^2 \alpha^2 M}{e^2 n^2 a^2} = 1.335 \frac{\alpha^2 M}{n^2 a^2}$$

wordt bereikt voor  $v = na$  (in overeenstemming met formule (11)).

$$\underline{m - 1 = 3.}$$

Volgens (13) leiden wij  $U_4$  uit  $U_2$  af.

$$U_4 = -\frac{\pi\alpha}{4} \frac{na + v}{a^3 v^2} e^{-\frac{na}{v}}.$$

De vergelijkingen der baan zijn

$$x = -\frac{\pi\alpha}{2av^2} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = -\frac{\pi\alpha(na+v)}{2na^2v^2} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

Voor de energie vinden wij

$$E = \frac{\pi^2\alpha^2M}{8a^4v^4} (2n^2a^2 + 2nav + v^2) e^{-\frac{3na}{v}}.$$

De voorwaarde voor maximumenergie luidt

$$v^3 + 2nav^2 + 2n^2a^2v - 2n^2a^3 = 0,$$

waaruit volgt

$$v_{\max.} = 0.574743 na,$$

terwijl uit de benaderingsformule (11) volgt

$$v_{\max.} = \frac{na}{\sqrt{3}} = 0.577350 na.$$

Voor de maximale energie vinden wij

$$E_{\max.} = 1.2122 \frac{\alpha^2M}{n^2a^6}.$$

Voor kleine waarden van  $v$  zijn de amplitudines in de beide coördinatenrichtingen,  $A_x$  en  $A_y$ , nagenoeg gelijk, maar bij 't grooter worden van  $v$  groeit  $A_y$  sterker aan dan  $A_x$ .

Voor  $v_{\max.}$  hebben wij

$$A_y : A_x = 1.575.$$

Voor groote waarden van  $v$  heeft de trillende beweging bijna uitsluitend in de  $y$ -richting plaats.

$$\underline{m - 1 = 5.}$$

$$U_0 = -\frac{\pi\alpha}{16} \frac{3v^2 + 3nav + n^2a^2}{a^5v^3} e^{-\frac{na}{v}}.$$

De vergelijking van de baan is

$$x = -\frac{\pi\alpha}{8} \frac{na+v}{a^3v^3} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = -\frac{\pi\alpha}{8} \frac{3v^2 + 3nav + n^2a^2}{na^4v^3} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt.$$

De waarde der trillingsenergie is

$$E = \frac{\pi^2 \alpha^2 M}{128 a^3 v^6} (9v^4 + 18nav^3 + 16n^2a^2v^2 + 8n^3a^3v + 2n^4a^4) e^{-2 \frac{na}{v}}.$$

De voorwaarde voor maximumenergie luidt

$$9v^5 + 18nav^4 + 14n^2a^2v^3 + 4n^3a^3v^2 - 2n^4a^4v - 2n^5a^5 = 0,$$

waaruit volgt

$$v_{\max} = 0.445077 na,$$

terwijl de benaderingsformule (11) geeft

$$v_{\max} = 0.447213 na.$$

Voor de maximale energie wordt gevonden

$$E_{\max} = 1.085 \frac{\alpha^2 M}{n^2 a^{10}}.$$

Voor kleine waarden van  $v$  zijn  $A_s$  en  $A_y$  gelijk, maar de verhouding  $A_y : A_s$  neemt toe, als  $v$  grooter wordt.

Voor  $v_{\max}$  vinden wij:

$$A_y : A_s = 2.003.$$

Bij groote waarden van  $v$  is de beweging nagenoeg in de  $y$ -richting.

$$m - 1 = 2.$$

Wij gaan uit van de integraal

$$U_1 = -\alpha \int_0^\infty \frac{\cos ntdt}{V(a^2 + v^2 t^2)} = \text{reëel deel van } -\alpha \int_0^\infty \frac{e^{inz} dz}{V(a^2 + v^2 z^2)}.$$

Wij integreeren langs AGFEDCB. Integraal AG is zuiver imaginair, integraal GFE en DCB zijn nul, zoodat integraal ED als reëel deel overblijft.

Wij stellen

$$z = i \frac{a}{v} \sigma \quad \text{en} \quad p = \frac{na}{v};$$

dan is

$$U_1 = -\frac{\alpha}{v} \int_1^\infty \frac{e^{-p\sigma} d\sigma}{V(\sigma^2 - 1)}.$$

Hieruit volgt

$$U_3 = - \frac{n^2 \alpha}{v^3} \int_1^\infty e^{-p\sigma} V(\sigma^2 - 1) d\sigma.$$

Wij noemen

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma} V(\sigma^2 - 1) d\sigma = P,$$

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma} V(\sigma^2 - 1) \sigma d\sigma = Q,$$

$$\int_1^\infty e^{-p\sigma} V(\sigma^2 - 1) \sigma^2 d\sigma = R;$$

dan is

$$Q = \frac{1}{3} p(R - P),$$

$$U_3 = - \frac{n^2 \alpha}{v^3} P, \quad \frac{\partial U_3}{\partial v} = \frac{n^2 \alpha}{v^5} (3vP - naQ).$$

Daar formule (11) in de behandelde gevallen gebleken is eene zeer goede benadering te zijn, zoo ligt het voor de hand te onderstellen, dat ook in dit geval deze benadering goed zal zijn.

Wij stellen  $v^2_{\max} = \frac{n^2 \alpha^2}{2} (1 - \delta^2)$  en noemen de bijbehorende waarden van  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  hier  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$ ; dan volgt uit (10)

$$v \frac{\partial U}{\partial v} = \delta \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right)$$

of

$$\delta = \frac{3vP_1 - naQ_1}{2vP_1 - naQ_1} = \frac{3P_1 - p_1 Q_1}{2P_1 - p_1 Q_1}, \text{ waarin } p_1^2 = \frac{2}{1 - \delta^2} = 2(1 + \delta^2)$$

is. Daar  $\delta^2$  klein is, mogen wij schrijven

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_1^\infty e^{-p_1 \sigma} V(\sigma^2 - 1) d\sigma = \int_1^\infty e^{-\sigma \sqrt{2} - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} \sigma} V(\sigma^2 - 1) d\sigma = \\ &= \int_1^\infty e^{-\sigma \sqrt{2}} V(\sigma^2 - 1) d\sigma - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} \int_1^\infty e^{-\sigma \sqrt{2}} V(\sigma^2 - 1) \sigma d\sigma = \\ &= P(\sqrt{2}) - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} Q(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Evenzoo

$$Q_1 = Q(\sqrt{2}) - \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} R(\sqrt{2}).$$

Substitueerende vinden wij

$$\delta = \frac{(11 + 4\delta^2) P(\sqrt{2}) - (2 + \delta^2) R(\sqrt{2})}{(8 + 3\delta^2) P(\sqrt{2}) - 2R(\sqrt{2})}.$$

Door mechanische kwadratuur wordt gevonden

$$P(\sqrt{2}) = 0.22215, \quad R(\sqrt{2}) = 1.24728,$$

waaruit volgt bij eerste benadering

$$\delta = 0.0710$$

en meer nauwkeurig

$$\delta = 0.0739.$$

Voor  $v_{\max.}$  verkrijgen wij

$$v_{\max.} = 0.705 na,$$

terwijl de benaderingsformule (11) geeft

$$v_{\max.} = 0.707 na.$$

De waarde der maximale energie is

$$E_{\max.} = 1.2464 \frac{\alpha^2 M}{n^2 a^4}.$$

II. Het punt M is oorspronkelijk niet in rust.

De oplossing der bewegingsvergelijkingen geeft nu

$$x = A \sin (nt + \alpha) + \frac{2v}{n^2} \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right) \cos nt,$$

$$y = B \sin (nt + \beta) + \frac{2a}{n} U \sin nt.$$

Voor de energie vindt men

$$E = \frac{1}{2} M n^2 (A^2 + B^2) + 2M \left\{ v \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right) A \sin \alpha + na UB \cos \beta \right\} + \frac{2M}{n^2} \left\{ v^2 \left( U + v \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 + n^2 a^2 U^2 \right\}.$$



Is  $\alpha = 0$  of  $= \pi$  en  $\beta = \frac{1}{2}\pi$  of  $= \frac{3}{2}\pi$ , dan is de totale energie gelijk aan de som der energiën van beide trillingen en kunnen wij de volledige oplossing van het vraagstuk gemakkelijk uit bovenstaande afleiden.

$$m - 1 = 1.$$

$$x = A \sin (nt + \alpha) - \frac{\pi \alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \cos nt,$$

$$y = B \sin (nt + \beta) - \frac{\pi \alpha}{nv} e^{-\frac{na}{v}} \sin nt,$$

$$E = \frac{M\pi^2\alpha^2}{v^2} e^{-\frac{2na}{v}} - \frac{M\pi\alpha n}{v} (A \sin \alpha + B \cos \beta) e^{-\frac{na}{v}} + \frac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2).$$

Is  $A \sin \alpha + B \cos \beta$  gelijk nul, dan is de totale energie gelijk aan de som der energiën van beide trillingen.

De waarde van  $A \sin \alpha + B \cos \beta$  beslist over het voorkomen van een of meer maxima of minima.

De maximum- (of minimum-) voorwaarde luidt

$$(v - na) \{nv(A \sin \alpha + B \cos \beta) - 2\alpha\pi e^{-\frac{na}{v}}\} = 0.$$

Er is dan een maximum of minimum voor

$$(A) \dots\dots\dots v = na$$

of voor

$$(B) \dots\dots\dots A \sin \alpha + B \cos \beta = \frac{2\alpha\pi}{nv} e^{-\frac{na}{v}}.$$

De laatste vergelijking geeft twee waarden voor  $v$ , de eene kleiner dan  $na$ , de andere grooter dan  $na$ , mits  $A \sin \alpha + B \cos \beta$  positief is en kleiner dan de grootste waarde, welke het tweede lid kan aannemen, d. i.  $\frac{2\alpha\pi}{n^2ae}$ .

Is  $v = na$ , dan bedraagt de maximum- (of minimum-) waarde der energie

$$E_m = \frac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2) - \frac{M\alpha\pi}{ae} (A \sin \alpha + B \cos \beta) + \frac{M\alpha^2\pi^2}{n^2a^2e^2}$$

en voor de waarden van  $v$  volgende uit vergelijking B is

$$E_m = \frac{1}{2} Mn^2(A^2 + B^2) - \frac{1}{2} Mn^2(A \sin \alpha + B \cos \beta)^2.$$

Het deeltje kan nu in de volgende gevallen tot rust komen:

1°. als  $v = na$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta = 0$ ,  $A = B = \frac{\alpha\pi}{n^2ae}$  is;

2°. als  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta = 0$ ,  $A = B$  is voor de beide waarden van  $v$ , die voldoen aan

$$A = \frac{\alpha\pi}{nv} e^{-\frac{na}{v}}.$$

Wij kunnen nu de volgende gevallen onderscheiden:

1°.  $A \sin \alpha + B \cos \beta$  negatief, maximumwaarde voor  $v = na$ .

2°.  $A \sin \alpha + B \cos \beta$  positief  $< \frac{\alpha\pi}{n^2ae}$ , minimum — maximum (voor  $v = na$ ) — minimum.

De maximumwaarde is grooter dan de oorspronkelijke waarde.

3°.  $A \sin \alpha + B \cos \beta > \frac{\alpha\pi}{n^2ae}$  en  $< \frac{2\alpha\pi}{n^2ae}$ , minimum — maximum (voor  $v = na$ ) — minimum.

De maximumwaarde is kleiner dan de oorspronkelijke waarde.

4°.  $A \sin \alpha + B \cos \beta > \frac{2\alpha\pi}{n^2ae}$ , minimumwaarde voor  $v = na$ .

$$m - 1 = 8.$$

$$E = \frac{1}{2} M n^2 (A^2 + B^2) - \frac{M \alpha \pi n}{2 a^2 v^2} (na A \sin \alpha + (v + na) B \cos \beta) e^{-\frac{na}{v}} + \frac{M \pi^2 \alpha^2}{8} \frac{v^2 + 2nav + 2n^2 a^2}{v^4 a^4} e^{-\frac{2na}{v}}.$$

De maximum- of minimumvoorwaarde luidt

$$2n^2 a^3 v^2 (2v - na) A \sin \alpha + 2na^2 v^2 (v^2 + nav - n^2 a^2) B \cos \beta - \pi \alpha (v^3 + 2nav^2 + 2n^2 a^2 v - 2n^3 a^3) e^{-\frac{na}{v}} = 0.$$

De discussie van deze vergelijking kan alleen in bijzondere gevallen geleverd worden.

De eerste term wordt nul voor  $v = \frac{1}{2} na$ , de tweede voor  $v = 0.618 na$ , de derde voor  $v = 0.574 na$ .

Voor  $v = 0.574 na$  zouden wij een maximum hebben, als  $A$  en  $B = 0$  waren. Hieruit blijkt, dat dit maximum slechts weinig zal worden verschoven, tenzij  $A$  en  $B$  betrekkelijk groote waarden mochten hebben.

Overigens zal ook in dit geval bij bepaalde waarden der gegevens eene opeenvolging van minimum-maximum-minimum mogelijk zijn.

DE ENKELVOUDIGE PERIODICITEIT VAN DE FUNCTIËN  
 $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  <sup>1)</sup>

DOOR

G. SCHOUTEN.  
(Delft.)

---

1. De oneindig voortlopende machtreeks

$$P(x) \equiv 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

convergeert *gelijkmatic* en *bestendig*. Immers de volstrekte waarde van iederen term is voor elke eindige waarde van  $x$  eindig.

Als *gelijkmatic* convergente reeks is hare grenswaarde onafhankelijk van de volgorde der termen; en omdat ze *bestendig* convergeert, stelt ze niet enkel een *element* eener functie voor, maar een functie geheel. De reeks moet beschouwd worden als de ontwikkeling dier functie in de omgeving *nul*.

Wil men de ontwikkeling der functie in de omgeving van  $x_0$ , dan vervange men  $x$  door  $x_0 + (x - x_0)$ , ontwikkel elke term volgens het binomium en rangschik de uitkomst van de ontwikkeling naar de klimmende machten van  $(x - x_0)$ , wat tengevolge van de *gelijkmatic* convergentie der reeks geen verandering in de grenswaarde zal brengen en dus geoorloofd is.

De uitkomst zal zijn:

$$P\{x_0 + (x - x_0)\} = P(x_0) P(x - x_0) \dots \quad (1)$$

---

<sup>1)</sup> In hoofdzak voorgeslagen in de vergadering van Februari 1895.

Op de reeks  $P(x)$  ben ik gekomen bij mijn poging tot het vinden van den meest algemeenen vorm van de getallen, die de associatieve, de commutatieve, en de distributieve eigenschap bezitten, waarvan ik op de Algemeene Vergadering van 1898 een overzicht heb gegeven.



$$P(a) \left\{ 1 - \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right\} = 1,$$

$$P(a) \left\{ \frac{b}{1} - \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right\} = 0,$$

moet wezen. Maar dan is ook  $P(a - bi) = 1$ . Uit

$$P(a + bi) = P(a)P(bi) = 1 \text{ en } P(a - bi) = P(a) : P(bi) = 1$$

volgt dan verder, dat

$$\{P(a)\}^2 = 1 \text{ en } \{P(bi)\}^2 = 1$$

moet wezen; dus is

$$P(a) = \pm 1, \quad P(bi) = \pm 1.$$

Boven is gevonden, dat  $P(x)$  alleen voor  $x = 0$  de waarde één verkrijgt; bijgevolg zal de periode van  $P(x)$ , zoo die bestaat, *zuiver imaginair* moeten zijn.

Onderstellen we dan, dat  $bi$  een periode van  $P(x)$  kon zijn, dat dus  $P(bi) = 1$  was. Uit

$$P(bi) = \left( 1 - \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) + i \left( \frac{b}{1} - \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) = 1$$

volgt dan, dat

$$\left. \begin{aligned} P_2(b) &\equiv 1 - \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots = 1 \\ P_1(b) &\equiv \frac{b}{1} - \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots = 0 \end{aligned} \right\}$$

zal moeten wezen.

### 3. De functiën $P_2(x)$ en $P_1(x)$ .

We zijn gekomen tot twee nieuwe functiën

$$P_2(x) \equiv 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots,$$

$$P_1(x) \equiv \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

waarvan we moeten onderzoeken, of er een bestaansbare waarde  $b$  voor  $x$  bestaat, die de eerste gelijk 1, de tweede gelijk nul maakt. Iedere zoodanige waarde  $b$  geeft een periode  $bi$  van  $P(x)$ .

De functiën  $P_2(x)$  en  $P_1(x)$  zijn evenals  $P(x)$  *gelijkmatic* en *bestendig* convergent, en de reeksontwikkelingen stellen die functiën voor in de omgeving nul.

De ontwikkeling van  $P_2(x)$  in de omgeving  $x_0$  geeft in de eerste plaats

$$P_2(x_0 + (x - x_0)) = \sum_0^{\infty} P_2^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Omdat  $P_2^{(1)}(x_0) = -P_1(x_0)$ ,  $P_2^{(2)}(x_0) = -P_2(x_0)$ ,  $P_2^{(3)}(x_0) = P_1(x)$ ,  $P_2^{(4)}(x_0) = P_2(x_0)$  is, zullen we de ontwikkeling als volgt mogen schrijven:

$$\begin{aligned} P_2(x_0 + (x - x_0)) &= P_2(x_0) \left\{ 1 - \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x - x_0)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right\} - \\ &- P_1(x_0) \left\{ \frac{x - x_0}{1} - \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right\} = \\ &= P_2(x_0)P_2(x - x_0) - P_1(x_0)P_1(x - x_0) \dots (3) \end{aligned}$$

Evenzoo vindt men voor de ontwikkeling van  $P_1(x)$  in de omgeving van  $x_0$

$$P_1(x_0 + (x - x_0)) = P_1(x_0)P_2(x - x_0) + P_2(x_0)P_1(x - x_0) \dots (4)$$

De functie  $P_2(x)$  bezit dus, evenals  $P_1(x)$ , een *optellings-theorema*, d. w. z. dat er tusschen de functiewaarden  $P_2(x + y)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_2(y)$  een algebraische vergelijking bestaat, waarvan de coëfficiënten onafhankelijk van de veranderlijken  $x$  en  $y$  zijn; of ook, wat op hetzelfde neerkomt, dat  $P_2(x + y)$  als algebraische functie van  $P_2(x)$ ,  $P_2(y)$  en de eerste afgeleiden  $P_2'(x)$  en  $P_2'(y)$  kan voorgesteld worden. De betrekkingen (3) en (4) toch kunnen als volgt geschreven worden:

$$P_2(x + y) = P_2(x)P_2(y) - \frac{dP_2(x)}{dx} \frac{dP_2(y)}{dy},$$

$$P_1(x + y) = P_1(x) \frac{dP_1(y)}{dy} + P_1(y) \frac{dP_1(x)}{dx}.$$

#### 4. Betrekkingen tusschen $P(x)$ , $P_1(x)$ en $P_2(x)$ .

Terwijl  $P(x)$  met  $P_1(x)$  en  $P_2(x)$  volgens definitie verbonden is door de identiteit

$$P(ix) \equiv P_2(x) + iP_1(x), \dots (5)$$

bestaan er tusschen  $P_1(x)$  en  $P_2(x)$  betrekkingen, die onmiddellijk volgen uit de beide identiteiten

$$\begin{aligned} 2P_2(x) &\equiv P(ix) + P(-ix), \quad 2iP_1(x) \equiv P(ix) - P(-ix), \\ \text{nl.} \quad \{P_2(x)\}^2 + \{P_1(x)\}^2 &\equiv 1. \quad . \quad . \quad . \quad (6) \\ \{P_2(x)\}^2 - \{P_1(x)\}^2 &\equiv P_2(2x) \\ 2P_2(x)P_1(x) &\equiv P_1(2x) \end{aligned}$$

5.  $P(x)$ ,  $P_1(x)$  en  $P_2(x)$  zijn enkelvoudig-periodieke functiën.

Aangezien de beide functiën  $P_1(x)$  en  $P_2(x)$  voor bestaانبare waarden van  $x$  slechts bestaانبare waarden kunnen aannemen, blijkt uit (6), dat zij  $+1$  tot bovengrens,  $-1$  tot benedengrens hebben. Omdat eindelijk die functiën eindig en doorlopend zijn, zullen volgens een bekende functietheoretische stelling <sup>1)</sup> die boven- en die benedengrens ook werkelijk bereikt worden; m. a. w.  $+1$  is een *maximum*-,  $-1$  een *minimum*-waarde zoowel van  $P_2(x)$  als van  $P_1(x)$ .

Groeit nu  $x$  van nul vloeiend aan, dan zal  $P_2(x)$  vloeiend beginnen af te nemen van de waarde  $1$  af en  $P_1(x)$  toenemen van  $0$  af.

$P_2(x)$  zal dus voor zekere waarde  $\omega$  van  $x$  nul en  $P_1(x)$  voor diezelfde waarde één geworden zijn; dus

$$P_2(\omega) = 0, \quad P_1(\omega) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Blijft  $x$  aangroeien, dan zal voor zekere waarde  $\omega + \omega_1$  van  $x$   $P_2(x)$  gelijk  $-1$  en  $P_1(x) = 0$  geworden zijn. Maar volgens het optellingstheorema is

$$P_2(\omega + \omega_1) = P_2(\omega)P_2(\omega_1) - P_1(\omega)P_1(\omega_1)$$

$$\text{of} \quad -1 = -P_1(\omega_1),$$

zoodat volgens (7)  $\omega_1 = \omega$  blijkt te zijn. Dus

$$P_2(2\omega) = -1, \quad P_1(2\omega) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Bij voortgezette aangroeiing van  $x$  zal  $P_2(x)$  nu gaan toenemen en  $P_1(x)$  dus gaan afnemen, zoodat  $P_2(x)$  weer voor zekere waarde  $2\omega + \omega_2$  van  $x$  gelijk nul en  $P_1(x)$  gelijk  $-1$  zal wor-

<sup>1)</sup> Zie O. BIERMANN, *Theorie der analytischen Functionen*, p. 82.

den; dus  $P_2(2\omega + \omega_2) = 0$  en  $P_1(2\omega + \omega_2) = -1$ . Volgens het optellingstheorema is echter

$$P_1(2\omega + \omega_2) = P_1(2\omega)P_2(\omega_2) + P_2(2\omega)P_1(\omega_2),$$

of volgens (8)

$$-1 = -P_1(\omega_2),$$

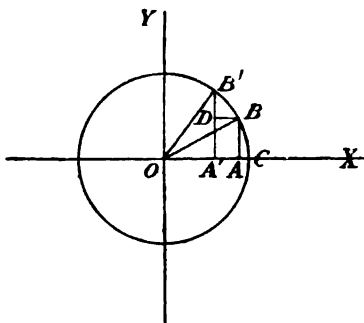
zoodat ook hier  $\omega_2 = \omega$  is, en  $P_2(3\omega) = 0$ ,  $P_3(3\omega) = -1$  is.

Eindelijk zal, wanneer  $x$  met een bedrag  $3\omega + \omega_3$  is toege-  
nomen,  $P_2(x)$  weer gelijk  $+1$  en  $P_1(x)$  gelijk  $0$  geworden zijn,  
dus  $P_2(3\omega + \omega_3) = 1$  en  $P_1(3\omega + \omega_3) = 0$ . Maar uit het optel-  
lingstheorema voor  $P_2(x)$  volgt weer, dat  $\omega_3 = \omega$  is, zoodat

$$P_2(4\omega) = 1, \quad P_1(4\omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

is. Hieruit blijkt, dat  $4\omega$  de getalwaarde  $b$  is, die we zoch-  
ten, en, afgezien van positieve en negatieve veelvouden, de  
eenige is.  $P(x)$  heeft dus de eenige periode  $4\omega$ .

Tevens is gebleken, dat  $4\omega$  een periode is zoowel van  $P_2(x)$   
als van  $P_1(x)$ . Omdat  $P_2(x)$  en  $P_1(x)$  volgens (6) slechts ge-  
meenschappelijke perioden kunnen hebben, en volgens (5) die  
gemeenschappelijke periode ook gemeen moet wezen aan  $P(x)$ ,  
zoo blijkt, dat ook  $P_2(x)$  en  $P_1(x)$  evenals  $P(x)$  *enkelvoudig-  
periodiek* zijn <sup>1)</sup>.



6. Voor bestaansbare waarden van  
 $x$  is  $P_2(x) \equiv \cos x$ ,  $P_1(x) \equiv \sin x$ .

Dit moet meetkundig bewezen  
worden.

Wordt  $P_2(x)$  als abscis OA en  
 $P_1(x)$  als ordinaat AB uitgezet op  
een rechthoekig assenstelsel, dan  
zal volgens (6) het punt B langs  
een cirkelomtrek bewegen, die den  
oorsprong O tot middelpunt en de  
eenheid tot straal heeft, wanneer

<sup>1)</sup> Bij mijn voordracht heb ik, om de periodiciteit te bewijzen, gesteund op de theorie van de maximum- en minimumwaarden eener functie, wat bij eene elementaire behandeling als deze minder op zijn plaats is.

Ik redeneerde daarbij als volgt:  $P_2(x)$  heeft tot afgeleide  $-P_1(x)$ ; als  $x$  van 0 af vloeiend gaat toenemen, zal  $P_2(x)$  van 1 gaan afnemen en  $P_1(x)$  van 0 gaan toenemen. Dit afnemen van  $P_2(x)$  zal niet kunnen eindigen, tenzij  $P_1(x)$  weer gelijk nul geworden is, dus wanneer  $P_2(x)$  de waarde  $-1$  heeft verkregen; enz.



$x$  vloeiend verandert. Voor  $x=0$  is B in C; groeit  $x$  van 0 aan, dan beweegt het punt B zich van C uit langs den cirkel-omtrek in een richting, die tegengesteld is aan die van de wijzers eener klok. De daarbij doorloopen boog CB is dus een functie van  $x$ . We zullen aantoonen, dat boog  $CB = x$  is, waarmede dan het gestelde bewezen is.

Als  $x$  met  $\Delta x$  aangroeit, dan zal  $P_2(x)$  met  $BD = P_2(x + \Delta x) - P_2(x)$  en  $P_1(x)$  met  $DB' = P_1(x + \Delta x) - P_1(x)$  veranderen.

Nu is dus

$$\{P_2(x + \Delta x) - P_2(x)\}^2 + \{P_1(x + \Delta x) - P_1(x)\}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DB'}^2 = \\ = (\text{koorde } BB')^2,$$

of na deeling door  $\Delta x$ :

$$\left(\frac{P_2(x + \Delta x) - P_2(x)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{P_1(x + \Delta x) - P_1(x)}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\text{koorde } BB'}{\Delta x}\right)^2.$$

Gaat men tot de limiet over, dan wordt het eerste lid  $(P_2'(x))^2 + (P_1'(x))^2$ , waarvoor  $(P_1(x))^2 + (P_2(x))^2$ , dus volgens (6) één geschreven kan worden; bijgevolg is limiet koorde  $BB' =$  limiet  $\Delta x$ , of als boog  $BC = s$  gesteld wordt:

$$ds = dx.$$

Omdat zoowel  $x$  als  $s$  met 0 beginnen, blijkt, dat  $BC = x$  en bijgevolg  $P_2(x) \equiv \cos x$ ,  $P_1(x) \equiv \sin x$  is.

De periode  $4\omega$  is bijgevolg  $2\pi$ , en die van  $P(x)$  dus  $2\pi i$ .

Het optellingstheorema voor  $P_2(x)$  en dat voor  $P_1(x)$  gaat nu voor bestaanswaardes van  $x$  over in

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

de bekende grondformulen uit de trigonometrie. Niets staat nu in den weg, om de functie  $P_2(x)$  de cosinusfunctie,  $P_1(x)$  de sinusfunctie te noemen, aangezien de grondformulen voor elke complexe waarde van de veranderlijke doorgaan.

Evenzoo mogen we  $P(x)$  vervangen door  $e^x$ .

Immers uit het optellingstheorema  $P(x)P(y) = P(x + y)$  volgt

$$\text{voor } x = y = 1: \quad P^2(1) = P(2),$$

$$\text{voor } x = 1, y = 2: \quad P^3(1) = P(3),$$

en zoo in 't algemeen voor geheele getalwaarde van  $n$

$$P^n(1) = P(n).$$

Wordt nu

$$P(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots = e$$

gesteld, dan is

$$P(n) = e^n;$$

en nu mogen we voor elke waarde van  $x$

$$P(x) \equiv e^x$$

definieeren, omdat  $P(x)$  alle grondregelen van de machten, nl.  $P(x) \cdot P(y) = P(x+y)$ ,  $P(-x) = 1 : P(x)$ ,  $P(0) = 1$ , volgt.

De identiteit (5) gaat nu over in

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x,$$

welke, door het verheffen van beide leden tot een willekeurige macht  $\mu$ , het theorema van DE MOÏVRE geeft, nl.

$$(e^{ix})^\mu \equiv (\cos x + i \sin x)^\mu \equiv \cos \mu x + i \sin \mu x.$$

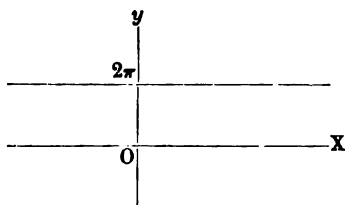
7. De getalwaarden, die  $e^x$ ,  $\sin x$  en  $\cos x$  kunnen aannemen.

a).  $e^x$ . Wanneer de complexe veranderlijke  $z = x + iy$  met  $2\pi i$  verandert, zal  $e^z$  dezelfde waarde behouden. Alle waarden, die  $e^z$  kan aannemen, zullen dus gevonden worden, door  $x$  alle bestaanbare waarden van  $-\infty$  tot  $+\infty$  en  $y$  alle bestaanbare waarden van 0 tot  $2\pi$  te laten doorloopen.

Meetkundig beteekent dit, dat  $e^z$  alle getalwaarden, die ze kan aannemen, zal verkrijgen, als de complexe  $z$  de strook doorloopt, begrepen tusschen de as OX en de parallel aan OX op een afstand  $2\pi$ , waarbij de as OX in het veld van beweging wordt opgenomen.

Het is gemakkelijk in te zien, dat  $e^z$  elke waarde en deze slechts eenmaal zal aannemen, als  $z$  zich over deze strook beweegt.

Beweegt  $z$  zich langs de as OX, dan doorloopt  $e^z$  alle positieve waarden.



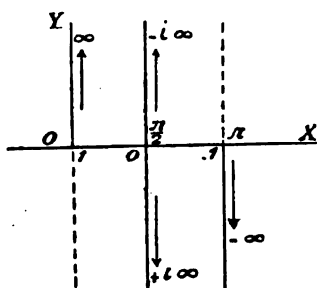
Beweegt  $z$  zich langs de parallel  $y = \pi$ , zoodat  $z$  van den vorm  $x + \pi i$  en  $e^z = e^x + \pi i = -e^x$  is, dan verkrijgt  $e^z$  alle *negatieve* waarden.

De beweging langs de parallel  $y = \frac{1}{2}\pi i$  en de parallel  $y = \frac{3}{2}\pi i$  doet  $e^z$  alle *zuiver imaginaire* waarden doorloopen.

Voor alle overige plaatsen van de strook zal  $e^z$  elke complexe waarde  $a + bi$  aannemen. Want, wat  $a$  en  $b$  ook mogen wesen, altijd zal  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  door  $\cos y$ ,  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  door  $\sin y$  kunnen vervangen worden, waar  $y$  tusschen 0 en  $2\pi$  is gelegen, en on-dubbelzinnig is bepaald.

Stel nu  $\sqrt{a^2 + b^2} = e^x$ , waar  $x$  zeker bestaat en reëel is; verder  $\cos y + i \sin y = e^{iy}$ , waar  $y$  zeker bestaat en tusschen 0 en  $2\pi$  ligt. Dan is  $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$ ; dus bij elke complexe waarde  $a + bi$  behoort één bepaalde exponent  $x + iy$  van  $e^z$ .

Elk getal kan dus voorgesteld worden door  $e^{x+i\theta}$ , waar  $x$  en  $\theta$  bestaanbaar zijn, en  $2\pi > \theta \geq 0$ ; of ook, omdat  $e^z$  elk reëel positief getal kan voorstellen, door  $\rho e^{i\theta}$ . Dan heet  $\rho$ , zooals bekend is, de *modulus*,  $\theta$  de *amplitudo* van het getal.



b.  $\cos z$ . Op dezelfde wijze blijkt, dat  $\cos z$  *elke* waarde slechts *eenmaal* aanneemt in de strook, begrepen tusschen de as OY en de lijn  $y = \pi$ , hierbij alleen de positieve as OY en het negatieve deel van de lijn  $y = \pi$  in het veld van beweging opnemende.

Verandert  $z$  van  $\theta$  tot  $\pi$ , dan  $\cos z$  van 1 over 0 tot  $-1$ ;  
 „ „ „ 0 „  $i\infty$ , „ „  $\cos z$  „ 1 tot  $\infty$ ,  
 „ „ „  $\pi$  „  $\pi - i\infty$ , „ „  $\cos z$  „  $-1$  tot  $-\infty$ ,  
 zoodat  $\cos z$  bij deze bewegingen alle *bestaanbare* waarden heeft doorloopen.

Verandert  $z$  van  $\frac{\pi}{2}$  tot  $\frac{\pi}{2} + i\infty$ , dan  $\cos z$  van 0 tot  $-i\infty$ ,  
 „ „ „  $\frac{\pi}{2}$  „  $\frac{\pi}{2} - i\infty$ , „ „  $\cos z$  „ 0 „  $+i\infty$ ,

zoodat nu  $\cos z$  alle *zuiver imaginaire* getalwaarden heeft verkregen.

Voor elke andere plaats van  $z$  binnen genoemde strook is de getalwaarde van  $\cos z$  van den vorm  $a + bi$ , waar  $a$  en  $b$  elke bestaانبare waarde kunnen hebben.

Is  $z = x + iy$ , dus  $\pi > x > 0$  en verschillend van  $\frac{\pi}{2}$ , terwijl  $y$  elke waarde kan hebben, dan moeten we aantoonen, dat bij elke  $a$  en  $b$  een bepaalde  $x$  en  $y$  behoort. Uit

$$a + bi = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy,$$

$$\cos iy = \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) = 1 + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

$$\sin iy = \frac{1}{2i} (e^{-y} - e^y) = i \left( \frac{y}{1} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right)$$

volgt:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \cos iy = a \\ \sin x \sin iy = bi \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos iy = \frac{a}{\cos x} \\ \sin iy = \frac{b}{\sin x} i \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos x = \frac{a}{\cos iy} \\ \sin x = \frac{b}{\sin iy} i \end{array} \right\}. \quad (10)$$

dus ook:

$$\frac{a^2}{\cos^2 x} - \frac{b^2}{\sin^2 x} = 1, \quad \frac{a^2}{\cos^2 iy} - \frac{b^2}{\sin^2 iy} = 1,$$

of

$$\frac{2a^2}{1 + \cos 2x} - \frac{2b^2}{1 - \cos 2x} = 1, \quad \frac{2a^2}{1 + \cos 2iy} - \frac{2b^2}{1 - \cos 2iy} = 1.$$

Worden de breuken verdreven en de cosinussen opgelost, dan vindt men zoowel voor  $\cos 2x$  als voor  $\cos 2iy$  de uitdrukking

$$a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2},$$

of, wat hetzelfde is,

$$a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}.$$

Kiest men nu voor  $\cos 2x$  het *onderste*, voor  $\cos 2iy$  het *bovenste* van het dubbele teeken, dan is

$$\cos 2x - 1 < 0, \quad \cos 2x + 1 > 0,$$

$$\cos 2iy - 1 > 0,$$

waaruit volgt, dat voor  $x$  en voor  $y$  altijd bestaانبare waarden kunnen gekozen worden, welke voldoen aan  $\cos(x + iy) = a + bi$ , wat ook  $a$  en  $b$  mogen wezen, en waarbij  $0 < 2x < 2\pi$  is.

Dat er eindelijk slechts één keuze voor  $x$  en  $y$  is, blijkt als volgt:  $\sin x$  moet positief zijn, dus moet volgens (10) het teeken van  $y$  gelijk aan dat van  $b$  gekozen worden. Verder moet volgens (10)  $\cos x$  het teeken van  $a$  hebben. Hierdoor zijn  $x$  en  $y$  ondubbelzinnig bepaald.

c.  $\sin z$ . Op soortgelijke wijze blijkt, dat  $\sin z$  elke waarde slechts eenmaal aanneemt in de strook, die men verkrijgt, door de strook bij  $\cos z$  beschouwd een weg  $\frac{\pi}{2}$  in de richting van de as  $OX$  te verschuiven.

8. Voor  $z = \infty$  neemt elk der functiën  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  elke getalwaarde aan.

Is  $a + bi$  een willekeurig getal, dan is boven bewezen, dat altijd een waarde van  $z = x + iy$  kan gevonden worden, zoodanig dat  $e^z = a + bi$  is. Wordt nu  $z$  op zoodanige wijze tot  $\infty$  gebracht, dat bij  $y$  een onbepaald aantal  $2\pi$  wordt opgeteld, dan behoudt  $e^z$  dezelfde waarde  $a + bi$ , die ze dus ook zal hebben voor  $z = \infty$ .

Laat men evenzoo in  $\cos z = \cos(x + iy) = a + bi$  de complexe  $z$  oneindig groot worden, door  $x$  met een onbepaald aantal getalwaarden  $2\pi$  te vermeerderen of te verminderen, dan zal  $\cos z$  steeds dezelfde waarde  $a + bi$  behouden en dus ook bezitten voor  $z = \infty$ .

Hetzelfde geldt voor  $\sin z$ .

9. De functiën  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  zijn geheele transcendente functiën.

Zij onderscheiden zich, zooals we gezien hebben, hierin van de geheele functiën van eindigen graad, dat ze voor  $z = \infty$  elke getalwaarde aannemen, terwijl deze voor  $z = \infty$  er slechts een hebben, nl.  $\infty$ .

Zooals bekend is, heet het punt  $z = \infty$  voor onze functiën een *wezenlijk bijzonder punt* (point critique), terwijl het voor den geheelen  $n^{\text{de}}$  graadsvorm een *onwezenlijk bijzonder punt* (pool) genoemd wordt. Het punt  $z = \infty$  stempelt onze functiën tot transcendente, die, omdat ze voor eindige waarden van  $z$  eindig zijn, *geheele transcendente functiën* genoemd worden.

EENIGE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN EMIL WEYR'S  
„BEITRÄGE ZUR CURVENLEHRE“

DOOR

H. DE VRIES.  
(Haarlem.)

---

§ 1. In het voor de ontwikkeling der nieuwere meetkunde zoo belangrijke werkje van EMIL WEYR, getiteld *Beiträge zur Curvenlehre* (Wien, Alfred Hölder, 1880), komt op pag. 28 sqq. een bewijs voor van de stellingen van PONCELET omtrent gehijktijdig om- en ingeschreven veelhoeken dat onjuist is, aanzien de schrijver als gemeenschappelijke raaklijnen van twee kegelsneden 4 rechte lijnen vindt, waarvan gemakkelijk is aan te toonen dat geen van haar de beide kegelsneden aanraakt, en dan, hierop voortbouwend, als bewezen aanneemt dat beide krommen samenvallen zoodra zij nog één verdere raaklijn gemeen hebben.

Wij zullen nu in de volgende bladzijden in de eerste plaats beproeven Schrijvers bewijs van deze onjuistheid te ontdoen.

De stellingen in kwestie zijn deze:

Wanneer een veranderlijke enkelvoudige  $n$ -hoek (met  $n$  zijden dus) in een kegelsnee beschreven is, en alle zijden op één na aan een tweede kegelsnee raken, dan zal de laatste zijde steeds een derde kegelsnee aanraken, die door de snijpunten van de beide eerste gaat.

En verder:

Wanneer een veranderlijke enkelvoudige  $n$ -hoek om een kegelsnee beschreven is, en alle hoekpunten op één na een tweede kegelsnee doorloopen, dan zal het laatste hoekpunt een derde kegelsnee doorloopen, die de vier gemeenschappelijke raaklijnen der beide eerste aanraakt.

Het spreekt van zelf dat slechts één van deze beide stel-

lingen bewezen behoeft te worden, daar de tweede uit de eerste kan worden afgeleid met behulp van het beginsel van dualiteit. Uit beide stellingen volgt nog deze derde:

Zoodra er één  $n$ -hoek bestaat, die tegelijkertijd in de eerste en op de tweede kegelsnee beschreven is, bestaan er oneindig vele; de hoekpunten van al deze  $n$ -hoeken bepalen op de kegelsnee, waarop zij liggen, een involutie van den  $n^{\text{de}}$  graad en den eersten rang,  $I'_n$ , terwijl de zijden aan de tweede kegelsnee een involutorisch raaklijnenstelsel bepalen, eveneens van den  $n^{\text{de}}$  graad en den rang 1.

§ 2. Zijn twee kegelsneden gegeven,  $k_2$  en  $k'_2$ , dan kan men uit een willekeurig punt  $x_1$  van  $k_2$  twee raaklijnen trekken aan  $k'_2$ ; noemen wij de tweede snijpunten dezer raaklijnen met  $k_2$   $x_2$  en  $x'_2$ , dan kan men nu uit elk van deze twee punten aan  $k'_2$  nog slechts één raaklijn trekken, en uit de tweede snijpunten van deze met  $k_2$ ,  $x_3$  en  $x'_3$ , weer slechts één, enz. Zet men deze constructie voort tot aan de punten  $x_n$ ,  $x'_n$ , dan ziet men dat op deze wijze aan ieder punt  $x_1$  van  $k_2$  twee punten,  $x_n$ ,  $x'_n$ , worden toegevoegd. Gaat men omgekeerd van het zooeven gevonden punt  $x_n$  uit, dan kan men weer aan  $k'_2$  twee raaklijnen trekken, waarvan de eene reeds getrokken is en naar het punt  $x_{n-1}$  heenvoert, terwijl de andere  $k_2$  voor de tweede maal zal snijden in een punt  $x'_{n-1}$ . Van de beide punten  $x_{n-1}$  en  $x'_{n-1}$  kan men nu weer slechts één raaklijn trekken aan  $k'_2$ , en van deze beide is er één, nl.  $x_{n-1}$   $x_{n-2}$ , reeds getrokken, enz. Zet men deze constructie voort tot aan de punten  $x_1$ ,  $x'_1$ , dan ziet men dat  $x_1$  samenvalt met het punt van waar uit wij de constructie zijn begonnen, terwijl  $x'_1$  nieuw is, en dat dus bij ieder punt  $x_1$  van  $k_2$  twee punten  $x_n$ ,  $x'_n$  behooren, terwijl ook omgekeerd aan ieder punt  $x_n$  twee punten  $x_1$ ,  $x'_1$ , zijn toegevoegd. Maar verder volgt uit deze constructie ook, dat bij ieder punt van  $k_2$  steeds dezelfde twee punten behooren, onverschillig of wij het punt van uitgang  $x_1$  of  $x_n$  noemen; de punten  $x_1$  en  $x_n$  vormen dus op  $k_2$  een zoogenaamd „symmetrisch puntenstelsel van den tweeden graad”<sup>1)</sup>.

Verbinden wij ieder punt  $x_1$  van  $k_2$  met de beide toegevoegde

<sup>1)</sup> E. WERTZ, *Beiträge*, p. 8.

punten  $x_n, x'_n$ , dan zullen al deze oneindig vele verbindingslijnen een kegelsnee omhullen, omdat er uit ieder punt van  $k_2$  twee raaklijnen aan deze kromme getrokken kunnen worden; zij wordt door EMIL WEYR „Directionscurve” <sup>1)</sup> genoemd, en dient er toe de aan een willekeurig punt  $x_1$  van  $k_2$  toegevoegde punten  $x_n, x'_n$  rechtstreeks te vinden, zonder dat het noodig is een, voor het geval dat  $n$  een groot getal is, langen omweg te maken langs de kegelsnee  $k'_2$ .

Denken wij de raaklijnen geconstrueerd, die de zooeven beschreven „richtkromme”  $d_2$  met  $k_2$  gemeen heeft, dan zien wij, dat in de raakpunten van deze raaklijnen met  $k_2$  telkens twee toegevoegde punten  $x_1$  en  $x_n$  samenvallen, terwijl  $x'_n$  het tweede snijpunt is met  $k_2$  van de tweede raaklijn, die men van uit elk der vier genoemde punten  $x_{1,n}$  nog aan  $k'_2$  kan trekken. Deze 4 punten  $x_{1,n}$  zijn de 4 „dubbelpunten van de eerste soort” van het symmetrische puntenstelsel op  $k_2$ . Er bestaan nl. ook nog 4 „dubbelpunten van de tweede soort”. Wanneer wij nl. het punt  $x_1$  eens plaatsen in één van de 4 snijpunten van  $k_2$  en  $d_2$ , dan kan men van uit dit punt slechts één raaklijn trekken aan de richtkromme  $d_2$ ; in het tweede snijpunt dezer raaklijn met  $k_2$  liggen dan de beide punten  $x_n, x'_n$  vereenigd, en zulke punten heeten dubbelpunten van de tweede soort. Noemen wij dus de 4 snijpunten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  van  $k_2$  en  $d_2$  vertakkingspunten van het symmetrische puntenstelsel, dan kunnen wij zeggen dat wij de 4 dubbelpunten van de tweede soort  $v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n$  verkrijgen, door in de 4 vertakkingspunten van het stelsel de raaklijnen te trekken aan  $d_2$ .

Nu moet het echter ook mogelijk zijn de zooeven gevonden 4 punten  $v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n$  te vinden met behulp van de kegelsnee  $k'_2$ , en men ziet onmiddellijk in dat men hierin slaagt wanneer men slechts het uitgangspunt  $x_1$  in een van de 4 snijpunten van  $k_2$  en  $k'_2$  aanneemt; immers dan kan men van uit dit punt slechts één raaklijn trekken aan  $k'_2$ , zoodat de beide punten  $x_2, x'_2$ , en dus ook  $x_3, x'_3 \dots$ , en eindelijk ook  $x_n, x'_n$  samenvallen. Nu bezit ons puntenstelsel slechts 4 dubbelpunten van de 2<sup>e</sup> soort, nl.  $v^1_n, v^2_n, v^3_n, v^4_n$ ; elk dezer punten bevat twee samenvallende punten  $x_n, x'_n$ , en aan elk zoodanig puntenpaar is slechts één punt  $x_1$  toegevoegd, zoodat

<sup>1)</sup> l. c. p. 6.



er op  $k_2$  slechts 4 punten  $x_i$  mogelijk zijn, die aanleiding geven tot twee samenvallende punten  $x_n, x'_n$ ; wij hebben er echter 8 gevonden, nl. de snijpunten van  $k_2$  met  $d_2$ , en die van  $k_2$  met  $k'_2$ ; dus moeten de drie kegelsneden  $k_2, k'_2, d_2$  door dezelfde vier punten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  gaan.

§ 3. Wij hebben dus in de voorgaande paragraaf aangetoond, dat wanneer de eerste  $n - 1$  zijden van een in een kegelsnee  $k_2$  beschreven  $n$ -hoek steeds een zelfde kegelsnee  $k'_2$  aanraken, dan ook de laatste zijde  $x_n x_1$  een zekere kegelsnee  $d_2$  moet aanraken, die door de snijpunten der beide eerste heengaat; en hiermede is de eerste der in § 1 genoemde stellingen, en dus implicite ook de tweede, bewezen.

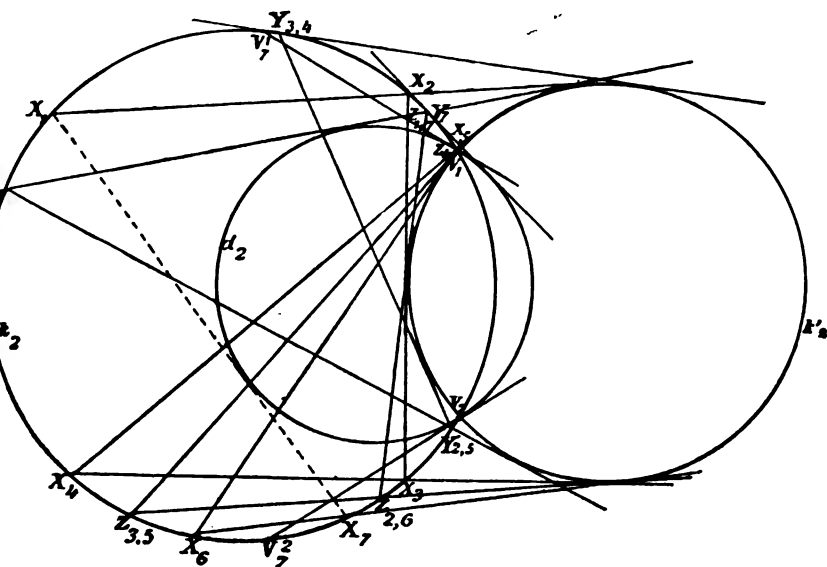


Fig 1.

In Fig. 1 is de constructie uitgevoerd voor het geval  $n = 7$  en in de bijzondere onderstelling, dat  $k_2$  en  $k'_2$  beide cirkels zijn. Dit heeft ten gevolge, dat ook  $d_2$  een cirkel wordt, omdat deze de 4 snijpunten van  $k_2$  en  $k'_2$ , en dus ook de beide absolute punten in het oneindige, moet bevatten; overigens echter blijven zoowel de constructie als het bewijs onveranderd.

Trekt men in de beide op eindigen afstand gelegen vertakkingspunten  $v_1$ ,  $v_2$ , voor zoover zij bestaanbaar zijn, de raaklijnen aan  $d_2$ , dan vindt men de beide dubbelpunten van de tweede soort  $v^1_1$ ,  $v^2_1$ ; om de beide andere te verkrijgen zou men in de beide onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige de raaklijnen moeten trekken aan  $d_2$  en deze voor de tweede maal met  $k_2$  moeten snijden, wat wel is waar op zeer eenvoudige wijze mogelijk is, maar natuurlijk aanleiding geeft tot twee toegevoegd onbestaanbare punten  $v^3_1$  en  $v^4_1$  <sup>1)</sup>.

Nu is er natuurlijk geen enkele reden, waarom de raaklijnen in de punten  $v^1_1$ ,  $v^2_1$ ,  $v^3_1$ ,  $v^4_1$  (of algemeen  $v^1_n$  . . . .  $v^n_n$ ) aan  $k_2$  de beide kegelneden  $k'_2$  en  $d_2$  zouden moeten aanraken, aangezien  $k'_2$  slechts wordt aangeraakt door die rechten, die twee op elkaar volgende hoekpunten van een zelfden  $n$ -hoek verbinden, (behalve de lijnen  $x_n x_1$ ),  $d_2$  slechts door de lijnen  $x_n x_1$ , en de raaklijnen in  $v^1_n$  . . . .  $v^n_n$  aan  $k_2$  tot geen van deze beide groepen behooren; de onjuistheid van het bewijs van WEYR ligt nu hierin, dat hij uitdrukkelijk *zegt*, dat deze raaklijnen aan  $k_2$  tevens  $d_2$  moeten aanraken, en er later stilzwijgend gebruik van maakt dat zij ook  $k'_2$  aanraken, en dan als bewezen aanneemt dat  $d_2$  en  $k'_2$  samenvallen, zoodra zij nog bovendien één andere raaklijn gemeen hebben.

De vraag, die wij ons te stellen hebben, is dus nu deze: wat is dan *wel* de beteekenis der vier gemeenschappelijke raaklijnen van  $d_2$  en  $k'_2$ ? Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten wij onderscheid maken tusschen de beide gevallen  $n$ -oneven en  $n$ -even; daarom hebben wij in Fig. 2 ook nog het geval  $n = 6$  geconstrueerd, en zullen wij ons nu in het vervolg bepalen

<sup>1)</sup> Trekt men in de beide cyclische punten de raaklijnen aan  $d_2$ , dan snijden deze elkaar in het middelpunt  $M_{d_2}$  van  $d_2$ ; men heeft dus slechts dit punt met de beide cyclische punten  $I_1$  en  $I_2$  te verbinden en deze verbindingslijnen voor de tweede maal in  $I'_1$  en  $I'_2$  met  $k_2$  te snijden. Nu vormen de 4 punten  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I'_1$ ,  $I'_2$  een volledige vierhoek, die in  $k_2$  beschreven is en waarvan het punt  $M_{d_2} = (I_1 I'_1, I_2 I'_2)$  het eene diagonaalpunt is, terwijl de beide overige diagonaalpunten  $P = (I_1 I'_2, I_2 I'_1)$  en  $Q = (I_1 I_2, I'_1 I'_2)$  de poollijn  $PQ = m$  van  $M_{d_2}$  ten opzichte van  $k_2$  bepalen. De lijn  $I_1 I'_2$ , de verbindingslijn der beide gezochte punten, is dus de aan de lijn  $I_1 I_2$  toegevoegde 4<sup>e</sup> harmonische straal ten opzichte van het stralenpaar  $PQ = m$  en  $QM_{d_2}$ . Maar de lijn  $I_1 I_2$  verbindt de beide cyclische punten en ligt dus op oneindigen afstand; de lijn  $I'_1 I'_2$  loopt dus evenwijdig aan de poollijn  $m$  van  $M_{d_2}$  ten opzichte van  $k_2$ , en wel juist in het midden tusschen het punt  $M_{d_2}$  en de lijn  $m$ . De punten  $I'_1$ ,  $I'_2$  zelf eindelijk zijn de dubbelpunten der elliptische poolinvolutie, die  $k_2$  op deze lijn bepaalt.

tot de beide gevallen 7 en 6, daar de overgang van deze tot de algemeene gevallen zonder eenige moeite kan geschieden.

Wanneer wij een willekeurig punt van  $k_2$  beschouwen als het hoekpunt  $x_2$  van een  $n$ -hoek van PONCELET, dan gaan van uit dit punt in het algemeen twee raaklijnen aan  $k'_2$ ; hiervan snijdt de eene  $k_2$  voor de tweede maal in  $x_1$ , de andere in  $x_3$ , en daarbij is het onverschillig, welk van de beide punten men  $x_1$  en welk  $x_3$  noemt. Beschouwt men een dergelijk willekeurig

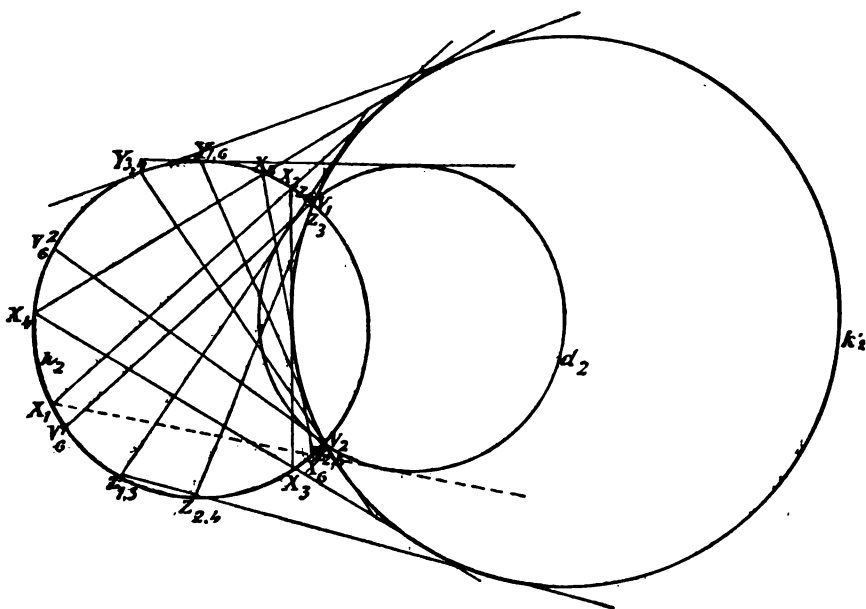


Fig. 2.

punt als  $x_3$ , dan levert één van de beide raaklijnen aan  $k'_2$  het punt  $x_2$ , de andere het punt  $x_4$ , enz. Nu willen wij in het bijzonder in Fig. 1 één van de vier gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'_2$  beschouwen, en het raakpunt met  $k_2$   $y_3$  (dus algemeen  $y_{\frac{n-1}{2}}$ ) noemen; dan valt dus één van de twee punten

$y_2, y_4$  — en wij nemen hiervoor  $y_4$  — met  $y_3$  samen, zoodat wij dit punt ook  $y_{3,4}$  kunnen noemen. Nu gaat verder van  $y_3$  aan  $k'_2$  de tweede raaklijn  $y_3y_2$ , van  $y_4$  de tweede raaklijn  $y_4y_3$ ; deze raaklijnen vallen echter samen, hun tweede snijpunt is dus  $y_{2,5}$ , en de tweede raaklijn van uit dit punt aan  $k'_2$

voert naar het punt  $y_{1,6}$ . De tweede raaklijn uit  $y_6$  aan  $k'_2$  levert het punt  $y_1$  op; maar nu is de lijn  $y_6y_1$  identisch met de lijn  $y_1y_1$ , die volgens het voorgaande de kegelsnee  $d_2$  moet aanraken; *van uit het punt  $y_{1,6}$  kan men dus een gemeenschappelijke raaklijn trekken aan  $k'_2$  en  $d_2$ .*

En hiermede is dus de volgende stelling bewezen: *Voor  $n$ -oneven stellen de gemeenschappelijke raaklijnen van  $k'_2$  en  $d_2$  de beide samenvallende zijden  $y_{n-1}y_n$ ,  $y_ny_1$  van die bijzondere  $n$ -hoeken voor, voor welke de zijde  $\frac{y_{n-1}y_{n+1}}{2}$  samenvalt met één*

*der 4 gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'_2$ , zoodat de genoemde hoekpunten zelf samenvallen in het raakpunt met  $k_2$ .*

Wij hebben dus hier tegelijkertijd aangetoond, dat iedere gemeenschappelijke raaklijn van  $k_2$  en  $k'_2$  is toegevoegd aan een bepaalde gemeenschappelijke raaklijn van  $k'_2$  en  $d_2$ , doordien zij beide behooren tot eenzelfde, hoewel ontaarden, veelhoek van PONCELET.

Met het oog op het zoo straks te onderzoeken geval  $n$ -even is het noodzakelijk ook de beteekenis der gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $d_2$  aan te geven. Beschouwen wij te dien einde het vertakkingspunt  $v_1$  als een hoekpunt  $z_4$ , dus algemeen  $\frac{z_{n+1}}{2}$ , dan kan in dit punt slechts één raaklijn aan  $k'_2$  getrok-

ken worden, wat ten gevolge heeft, dat achtereenvolgens de punten  $z_3$ ,  $z_3$ , dan  $z_2$ ,  $z_6$  en eindelijk  $z_1$ ,  $z_1$  samenvallen. De verbindingslijn  $z_1$ ,  $z_1$  wordt dus nu een raaklijn aan  $k_2$ , moet echter tevens  $d_2$  aanraken, en is dus een gemeenschappelijke raaklijn van beide.

*Voor het geval  $n$ -oneven is dus aan ieder vertakkingspunt  $v$  een gemeenschappelijke raaklijn van  $k_2$  en  $d_2$  op ondubbelzinnige wijze toegevoegd.*

§ 4. Wanneer  $n$  een even getal is vindt men eenigszins andere uitkomsten. Wanneer wij in Fig. 2 eveneens een gemeenschappelijke raaklijn van  $k_2$  en  $k'_2$  beschouwen en het raakpunt met  $k_2$   $y_{3,4}$  noemen, dan vindt men door het herhaald trekken van raaklijnen aan  $k'_2$  achtereenvolgens de punten  $y_{2,5}$  en  $y_{1,6}$ . De raaklijn nu in dit laatste punt aan  $k_2$  moet tevens een raaklijn zijn aan  $d_2$ ; *voor het geval  $n$ -even dus zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'_2$  één aan één toegevoegd*

aan die van  $k_2$  en  $d_2$ , en dus niet, zooals in de vorige para-  
graaf, aan die van  $k'_2$  en  $d_2$ . Deze laatste staan hier in ver-  
band met de vertakkingspunten; beschouwen wij nl. het punt  
 $v_1$  als het hoekpunt  $z_3$  (algemeen  $z_n$ ) van een zekeren  $n$ -hoek

van PONCELET, dan geeft het tweede snijpunt van de raaklijn in  
dit punt aan  $k'_2$  met  $k_2$  een punt  $z_{2,4}$ , de raaklijn van dit punt aan  
 $k'_2$  het punt  $z_{1,5}$ , en de raaklijn van  $z_3$  aan  $k'_2$   $z_6$ . De lijn  $z_3z_6$   
valt dan echter samen met  $z_1z_6$  en moet dus tevens  $d_2$  aanraken.

*Voor  $n$ -even is dus aan ieder vertakkingspunt één van de vier  
gemeenschappelijke raaklijnen van  $k'_2$  en  $d_2$  op ondubbelzinnige  
wijze toegevoegd.*

In beide gevallen hebben wij dus aangetoond, dat de gemeen-  
schappelijke raaklijnen van  $d_2$  en  $k'_2$  een bepaalde beteekenis  
hebben, die gevonden kan worden door zekere bijzondere, nl.  
gedegenereerde, veelhoeken te beschouwen. Zoodra er dus  
één algemeene veelhoek bestaat, die de eigenschap bezit, dat  
niet alleen de  $n - 1$  eerste zijden, doch ook de laatste,  $x_nx_1$ ,  
die in het algemeen  $d_2$  aanraakt,  $k'_2$  aanraakt, dan hebben  $k'_2$   
en  $d_2$  vijf raaklijnen gemeen en moeten zij dus samenvallen. Dan  
neemt  $k'_2$  de eigenschappen van  $d_2$  over, en moeten dus van  
iedereen  $n$ -hoek alle zijden zonder uitzondering  $k'_2$  aanraken,  
waarmede de 3<sup>e</sup> stelling van § 1 bewezen is.

Hoewel ook in dit geval bij ieder punt  $x_1$  nog steeds twee  
verschillende punten  $x_n$  behooren, zal toch ieder punt van  $k_2$   
een hoekpunt zijn van slechts één  $n$ -hoek van PONCELET; want  
aangezien de zijde  $x_nx_1$  nu ook de kegelsnee  $k'_2$  moet aanraken,  
en er van uit  $x_1$  slechts twee raaklijnen mogelijk zijn, moet  
de eene de zijde  $x_1x_2$ , de andere  $x_1x_n$  voorstellen; en hoewel  
het nu onverschillig is, welke van de twee men  $x_1x_2$  en welke  
 $x_1x_n$  wil noemen, zoo spreekt het toch van zelf dat men  
in beide gevallen denzelfden veelhoek vindt, dien men eenvou-  
dig in twee verschillende richtingen doorloopt. Maar verder  
is het duidelijk dat men, in tegenstelling met het vroegere  
geval, steeds denzelfden veelhoek zal vinden, van welk van de  
 $n$  hoekpunten men ook moge uitgaan, of dat m. a. w. de  $n$   
hoekpunten een op zich zelf staande, afgesloten groep van  $n$   
punten vormen, die bepaald is, zoodra één van deze punten,  
onverschillig welk, willekeurig is aangenomen. *Alle hoekpunten  
van alle mogelijke veelhoeken tezamen vormen dus op  $k_2$  een  
involutie van den  $n^{\text{de}}$  graad en den eersten rang,  $I^1_n$ .*

Wanneer men de  $n$  punten van een willekeurige groep eener  $I'_n$  op alle mogelijke manieren met elkaar verbindt, dan zullen de  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  verbindingslijnen van alle groepen een zekere

kromme van de klasse  $n-1$  en den graad  $(n-1)(n-2)$  omhullen, de zoogenaamde „Involutionscurve” <sup>1)</sup>  $i_{n-1}$ , die de eigenschap bezit, dat de  $2(n-1)$  raaklijnen, die zij met  $k_2$ , den drager der involutie, gemeen heeft, deze laatste kromme aanraken in de  $2(n-1)$  dubbelpunten van  $I'_n$ ; dat haar  $2(n-1)(n-2)$  snijpunten met  $k_2$  de vertakkingspunten zijn van  $I'_n$ , en dat de raaklijnen in deze punten aan  $i_{n-1}$  in groepen van telkens  $n-2$  door de bovengenoemde  $2(n-1)$  dubbelpunten gaan, nl. telkens door dat dubbelpunt, dat met de  $n-2$  vertakkingspunten een volledige groep van  $I'_n$  vormt, aangezien bij de involutie het onderscheid tusschen dubbelpunten van de eerste en van de tweede soort wegvalt, en ieder dubbelpunt van de eerste soort voor  $n-2$  samenvallende van de tweede soort geldt. Wij zullen nu in de volgende § nog onderzoeken, hoe deze involutiekromme  $i_{n-1}$  er in ons geval uitziet, waardoor wij dan tevens gelegenheid vinden de stellingen, die Schrijver op pag. 30 en 31 behandelt, langs eenigszins anderen weg te bewijzen en in enkele opzichten aan te vullen.

§ 5. Het is gemakkelijk in te zien, dat voor het geval der gelijktijdig in- en omgeschreven veelhoeken van PONCELET de kromme  $i_{n-1}$  uit verschillende afzonderlijke krommen moet bestaan. De kegelsnee  $k'_2$  zelf is bijv. één van die afzonderlijke deelen, daar zij wordt aangeraakt door al de verbindingslijnen van punten van eenzelfde groep, die twee op elkaar volgende hoekpunten van een  $n$ -hoek met elkaar verbinden; de raakpunten op  $k_2$  van de vier gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'_2$  zijn dus vier van de  $2(n-1)$  dubbelpunten van  $I'_n$ , en de tweede snijpunten met  $k_2$  van de raaklijnen in de vier punten  $v_1 \dots v_4$  aan  $k'_2$  zijn 4 andere; inderdaad valt in elk der vier eerste punten een punt  $x_1$  met het punt  $x_2$  van eenzelfde groep samen, in de laatste bijv. een punt  $z_3$  met  $z_5$  (fig. 1) of  $z_2$  met  $z_4$  (fig. 2).

Beschouwen wij nu verder de beide diagonalen  $x_1x_3$  en  $x_1x_{n-1}$

<sup>1)</sup> E. WYSE, l. c. p. 18.

(waar men in ons geval ieder willekeurig hoekpunt van een zelfden  $n$ -hoek  $x_1$  kan noemen, zonder daardoor gevaar te loopen in een anderen veelhoek te komen, stellen deze lijnen alle mogelijke diagonalen van alle mogelijke veelhoeken voor, die — de diagonalen nl. — telkens één hoekpunt overspringen). Bij ieder willekeurig punt  $x_1$  van  $k_2$  behooren nu twee punten  $x_3$  en  $x_{n-1}$ , zoodat de punten  $x_1, x_3, x_{n-1}$ , op zich zelf beschouwd, ook weer een symmetrisch puntenstelsel van den 2<sup>en</sup> graad op  $k_2$  bepalen, met een zekere kegelsnee  $k_2''$  tot richtkromme, die wordt aangeraakt door alle verbindingslijnen  $x_1x_3, x_1x_{n-1}$ , en dus eveneens deel uitmaakt van de involutiekromme  $i_{n-1}$ .

De raakpunten op  $k_2$  van de gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k_2''$  zijn die dubbelpunten van  $I_1'$ , in welke twee punten  $x_1$  en  $x_3$  eener zelfde groep samenvallen, en nu is gemakkelijk in te zien, dat deze niets anders zijn dan de reeds herhaaldelijk beschouwde tweede snijpunten met  $k_2$  van de raaklijnen in  $v_1 \dots v_4$  aan  $k_2'$ .

Het moet toch mogelijk zijn die punten van  $k_2$ , waarin  $x_1$  en  $x_3$  samenvallen, ook te vinden met behulp van de kegelsnee  $k_2'$ , door nl. van uit  $x_1$  aan  $k_2'$  een raaklijn  $x_1x_2$ , en dan van uit  $x_2$  de raaklijn  $x_2x_3$  te trekken. Zullen nu echter  $x_1, x_3$  samenvallen, dan moeten ook deze twee raaklijnen samenvallen, wat slechts mogelijk is, wanneer  $x_2$  met een der punten  $v_1 \dots v_4$  samenvalt; hiermede is dus het bovenstaande aangetoond. Wij zullen deze vier bijzondere punten ( $z_{3,5}$  in fig. 1,  $z_{2,4}$  in fig. 2) gemakshalve alle vier  $S_1$  noemen.

Verder kan worden aangetoond, dat  $k_2''$  ook weer door de vier punten  $v_1 \dots v_4$  heen moet gaan, en dus, wanneer  $k_2$  en  $k_2'$  beide cirkels zijn, zelf ook weer een cirkel is, behoorende tot de bundel, die door de beide eerste bepaald wordt. De tweede snijpunten nl. met  $k_2$  van de raaklijnen in de snijpunten van  $k_2$  en  $k_2''$  aan  $k_2$  zijn die bijzondere punten, in welke  $x_3$  en  $x_{n-1}$  samenvallen, en van deze punten zijn er slechts vier, daar zij de dubbelpunten van de 2<sup>e</sup> soort van een symmetrisch elementenstelsel van den 2<sup>en</sup> graad vormen, en ook van de bij deze punten behorende punten  $x_1$  zijn er slechts vier, omdat deze laatste de vertakkingspunten van dat stelsel zijn. Nu is het echter dadelijk in te zien dat ook de punten  $v_1 \dots v_4$ , als punten  $x_1$  opgevat, aanleiding geven tot twee coïncideerende

punten  $x_3, x_{n-1}$ . De raaklijnen in deze punten aan  $k'_2$  snijden nl.  $k_2$  voor de tweede maal in de vier punten  $S_1$ , die dus twee samenvallende punten  $x_2, x_n$  voorstellen, en de tweede raaklijnen van uit deze punten aan  $k'_2$  zullen dus  $k_2$  voor de tweede maal snijden in vier punten  $S_2$ , waarvan elk twee samenvallende punten  $x_3, x_{n-1}$  voorstelt. En aangezien er nu volgens het bovenstaande niet meer dan vier zulke bijzondere punten  $x_i$  mogelijk zijn, moeten de snijpunten van  $k_2$  en  $k''_2$  samenvallen met de punten  $v_1 \dots v_4$ .

*Dus gaat  $k''_2$  door de punten  $v_1 \dots v_4$  en heeft ze met  $k_2$  vier raaklijnen gemeen, die deze kromme aanraken in de vier punten  $S_1$ , terwijl haar eigen raaklijnen in  $v_1 \dots v_4$  door de vier punten  $S_2$  heengaan.*

Men zou nu kunnen meenen dat de nu volgende kegelsnee  $k''_2$ , de omhullende van alle diagonalen die twee hoekpunten overspringen ( $x_1x_4, x_1x_{n-3}$ ), en die eveneens door  $v_1 \dots v_4$  moet gaan, met  $k_2$  vier raaklijnen gemeen had, die deze kromme zouden aanraken in de vier punten  $S_2$ , terwijl haar eigen raaklijnen in  $v_1 \dots v_4$   $k_2$  voor de tweede maal zouden ontmoeten in de vier punten  $S_3$ . Het laatste is ook juist; daarentegen zijn de punten  $S_2$  niet de raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k''_2$ ; in een punt  $S_2$  nl. vallen samen twee punten  $x_3$  en  $x_{n-1}$ , en tusschen deze liggen 3 andere hoekpunten, nl.  $x_2, x_1, x_n$ ; valt echter een punt  $x_4$  met  $x_1$  samen, dan liggen tusschen deze twee slechts twee punten,  $x_3$  en  $x_2$ , zoodat deze beide puntengroepen niet van dezelfde soort zijn. Eerst de volgende kegelsnee  $k'''_2$  zal met  $k_2$  raaklijnen gemeen hebben, die in de punten  $S_2$  aanraken; de raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'''_2$  zal men vinden door van uit de vier raakpunten  $T_1$  der gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  en  $k'_2$  ( $y_{3,4}$  van fig. 1) de tweede raaklijnen aan  $k'_2$  te trekken en deze in de vier punten  $T_2$  voor de tweede maal met  $k_2$  te snijden. Liggen nl. in  $T_1$  twee punten  $x_2, x_3$  vereenigd, dan liggen in  $T_2$  twee punten  $x_1, x_4$  vereenigd, zooals het moet zijn. En toch zijn, wanneer  $n$  een oneven getal is, de vier reeksen van punten  $T_1, T_2, \dots$  die men op deze wijze kan verkrijgen, niet verscheidend van de vier reeksen der punten  $S$ ; alleen is  $T_1$  niet identisch met  $S_1$ , maar met  $S_{\frac{n-1}{2}}$ , in welk punt de beide punten  $\frac{x_{n+1}}{2}, \frac{x_{n+3}}{2}$  (en dus evenals  $x_1, x_2$  twee opvolgende punten) samenvallen, terwijl



evenzoo  $T_2$ , in welk punt  $x_1, x_4$  samenvallen, identisch is met  $S_{\frac{n-3}{2}}$  enz.

Samenvattend kunnen wij dus zeggen: *Is  $n$  oneven, dan rangschikken zich de  $2(n-1)$  dubbelpunten van  $l_n^1$  in vier reeksen van telkens  $\frac{n-1}{2}$  punten,  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{\frac{n-1}{2}}$ , die men verkrijgt door uit de vier punten  $v_1, \dots, v_4$  de raaklijnen te trekken aan  $k'_2$ , deze voor de tweede maal te snijden met  $k_2$ , van uit de snijpunten weer de raaklijnen te trekken aan  $k'_2$ , enz.*

*De involutiekromme  $i_{n-1}$  bestaat uit  $\frac{n-1}{2}$  kegelsneden,  $k_2', k_2'', k_2''' \dots$ ; de eerste wordt aangeraakt door de zijden van al de  $n$  hoeken, iedere volgende door al de diagonalen van éénzelfde soort (die alle hetzelfde aantal hoekpunten overspringen). De raaklijnen in de vier punten  $v_1, \dots, v_4$  aan deze kegelsneden gaan achtereenvolgens door de 4 groepen van punten  $S_1, S_2, \dots, S_{\frac{n-1}{2}}$ , en wel zoodanig, dat bijv. de raaklijnen in  $v_1$  alle door die reeks gaan, die uit het punt  $v_1$  is ontstaan. De raakpunten van de raaklijnen, die al deze kegelsneden met  $k_2$  gemeen hebben, worden gevormd door dezelfde vier stelsels van punten  $S$ , maar nu zoodanig, dat bij  $k_2'$  de vier punten  $S_{\frac{n-1}{2}}$ , bij  $k_2''$  de punten  $S_1$ , bij  $k_2'''$  de punten  $S_{\frac{n-3}{2}}$ , bij  $k_2''''$  de punten  $S_2$  behooren, enz.*

Is  $n$  een even getal, dan verkrijgt men eenigszins andere resultaten; wij zullen, om niet al te uitvoerig te worden, deze eenvoudig mededeelen, zonder bewijs. Daar  $n-1$  nu niet door 2 deelbaar is, kan de involutiekromme  $i_{n-1}$  nu niet uitsluitend uit kegelsneden bestaan; inderdaad is er nu ook onder de symmetrische puntenstelsels op  $k_2$  één, dat niet van den 2<sup>en</sup>, maar slechts van den eersten graad is, en dus een gewone kwadratische involutie vormt, nl. het puntenstelsel  $x_1 x_{\frac{n+3}{2}}$ , dat gevormd wordt door de hoofddiagonalen der  $n$ -hoeken; al deze hoofddiagonalen gaan dus door een vast punt P. Het overblijvend gedeelte van  $i_{n-1}$  bestaat nu uit  $\frac{n}{2} - 1$  kegelsneden, die weer alle door  $v_1, \dots, v_4$  heengaan en soort-

gelijke eigenschappen bezitten als boven. Maar de puntenstelsels  $S$  en  $T$  zijn hier niet meer identisch; in plaats van vier gebroken lijnen, die uitgaan van de punten  $v_1 \dots v_4$  en uitmonden in de vier punten  $T_1$ , verkrijgt men hier twee zulke lijnen tusschen telkens twee der vier punten  $v_1 \dots v_4$ , en deze bevatten de punten  $S$ , en twee andere tusschen telkens twee der vier punten  $T_1$ , en deze bevatten de punten  $T$ . Daarbij is het aantal der punten  $S$  in het geheel  $= 2 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ , en dat der punten  $T = 2 \cdot \frac{n}{2}$ , en dus der punten  $S$  en  $T$  samen  $= 2 \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 2 \cdot \frac{n}{2} = 2(n - 1) =$  het volledig aantal dubbelpunten der involutie  $I'$ .

De raakpunten der raaklijnen van uit  $P$  aan  $k_2$  behooren nu eens tot het stelsel der punten  $S$ , dan weer tot dat der punten  $T$ ; voor  $\frac{n}{2}$  even tot dat der punten  $S$ , voor  $\frac{n}{2}$  oneven tot dat der punten  $T$ ; het is in ieder bijzonder geval gemakkelijk deze raakpunten, en dus ook  $P$ , a priori te construeeren. De raakpunten der gemeenschappelijke raaklijnen van  $k_2$  met  $k'_2, k_2'', \dots$  zijn weer achtereenvolgens de punten  $T_1, S_1, T_2, S_2, \dots$ .

Eindelijk moet nog worden opgemerkt dat men, in plaats van onze figuur op te vatten als een  $n$ -hoek in  $k_2$  beschreven, haar eveneens kan beschouwen als een  $n$ -zijde om  $k'_2$  beschreven; de hoekpunten doorloopen dan de kegelsnee  $k_2$ , en alle diagonaalpunten van dezelfde soort zullen eveneens kegelsneden doorloopen, die alle behooren tot de schaar  $(k_2, k'_2)$ , maar die niet, zooals in het eerste geval, cirkels worden, wanneer  $k_2$  en  $k'_2$  cirkels zijn.

§ 6. In deel LXXXVIII van de *Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wissensch. in Wien*, p. 424, heeft G. KOHN aangetoond, dat er een zeer eenvoudig verband bestaat tusschen de theorie der harmonische middelpunten, zooals die door CREMONA ontwikkeld is in zijne *Introduzione*, en tusschen de theorie der involuties van hooger graden en hooger rang, die men vindt in EMIL WEYR's meergenoemde *Beiträge*. Schrijver stelt a priori voor de harmonische middelpunten een definitie op, ontleend aan de

theorie der involuties, en bewijst dan langs meetkundigen weg, dat de eigenschappen der zoo gedefinieerde puntenstelsels inderdaad samenvallen met die der harmonische middelpunten; daarentegen wordt het rechtstreeksche bewijs voor de gelijkwaardigheid der beide definities op analytische wijze gevoerd. Wij zullen nu in deze § in het kort aantoonen, dat ook langs synthetischen weg het verband tusschen de beide genoemde theoriën zeer gemakkelijk kan worden gevonden.

Wanneer in een plat vlak  $\alpha$  een kromme  $c^n$  van den  $n^{\text{den}}$  graad en een pool P gegeven zijn, dan kan men op de volgende wijze de eerste poolkromme  $p^{n-1}$  van P ten opzichte van  $c^n$  construeeren <sup>1)</sup>.

Men trekke door P een willekeurige rechte, die niet in het vlak  $\alpha$  ligt en neme daarop twee willekeurige punten  $T_1, T_2$  aan, en van uit deze punten projecteere men de kromme  $c^n$ . Dan ontstaan twee kegels van den  $n^{\text{den}}$  graad, die een bundel van oppervlakken van den  $n^{\text{den}}$  graad bepalen. Door ieder willekeurig punt der ruimte gaat in het algemeen één oppervlak uit dien bundel; brengt men het willekeurige punt in het vlak  $\alpha$ , dan zal het door dit punt bepaalde oppervlak ontaarden in het vlak  $\alpha$  zelf en een oppervlak  $\phi^{n-1}$  van den graad  $n-1$ . Immers iedere lijn door dit punt in het vlak  $\alpha$  moet van het gezochte oppervlak bevatten in de eerste plaats dit punt zelf en dan de  $n$  punten, volgens welke zij de kromme  $c^n$  snijdt, dus in het geheel  $n+1$ , en dus oneindig vele punten . . . Door de lijn  $PT_1T_2$  kan men een zeker aantal vlakken aanbrengen, die beide kegels tegelijkertijd aanraken, en wier doorgangen met het vlak  $\alpha$  dus de raaklijnen zijn van uit P aan  $c^n$ ; en aangezien de raakpunten dezer raaklijnen op beide kegels tegelijk liggen, moeten zij ook op  $\phi^{n-1}$  liggen, en dus ook op de kromme  $p^{n-1}$ , volgens welke  $\phi^{n-1}$  het vlak  $\alpha$  snijdt. De raakpunten der raaklijnen van uit P aan  $c^n$  getrokken, moeten dus liggen op een zekere kromme  $p^{n-1}$ , de eerste poolkromme van P; het aantal dezer raaklijnen bedraagt dus  $n(n-1)$ . Een willekeurige rechte  $g$  door P in  $\alpha$  snijdt nu  $c^n$  in  $n$  punten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $p^{n-1}$  in  $n-1$  punten  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}$ , en deze laatste zijn volgens CREMONA de harmonische middelpunten van den graad  $n-1$  van P ten opzichte van  $A_1 \dots A_n$ .

<sup>1)</sup> Cf. C. RODENBERG, *Math. Ann.* 26. p. 557.

Brengen wij door  $g$  en de lijn  $T_1 T_2$  een vlak  $\beta$  aan, dan zal dit de beide kegels snijden volgens twee  $n$ -stralige bundels  $(T_1 \cdot A_1, A_2, \dots A_n)$ ,  $(T_2 \cdot A_1, A_2, \dots A_n)$ , en  $\phi^{n-1}$  volgens een kromme  $c^{n-1}$ , die de lijn  $g$  snijdt in de punten  $A'_1, A'_2, \dots A'_{n-1}$ , en verder door de niet op  $g$  gelegen snijpunten der zooeven genoemde stralenstelsels heengaat.

Wij vatten nu de punten  $T_1$  en  $T_2$  op als de dragers van twee projectieve straleninvoluties van den  $n^{\text{den}}$  graad en den  $1^{\text{en}}$  rang en nemen aan, dat voor beide de gemeenschappelijke straal een  $n$ -voudige straal is, en dat de bovengenoemde stralenstelsels  $(T_1 \cdot A_1 \dots A_n)$ ,  $(T_2 \cdot A_1 \dots A_n)$  twee groepen voorstellen. Hierdoor zijn de beide involuties bepaald; zij hebben dit bizondere, dat zij de lijn  $g$  snijden volgens één en dezelfde puntinvolutie  $I'_n$ , want de beide puntinvoluties, die zij ieder afzonderlijk op  $g$  uitsnijden, hebben gemeen het  $n$ -voudige punt  $P$  en de groep  $A_1 \dots A_n$ , en zijn dus identisch. Om de beide straleninvoluties onderling projectief te maken is het dus het eenvoudigst, zulke stralengroepen aan elkaar toe te voegen, die door één en dezelfde groep der puntinvolutie op  $g$  heen gaan. Nu moeten deze beide straleninvoluties een vlakke kromme  $c^{2n}$  voortbrengen, die in  $T_1$  en  $T_2$  een  $n$ -voudig punt heeft; van deze kromme zondert zich echter de lijn  $T_1 T_2$   $n$ -maal af, omdat deze lijn voor beide bundels een  $n$ -voudige straal is en aan zich zelf is toegevoegd, en bovendien zondert zich de lijn  $g$  af; er blijft dus over een kromme van den graad  $n - 1$ , en deze kan niets anders zijn dan de zooeven genoemde kromme  $c^{n-1}$ , aangezien deze door de beide groepen  $(T_1 \cdot A_1 \dots A_n)$ ,  $(T_2 \cdot A_1 \dots A_n)$  reeds meer dan volkomen bepaald is. Op de kromme  $c^{n-1}$  liggen dus de snijpunten van de stralen van *alle* aan elkaar toegevoegde groepen der beide projectieve straleninvoluties, of anders uitgedrukt: wanneer wij van twee tot eenzelfde groep behorende punten der involutie  $I'_n$  op  $g$  het eene met  $T_1$  en het andere met  $T_2$  verbinden, dan snijden deze stralen elkaar in een punt van  $c^{n-1}$ ; en wanneer wij omgekeerd een willekeurig punt van  $c^{n-1}$  met  $T_1$  en  $T_2$  verbinden, dan snijden deze stralen de lijn  $g$  in twee punten eener zelfde groep van  $I'_n$ . Hieruit volgt dan echter onmiddellijk, dat de snijpunten  $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$  van  $c^{n-1}$  met  $g$ , en dus de harmonische middelpunten van den graad  $n - 1$  van  $P$  ten opzichte van het puntenstelsel  $A_1 \dots A_n$ , dubbelpunten zijn

van de involutie  $I'_n$  op  $g$ , waarmede dus de volgende stelling bewezen is:

*De harmonische middelpunten van den graad  $n - 1$  van P ten opzichte van het puntenstelsel  $A_1 \dots A_n$ , zijn de dubbelpunten der involutie  $I'_n$  op  $g$ , die bepaald is door de groep  $A_1 \dots A_n$  en het punt P als  $n$ -voudig punt beschouwd.*

Wel is waar vinden wij op deze wijze slechts  $n - 1$  dubbelpunten, terwijl hun aantal  $2(n - 1)$  bedraagt; maar een  $n$ -voudig punt absorbeert juist  $n - 1$  dubbelpunten, zoodat de ontbrekende in P vereenigd liggen.

§ 7. De in de vorige paragraaf bestudeerde figuur levert ons nu ook het eenvoudige middel de harmonische middelpunten van alle volgende graden te construeeren. Beschouwen wij n.l. nu de punten  $A'_1 \dots A'_{n-1}$  als fundamentaalpunten, en verbinden wij deze met  $T_1$  en  $T_2$ , dan zal door de niet op  $g$  liggende snijpunten dezer beide  $n - 1$  stralige stelsels een vlakke kromme  $c^{n-2}$  volkomen bepaald zijn, en de snijpunten  $A''_1, A''_2 \dots A''_{n-2}$  dezer kromme met  $g$  zullen de harmonische middelpunten van den eersten rang van P ten opzichte van het stelsel  $A'_1 \dots A'_{n-1}$ , en dus van den tweeden rang, of van den graad  $n - 2$ , ten opzichte van  $A_1 \dots A_n$  zijn. Het is duidelijk, dat men op deze wijze door kan gaan tot aan het harmonische middelpunt van den eersten graad, het „Centre des moyennes harmoniques” van PONCELET toe.

Beschouwen wij nu nog eens de punten  $A''_1, \dots, A''_{n-2}$ , de harmonische middelpunten van den graad  $n - 2$ . Volgens de stelling der voorgaande paragraaf zijn deze punten  $n - 2$  van de  $2(n - 2)$  dubbelpunten eener involutie  $I'_{n-1}$  op  $g$ , die bepaald is door het  $n - 1$  voudige punt P, en de groep  $A'_1, A'_2 \dots A'_{n-1}$ , terwijl de overige  $n - 2$  dubbelpunten met P samenvallen

Nu bezit echter deze involutie  $I'_{n-1} \infty^1$  zulke groepen  $A'_1 \dots A'_{n-1}$ , die alle op uiterst eenvoudige wijze met behulp van de kromme  $c^{n-2}$  geconstrueerd kunnen worden, zooals uit het voorgaande onmiddellijk is af te leiden, en die alle de eigenschap bezitten dat zij, als fundamentaalpunten opgevat, ten opzichte van de pool P dezelfde harmonische middelpunten  $A''_1 \dots A''_{n-2}$  van den graad  $n - 2$  bezitten. Onder al deze groepen is één zeer bijzondere, n.l. diegene voor welke

alle  $n - 1$  punten met het punt  $P$  samenvallen; in dit geval worden, zooals uit de theorie der harmonische middelpunten bekend is, de harmonische middelpunten van den graad  $n - 2$  onbepaald, zoodat wij aan mogen nemen dat zij met  $A''_1 \dots A''_{n-1}$  samenvallen.

Iedere groep  $A'_1 \dots A'_{n-1}$  echter bestaat nu weer uit de niet met  $P$  samenvallende dubbelpunten eener involutie  $I^n_1$  van groepen  $A_1 \dots A_n$ , en elk van deze involuties bezit ook weer  $\infty^1 n =$  puntige groepen; er zijn dus in het geheel  $\infty^2 n =$  puntige groepen  $A_1 \dots A_n$ , die alle ten opzichte van de pool  $P$  dezelfde harmonische middelpunten van den graad  $n - 2$  bezitten. En aangezien men, wanneer de pool en deze laatste punten gegeven zijn, twee fundamenteaalpunten willekeurig moet aannemen om een geheele groep van  $n$  punten te bepalen, vormen de  $\infty^2$  groepen  $A_1 \dots A_n$  een involutie  $I^n_2$  van den graad  $n$  en den tweeden rang.

Onder deze  $\infty^2$  groepen  $A_1 \dots A_n$  komen ook diegene voor, en wel ten getale van  $\infty^1$ , die worden afgeleid uit het  $n - 1$  voudige punt  $P$ ; nu is het echter bekend, dat wanneer de  $n - 1$  harmonische middelpunten van den graad  $n - 1$  met de pool samenvallen, ook  $n - 1$  fundamenteaalpunten met de pool samenvallen, terwijl het laatste onbepaald wordt, en dus naar willekeur gekozen kan worden. In onze involutie  $I^n_2$  vormt dus het punt  $P$ , als  $n - 1$  voudig punt opgevat, met ieder willekeurig punt van  $g$  een volledige groep van  $n$  punten; men kan dit punt dus tevens als een  $n$ -voudig punt opvatten, daar men het willekeurige fundamenteaalpunt ook met  $P$  zelf kan laten samenvallen.

Eindelijk is nog te bedenken, dat ieder punt  $A''$  een dubbelpunt is eener involutie  $I^{n-1}_1$ , waarvan de punten  $A'$  enkelvoudige punten zijn, zoodat dus ieder punt  $A''$  voor twee punten  $A'$  geldt. Maar ieder punt  $A'$  is zelf een dubbelpunt eener involutie  $I^n_1$ , en geldt dus voor twee punten  $A$ , zoodat ten slotte ieder punt  $A''$  een combinatie voorstelt van twee dubbelpunten der involutie  $I^n_2$  en dus een drievoudig punt van  $I^n_2$  is.

Vatten wij alles samen, dan vinden wij dus:

*De harmonische middelpunten van den graad  $n - 2$  van de pool  $P$  ten opzichte van een stelsel van fundamenteaalpunten  $A_1 \dots A_n$  zijn de niet met  $P$  samenvallende drievoudige*

*punten van een zekere involutie  $l_n^2$ , waarin de punten  $A_1 \dots A_n$  een groep vormen, terwijl de pool P, als  $n-1$  voudig punt opgevat, met ieder willekeurig punt van  $g$ , en dus ook met zich zelf, eveneens een groep vormt.*

Door nu op deze wijze door te gaan vindt men natuurlijk gemakkelijk dat de harmonische middelpunten van den graad  $n-k$  de niet met P samenvallende  $(k+1)$  voudige punten eener  $l_n^2$  zijn, voor welke de punten  $A_1 \dots A_n$  een groep vormen, terwijl het punt P, als  $(n-k+1)$  voudig punt opgevat, met  $k-1$  willekeurige punten van  $g$  een groep vormt, en dit is de door Schrijver op p. 426 van zijn mededeeling vooropgestelde definitie.

---

DE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VOOR DE BEWEGING  
VAN EEN VAST LICHAAM,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

---

Om de beweging van een stelsel lichamen te onderzoeken, waarbij de verbindingsen van dien aard zijn, dat de reactiekrachten bij een virtueele verplaatsing geen arbeid verrichten, is de weg, door LAGRANGE aangewezen, zeker de meest geschikte.

Evenwel heeft Dr. D. J. KORTEWEG in zijn verhandeling *Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung* aangetoond, hoe zelfs bij de toepassing van die Methode op het betreffelijk eenvoudige geval van de rollende beweging van een omwentelingslichaam over een plat vlak, door verschillende schrijvers fouten begaan zijn, die wel is waar in 't vervolg niet meer zullen voorkomen, dank zij Dr. KORTEWEG's duidelijke aanwijzing van de juiste oplossing, maar die dan toch het bewijs leveren, dat de toepassing van LAGRANGE's Methode met omzichtigheid gepaard moet gaan.

Naast deze oplossing staat, althans waar het de beweging van een vast lichaam geldt, een andere, waarbij onderzocht wordt: 1°. de beweging van het zwaartepunt, 2°. de beweging om het zwaartepunt, dit daarbij als vast punt gedacht.

Bij het eerste onderzoek past men de stelling van de beweging van het zwaartepunt toe, bij het tweede de formules van EULER of die van LAGRANGE.

Omdat mij gebleken is, dat de laatste formules af te leiden zijn langs elementairen weg, d. w. z. door toepassing van de beginselen der Kinematica en van het theorema van D'ALEM-



BERT, dat trouwens den grondslag vormen zal voor de studie van elk stelsel lichamen, geef ik hier die afleiding, niet omdat er eenige bijzondere verdienste in die afleiding zou steken, maar alleen met het oog op de Methodologie. Met behulp van deze formules kan men de beweging van een vast lichaam bepalen langs gemakkelijkeren weg dan met behulp van de EULER'sche vergelijkingen en zonder kennis genomen te hebben van de Methode van LAGRANGE voor de behandeling van Stelsels van Lichamen.

Wij beginnen met de afleiding van de vergelijkingen voor de beweging van een vast lichaam om een vast punt.

De Kinematica leert omtrent deze beweging, dat ze ieder oogenblik bestaat in een wentelen om een as, welke door dit vaste punt gaat.

Wij ontbinden de hoeksnelheid, waarmede die wenteling op zeker oogenblik geschiedt, volgens drie onderling rechthoekige assen OP, OQ, OR, die met het lichaam vast verbonden zijn, terwijl de oorsprong O in het vaste punt is genomen. Laten  $p, q, r$  die ontbondenen zijn.

In de Kinematica wordt dan verder geleerd, dat de volgens deze assen vallende ontbondenen  $x', y', z'$  van de snelheid van een punt des lichaams, dat de massa  $m$  en de coördinaten  $x, y, z$  heeft, gegeven worden door

$$x' = \begin{vmatrix} qr \\ yz \end{vmatrix}; \quad y' = \begin{vmatrix} rp \\ zx \end{vmatrix}; \quad z' = \begin{vmatrix} pq \\ xy \end{vmatrix};$$

zoodat de ontbondenen  $x'', y'', z''$  van de versnelling van dat punt zullen gegeven worden door

$$x'' = \begin{vmatrix} q'r' \\ yz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q r \\ y'z' \end{vmatrix}; \quad y'' = \begin{vmatrix} r'p' \\ zx \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r p \\ z'x' \end{vmatrix}; \quad z'' = \begin{vmatrix} p'q' \\ xy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p q \\ x'y' \end{vmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$1^0. \quad \Sigma m x'' = M \left\{ \begin{vmatrix} q'r' \\ y_0 z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q r \\ y'_0 z'_0 \end{vmatrix} \right\}$$

= de geheele massa  $M$  van het lichaam, vermenigvuldigd met de versnelling in de richting OP van het zwaartepunt  $(x_0 y_0 z_0)$  van het lichaam. Overeenkomstige uitdrukkingen vindt men voor  $\Sigma m y''$  en  $\Sigma m z''$ .

$$\begin{aligned}
2^{\text{de}}. \quad \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) &= \\
= \Sigma m \left\{ \left| \frac{pq}{xy} \right|^2 + \left| \frac{qr}{yz} \right|^2 + \left| \frac{rp}{zx} \right|^2 \right\} \\
= \Sigma m \{ p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) + r^2(x^2 + y^2) - 2pqxy - 2qryz - 2rpxz \} \\
= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2pq\Sigma mxy - 2qr\Sigma myz - 2rp\Sigma mzx;
\end{aligned}$$

waar A het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de as OP, B dat ten opzichte van de as OQ en C dat ten opzichte van de as OR voorstellen.

Worden de assen OP, OQ, OR volgens de hoofdassen van traagheid gekozen, dan is

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Volgens het theorema van D'ALEMBERT zijn de beweegkrachten ieder oogenblik aequivalent met de krachten  $mx''$ ,  $my''$ ,  $mz''$ , die men voor ieder punt van het lichaam kan opmaken.

Noemen we dan  $L_p$  het moment van de beweegkrachten ten opzichte van de as OP,  $L_q$  dat ten opzichte van OQ en eindelijk  $L_r$  dat ten opzichte van OR, dan is

$$\begin{aligned}
L_p &= \Sigma m(yz'' - zy'') \\
&= \Sigma m \left\{ y \left| \frac{p'q'}{xy} \right| + y \left| \frac{pq}{x'y'} \right| - z \left| \frac{r'p'}{zx} \right| - z \left| \frac{rp}{z'x'} \right| \right\} \\
&= \Sigma m \{ p'(y^2 + z^2) - q'xy - r'xz + p(yy' + zz') - (qy + rz)(qz - ry) \} \\
&= Ap' - q'\Sigma mxy - r'\Sigma mxz + \Sigma m \left\{ py \left| \frac{rp}{zx} \right| + pz \left| \frac{pq}{xy} \right| - (qy + rz) \left| \frac{qr}{yz} \right| \right\} \\
&= Ap' - q'\Sigma mxy - r'\Sigma mxz + pr\Sigma mxy - pq\Sigma mxz + \\
&\quad + (r^2 - q^2)\Sigma myz + (C - B)qr.
\end{aligned}$$

Dergelijke uitdrukkingen vindt men voor  $L_q$  en  $L_r$ .

In de onderstelling, dat OP, OQ, OR de hoofdassen van traagheid van het punt O zijn, gaan deze uitdrukkingen over in

$$Ap' - (B - C)qr = L_p$$

$$Bq' - (C - A)rp = L_q$$

$$Cr' - (A - B)pq = L_r$$

zijnde de bewegingsvergelijkingen van EULER.

Worden deze geïntegreerd, wat niet mogelijk is tenzij  $L_p$ ,  $L_q$ ,  $L_r$  in functiën van  $p$ ,  $q$ ,  $r$  en  $t$  worden uitgedrukt, dan zullen deze integraalvergelijkingen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  als functiën van den tijd leeren kennen.

De stand van het lichaam wordt daarna bepaald door het berekenen van de hoeken  $\theta$ ,  $\psi$  en  $\phi$ , die den stand van het beweeglijk assenstelsel OP, OQ, OR bepalen ten opzichte van een vast assenstelsel OX, OY, OZ. Het zijn de hoeken, die het stelsel OXYZ achtereenvolgens moet draaien, om met OPQR tot samenvalling gebracht te worden. Eerstens een hoek  $\psi$  om de as OZ, waardoor OX gebracht wordt in de doorsnede O $\Theta$  van het vlak OXY en OPQ, daarna een hoek  $\phi$  om OR, waardoor OX op OP komt te liggen; eindelijk een hoek  $\theta$  om O $\Theta$ , waardoor OZ op OR komt.

De ontbondenen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  van de hoeksnelheid worden dan vervangen door de ontbondenen  $\dot{\psi}$  volgens OZ,  $\dot{\phi}$  volgens OR en  $\dot{\theta}$  volgens O $\Theta$ , en bepaald door de volgende formules:

$$p = \sin \theta \sin \phi \cdot \dot{\psi} + \cos \phi \cdot \dot{\theta}$$

$$q = \sin \theta \cos \phi \cdot \dot{\psi} - \sin \phi \cdot \dot{\theta}$$

$$r = \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi}.$$

Worden deze geïntegreerd, nadat  $p$ ,  $q$ ,  $r$  vervangen zijn door de bovengenoemde functiën van  $t$ , dan zullen deze integraalvergelijkingen  $\theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$  als functiën van den tijd leeren kennen en daarmede den stand van het lichaam op ieder oogenblik van de beweging.

Aangezien nu  $L_p$ ,  $L_q$ ,  $L_r$  in 't algemeen niet in  $p$ ,  $q$ ,  $r$  en  $t$  kunnen uitgedrukt worden, ligt het voor de hand, de bewegingsvergelijkingen van EULER zóó te herleiden, dat daarin  $p$ ,  $q$ ,  $r$  vervangen zijn door  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  en  $\dot{\psi}$ .

Dit kan op de volgende wijze geschieden.

Zooals gezegd is, moet de hoeksnelheid, tot nu toe ontbonden volgens de beweeglijke assen, ontbonden worden in  $\dot{\theta}$  volgens O $\Theta$ ,  $\dot{\psi}$  volgens OZ en  $\dot{\phi}$  volgens OR.

De momenten  $L_{\dot{\theta}}$ ,  $L_{\dot{\psi}}$  en  $L_{\dot{\phi}}$  ten opzichte van die assen worden gegeven door

$$L_{\dot{\psi}} = L_r \sin \theta \sin \phi + L_t \sin \theta \cos \phi + L_r \cos \theta$$

$$L_{\dot{\theta}} = L_r \cos \phi - L_t \sin \phi$$

$$L_{\dot{\phi}} = L_r.$$

De bewegingsvergelijkingen van EULER gaan hierdoor over in

$$L_{\dot{\psi}} = \sin \theta \sin \phi (Ap' - (B - C)qr) + \sin \theta \cos \phi (Bq' - (C - A)rp) + \\ + \cos \theta (Cr' - (A - B)pq)$$

$$L_{\dot{\theta}} = \cos \phi (Ap' - (B - C)qr) - \sin \phi (Bq' - (C - A)rp)$$

$$L_{\dot{\phi}} = Cr' - (A - B)pq.$$

Wij herleiden deze als volgt:

$$\begin{aligned} L_{\dot{\psi}} &= (Ap' \sin \theta \sin \phi + Bq' \sin \theta \cos \phi + Cr' \cos \theta) + \\ &\quad + Ap(r \sin \theta \cos \phi - q \cos \theta) + Bq(p \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) + \\ &\quad + Cr(q \sin \theta \sin \phi - p \sin \theta \cos \phi) \\ &= \frac{d}{dt} (Ap \sin \theta \sin \phi + Bq \sin \theta \cos \phi + Cr \cos \theta) - \\ &\quad - Ap(\sin \phi \cos \theta \cdot \dot{\theta} + \cos \phi \sin \theta \cdot \dot{\phi}) - Bq(\cos \phi \cos \theta \cdot \dot{\theta} - \\ &\quad - \sin \phi \sin \theta \cdot \dot{\phi}) + Cr \sin \theta \cdot \dot{\theta} + Ap(r \sin \theta \cos \phi - q \cos \theta) + \\ &\quad + Bq(p \cos \theta - r \sin \theta \sin \phi) + Cr(q \sin \theta \sin \phi - p \sin \theta \cos \phi) \\ &= \frac{d}{dt} (Ap \sin \theta \sin \phi + Bq \sin \theta \cos \phi + Cr \cos \theta) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} \right) \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (Ap \cos \phi - Bq \sin \phi) + Ap \sin \phi \cdot \dot{\phi} + Bq \cos \phi \cdot \dot{\phi} - \\ &\quad - (B - C)qr \cos \phi + (C - A)rp \sin \phi \\ &= \frac{d}{dt} (Ap \cos \phi - Bq \sin \phi) + Ap(\sin \phi \cdot \dot{\phi} - r \sin \phi) + \\ &\quad + Bq(\cos \phi \cdot \dot{\phi} - r \cos \phi) + Cr(p \sin \phi + q \cos \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} (Ap \cos \phi - Bq \sin \phi) - Ap \sin \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} - \\
&\quad - Bq \cos \phi \cos \theta \cdot \dot{\psi} + Cr \sin \theta \cdot \dot{\psi} \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\dot{\phi}} &= \frac{d}{dt} Cr - (Ap \cdot q - Bq \cdot p) = \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \left( \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \phi} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi},
\end{aligned}$$

waardoor de vergelijkingen van EULER gebracht zijn onder den vorm, dien LAGRANGE aan de bewegingsvergelijkingen gegeven heeft.

Worden deze vergelijkingen geïntegreerd, en daartoe is noodig dat  $L_{\dot{\psi}}$ ,  $L_{\dot{\phi}}$  en  $L_{\dot{\theta}}$  in  $\psi$ ,  $\phi$  en  $\theta$  kunnen uitgedrukt worden, dan vindt men drie integraalvergelijkingen tusschen  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ , die, nogmaals geïntegreerd,  $\theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$  als functiën van den tijd leeren kennen.

Nu kunnen  $L_{\dot{\psi}}$ ,  $L_{\dot{\phi}}$  en  $L_{\dot{\theta}}$  altijd in  $\psi$ ,  $\phi$  en  $\theta$  uitgedrukt worden. Aangezien toch  $L_{\dot{\theta}}$  het moment voorstelt van de beweegkrachten ten opzichte van de as  $O\Theta$ , en  $X \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + Z \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$  den arbeid voorstelt, dien een kracht, welks ontbondenen volgens de vaste assen  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  zijn en die aangrijpt in het punt  $x, y, z$ , verricht, zal  $X \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} + Z \frac{\partial z}{\partial \theta}$  den arbeid van die kracht voorstellen, berekend voor de eenheid van wenteling, en deze arbeid is juist gelijk aan het

moment van de kracht ten opzichte van de as  $O\Theta$ . Bijgevolg kunnen  $L_\theta$ ,  $L_\psi$  en  $L_\phi$  berekend worden volgens de uitdrukkingen

$$L_\theta = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} + Z \frac{\partial z}{\partial \theta} \right),$$

$$L_\psi = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right),$$

$$L_\phi = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \phi} + Y \frac{\partial y}{\partial \phi} + Z \frac{\partial z}{\partial \phi} \right);$$

waarin  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de coördinaten van het aangrijpingspunt van een beweegkracht, ten gevolge van de bekende transformatieformules in functien van  $\theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$  kunnen uitgedrukt worden.

Onderzoeken we nu het geval, dat het bewegend lichaam geen vastpunt heeft.

Wij kiezen de hoofdasen van traagheid van een willekeurig punt  $O$  van het lichaam tot assen van het beweeglijk assenstelsel  $OPQR$  en bepalen den stand van dit ten opzichte van een vast assenstelsel door de hoeken  $\theta$ ,  $\phi$  en  $\psi$ .

Zijn dan  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de ontbondenen van de snelheid van het punt  $O$ , genomen volgens de beweeglijke assen, dan zijn die van een punt met de massa  $m$  en de coördinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  op de beweeglijke assen:

$$x' = u + \left| \frac{qr}{yz} \right|, \quad y' = v + \left| \frac{rp}{zx} \right|, \quad z' = w + \left| \frac{pq}{xy} \right|,$$

waaruit volgt:

$$\Sigma m x'' = \Sigma m \left\{ u' + \left| \frac{q'r'}{yz} \right| + \left| \frac{q'r}{y'z'} \right| \right\} = M u' + M x''_0$$

als  $M$  de massa van 't lichaam en  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , de coördinaten van het zwaartepunt op het beweeglijk assenstelsel voorstellen.

Volgens de stelling van D'ALEMBERT is  $\Sigma m x'' = \Sigma X$ , zoodat

$$M u' + M x''_0 = \Sigma X$$

$$\text{Evenzoo is} \quad M v' + M y''_0 = \Sigma Y$$

$$M w' + M z''_0 = \Sigma Z.$$

Verder is, insgelijks volgens de stelling van D'ALEMBERT,

$$\begin{aligned} L_p &= \Sigma m (yz'' - zy'') \\ &= \Sigma m \left\{ y \left( w' + \left| \frac{p'q'}{xy} \right| + \left| \frac{pq}{x'y'} \right| \right) - z \left( v' + \left| \frac{r'p'}{zx} \right| + \left| \frac{rp}{z'x'} \right| \right) \right\} \\ &= M \left| \frac{v'w'}{y_0z_0} \right| + Ap' - (B - C)qr. \end{aligned}$$

Voor het geval, dat de gekozen oorsprong O van het beweeglijk assenstelsel in het zwaartepunt van het lichaam valt, gaan de gevonden betrekkingen over in

$$Mu' = \Sigma X$$

$$Mv' = \Sigma Y$$

$$Mw' = \Sigma Z$$

$$Ap' - (B - C)qr = L_p$$

$$Bq' - (C - A)rp = L_q$$

$$Cr' - (A - B)pq = L_r$$

De eerste drie bepalen de beweging van het zwaartepunt, terwijl het laatste drietal de beweging om het zwaartepunt, dit als *vast* punt aannemende, leeren kennen.

Worden nu deze laatste drie vergelijkingen herleid, zooals boven is geschied, dan krijgen we het volgende stelsel vergelijkingen voor de beweging van een lichaam, waarvan het zwaartepunt ten opzichte van het vaste stelsel  $\xi, \eta, \zeta$  tot coördinaten heeft:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\xi} &= \Sigma X, \quad M\ddot{\eta} = \Sigma Y, \quad M\ddot{\zeta} = \Sigma Z, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= L_{\dot{\theta}} = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \theta} + Y \frac{\partial y}{\partial \theta} + Z \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= L_{\dot{\psi}} = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= L_{\dot{\phi}} = \Sigma \left( X \frac{\partial x}{\partial \phi} + Y \frac{\partial y}{\partial \phi} + Z \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

en waarin T voorstelt de kinetische energie van het lichaam om het zwaartepunt en uitgedrukt moet wezen in  $\theta$ ,  $\phi$ , en de afgeleiden  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  en  $\dot{\phi}$ . In het eerste lid van de voorlaatste vergelijking van (A) is symmetrieshalve de term  $-\frac{\partial T}{\partial \psi}$  gebracht, waarvan de waarde gelijk nul is, omdat  $p$ ,  $q$ ,  $r$  en dus ook T onafhankelijk van  $\psi$  zijn.

Wij zullen ten slotte een paar toepassingen behandelen.

*Voorbeeld. Een omwentelingslichaam, steunende op een glad horizontaal vlak, beweegt zich onder de werking van zijn gewicht (zie fig. 2 bl. 137 Deel IV van Dr. KORTEWEG's opstel).*

De bepaling van de beweging van het zwaartepunt wordt beheerscht door de vergelijkingen

$$M\ddot{\xi} = 0, \quad M\ddot{\eta} = 0, \quad M\ddot{\zeta} = R - Mg,$$

waar R de normale druk in het steunpunt is, en  $\zeta$  een functie van  $\theta$ , stel  $\zeta = f(\theta)$ , bepaald door den vorm van het omwentelingslichaam.

De vergelijkingen voor de beweging om het zwaartepunt worden gegeven door het laatste drietal van (A), door voor T te nemen de waarde gegeven door

$$2T = A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2,$$

terwijl hier  $L_{\dot{\psi}} = 0$ ,  $L_{\dot{\phi}} = 0$  en  $L_{\dot{\theta}} = R \cdot AD = -R \cdot f'(\theta)$  is.

Ze zijn derhalve:

$$\frac{d}{dt} C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \{A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C \cos \theta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})\} = 0$$

$$\frac{dA\dot{\theta}}{dt} - (A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \sin \theta) = -R \cdot f'(\theta).$$

De beide eersten geïntegreerd geven:

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \text{standvastig} = n \quad (1)$$

$$A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cn \cos \theta = \text{standvastig} = K. \quad (2)$$

De eerste drukt uit, dat de wenteling om de omwentelingsas van 't lichaam eenparig is, een noodzakelijk gevolg van de omstandigheid, dat de beweegkrachten die as snijden.

De tweede leert, dat het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van het zwaartepunt



standvastig is, een gevolg van de omstandigheid, dat de bewegkrachten evenwijdig zijn aan die verticaal.

Vervangt men in de derde bewegingsvergelijking R door  $M(g + \ddot{\xi}) = M(g + f'(\theta) f''(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + f'(\theta) \cdot \ddot{\theta})$ , dan gaat ze over in

$$\{A + Mf'^2(\theta)\} \ddot{\theta} + Mf'(\theta)f''(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + Mgf'(\theta) = \dot{\psi} \sin \theta (A\dot{\psi} \cos \theta - Cn).$$

Het dubbele van het eerste lid is gelijk aan

$$\frac{d\{A + Mf'^2(\theta)\} \dot{\theta}^2 + 2Mgf'(\theta)\}}{d\theta}.$$

Het dubbele van het tweede lid, als daarin  $\dot{\psi}$  vervangen wordt door  $\frac{K - Cn \cos \theta}{A \sin^2 \theta}$ , gaat over in

$$2 \frac{(K - Cn \cos \theta)(K \cos \theta - Cn)}{A \sin^2 \theta},$$

en is bijgevolg gelijk aan de afgeleide naar  $\theta$  van den vorm

$$- \frac{(K - Cn \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} \text{ of van } - A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta.$$

De integraalvergelijking van de derde bewegingsvergelijking luidt dus

$$(A + Mf'^2(\theta))\dot{\theta}^2 + 2Mgf'(\theta) + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \text{standvastig} = K \quad (3)$$

zijnde de uitdrukking voor de standvastigheid van de totale energie van 't lichaam.

(3) is, als daarin  $\dot{\psi}$  door haar waarde in  $\theta$  wordt vervangen, een differentiaalvergelijking, die geïntegreerd  $\theta$  als functie van  $t$  doet kennen. Die waarde voor  $\theta$  in (2) overgebracht, geeft een differentiaalvergelijking, welke geïntegreerd  $\psi$  als functie van den tijd geeft; terwijl eindelijk (1) door substitutie van de  $\theta$  en  $\psi$  door hunne waarden een differentiaalvergelijking geeft, die geïntegreerd  $\phi$  als functie van  $t$  doet kennen.

*Voorbeeld.* Een omwentelingslichaam, met een scherpen cirkelvormigen rand voorzien, rolt met dien rand over een horizontaal vlak onder de werking van zijn gewicht. Het zwaartepunt van het lichaam ligt in het middelpunt van den rand (zie dezelfde figuur).

Is R de straal van den rand en zijn X, Y, Z de ontbonde-

nen van den weerstand van het steunvlak, genomen volgens de vaste assen, dan gaan de bewegingsvergelijkingen (A) hier over in

$$M\ddot{\xi} = X, \quad M\ddot{\eta} = Y, \quad M\ddot{\zeta} = Z - Mg,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = R(X \cos \psi + Y \sin \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = f'(\theta) (X \cos \psi + Y \sin \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = f(\theta) (-X \sin \psi + Y \cos \psi) - Z f'(\theta),$$

waar T gegeven wordt door

$$2T = A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2.$$

Hierbij moeten gevoegd worden de voorwaardenvergelijkingen (11) in Dr. KORTEWEG's verhandeling voor de rollende beweging, en welke in ons geval, nl.  $f(\theta) = R \sin \theta$ , overgaan in

$$\dot{\xi} = R(\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi - r \cos \psi), \quad \dot{\eta} = -R(\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi + r \sin \psi)$$

waarin

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}$$

te stellen is. Hieruit volgt verder:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} \cos \psi + \ddot{\eta} \sin \psi &= R(\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - \dot{r}) \\ -\ddot{\xi} \sin \psi + \ddot{\eta} \cos \psi &= -R(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta + r \dot{\psi}) \end{aligned}$$

De vergelijkingen voor de beweging om het zwaartepunt gaan hierdoor over in

$$\frac{dCr}{dt} = MR^2(\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - \dot{r})$$

$$\frac{d(A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + Cr \cos \theta)}{dt} = MR^2(\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - \dot{r}) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\theta} - (A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - Cr \dot{\psi} \sin \theta) &= -MR^2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta + r \dot{\psi}) \\ &\quad - MR \cos \theta (g + R(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)). \end{aligned}$$

De eerste herleid wordt

$$(C + MR^2)\dot{r} = MR^2\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta$$

de formule (17) in Dr. KORTEWEG's verhandeling.

De tweede, als volgt geschreven,

$$\frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} + Cr \cos \theta - Cr \dot{\theta} \sin \theta = MR^2(\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta - \dot{r}) \cos \theta$$

gaat tengevolge van de zooeven gevonden betrekking over in

$$\frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} = Cr \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

de formule (18) van Dr. KORTEWEG.

De derde eindelijk gerangschikt wordt

$$(A + MR^2) \ddot{\theta} + MgR \cos \theta + MR^2 \sin \theta \cdot r\ddot{\psi} + Cr\dot{\psi} \sin \theta - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

en kan bijgevolg als volgt geschreven worden :

$$\frac{d\{(A + MR^2)\dot{\theta}^2 + 2MgR \sin \theta\}}{d\theta} + P = 0,$$

waar

$$P = 2Cr\dot{\psi} \sin \theta + 2MR^2 \sin \theta \cdot r\dot{\psi} - 2A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

te stellen is.

Deze vorm P kan met gebruikmaking van de gevonden betrekkingen achtereenvolgens herleid worden als volgt:

$$\begin{aligned} P\dot{\theta} &= 2Cr\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + 2MR^2 \sin \theta \cdot r\dot{\theta}\dot{\psi} - 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\dot{\psi} \frac{dA\dot{\psi} \sin^2 \theta}{dt} + 2(C + MR^2)r\dot{r} - 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\dot{\psi}(A\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) + 2(C + MR^2)r\dot{r} - \\ &\quad - 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ &= 2A\dot{\psi}\ddot{\psi} \sin^2 \theta + 2A\dot{\psi}^2\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + 2(C + MR^2)r\dot{r} \\ &= \frac{d(A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)r^2)}{dt}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$P = \frac{d(A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)r^2)}{d\theta}$$

Zoodat de derde vergelijking nu geïntegreerd kan worden en geeft tot integraalvergelijking :

$$(A + MR^2) \dot{\theta}^2 + 2MgR \sin \theta + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)r^2 = K,$$

de formule (16) van Dr. KORTEWEG, en die dadelijk is op te schrijven, als uitdrukking de standvastigheid van de totale energie.

De oplossing van het vraagstuk is dus teruggebracht tot de integratie van de drie gevonden vergelijkingen, welke ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$\frac{d\left(\sin \theta \frac{dr}{d\theta}\right)}{d\theta} = Qr \sin \theta$$

$$\dot{\psi} \sin \theta = \frac{C}{AQ} \frac{dr}{d\theta}$$

$$(A + MR^2) \dot{\theta}^2 + 2MgR \sin \theta + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (C + MR^2)r^2 = K$$

waar

$$Q = \frac{C}{A} \frac{MR^2}{C + MR^2}$$

te stellen is.

De eerste geïntegreerd geeft  $r$  als functie van  $\theta$ ; de tweede geeft dan  $\dot{\psi}$  als functie van  $\theta$ , waardoor de derde een differentiaalvergelijking wordt, die geïntegreerd  $\theta$  als functie van den tijd geeft, waarmede ook  $r$  en  $\psi$  als functiën van  $t$  te bepalen zijn.

De coördinaat  $\zeta = f(\theta)$  is dan tevens bekend, terwijl de voorwaardenvergelijkingen  $\dot{\xi}$  en  $\dot{\mu}$  als functiën van  $t$  geven en daarmede de ontbondenen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  van den weerstand van het steunvlak.

Uit het oogpunt van de theoretische Mechanica is hiermede het vraagstuk opgelost.

## BIBLIOGRAPHIE.

---

L'enseignement mathématique, revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C. A. LAISANT et H. FEHR. Paris, Georges Carré et C. Naud.

Van deze revue, die blijkens de mededeeling op den omalag, gesteld is onder de hoede van een „comité de patronage”, bestaande uit een aantal bekende geleerden van verschillende nationaliteit, ontving het *Nieuw Archief* het nummer voor 15 Maart 1900. Dit nummer bevat (blz. 77—136) een vijftal lezenswaardige artikelen. V. Schlegel geeft een overzicht van de ontwikkeling der meetkunde van  $n$  afmetingen, vergezeld van eene uitvoerige opgave der litteratuur; J. Andrade behandelt de beteekenis, die men bij het elementair meetkundig onderwijs aan het postulaat van Euclides moet toekennen; L. Ripert bespreekt het groote nut van het begrip „oneindig” in de elementaire meetkunde; G. Fontoné wijst op de wenschelijkheid om verandering te brengen in eenige meetkundige benamingen; A. Poussart deelt een bewijs mede van de stellingen van Bezout en Euler ten aanzien van de onderlinge deelbaarheid van twee veeltermen.

Hierna volgen eene „Chronique” en eene afdeeling „Bibliographie”, in welke laatste eenige nieuw verschenen boekwerken worden besproken. Ten slotte vindt men in een „Bulletin Bibliographique” titel- en gedeeltelijke inhoudsopgave van eenige tijdschriften.

Wij bevelen deze revue gaarne in de belangstelling van de leden van het Genootschap aan. Kl.

Le Degré du Méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Bergen-op-Zoom et de Malines par WILLEBRORD SNELLIUS, publié par HENRI BOSMANS de la Compagnie de Jésus. — Bruxelles, Polleupis et Centerick, 1900.

Snellius heeft, gelijk men weet, in zijn *Eratosthenes Batarus* (1617) uit den afstand van Alkmaar tot Bergen-op-Zoom — bij

de onderstelde bolvormingheid der aarde — de lengte van den meridiaangraad afgeleid. In zijn werk ontdekte hij later verschillende fouten. Dit gaf hem aanleiding om de meting van alle hoeken te herhalen; tevens strekte hij zijne triangulatie uit van Bergen-op-Zoom tot Mechelen, om met des te meer zekerheid de lengte van den meridiaangraad te kunnen vaststellen; ten slotte maakte hij nog van een strengen winter gebruik om op het ijs zijn basis nauwkeuriger te bepalen dan vroeger mogelijk was geweest. <sup>1)</sup>

Deze verbeteringen, in zooverre zij door Snellius eigenhandig waren opgeteekend in een exemplaar van *Eratosthenes*, werden gepubliceerd ten jare 1729 door Petrus Van Musschenbroek in zijn *Dissertatio de magnitudine terrae*; echter heeft Van Musschenbroek aangaande de metingen tusschen Bergen-op-Zoom en Mechelen niets anders gevonden dan eene figuur door Snellius geteekend, terwijl hij de resultaten verloren achtte. „Dolendum est” zoo schrijft hij „cum ulterius mensuram producerat Geometra usque ad Machliniam, veluti in Tab. XVI repraesentatur, eas observationes periisse; non enim illas in emendationibus reperio, unde praeter merum Schema ab ipso Autore depictum, nihil exhibere potui.”

Toch was ook de uitkomst dezer metingen door Snellius toegevoegd aan een ander exemplaar van *Eratosthenes Batavus*, dat in de koninklijke bibliotheek te Brussel bewaard wordt. <sup>2)</sup> Dit onuitgegeven deel van Snellius' arbeid heeft P. Bosmans thans gepubliceerd, ook in de *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*; een belangwekkende historische inleiding, en talrijke aantekeningen voegde hij er bij.

Terwijl het breedteverschil van Bergen-op-Zoom en Mechelen in werkelijkheid ruim 27' 55" bedraagt, neemt Snellius daarvoor slechts 24'; men zal dus licht begrijpen, dat de becijferingen, die hier tot het resultaat voeren van 28545 Rijnlandsche roeden voor de graadlengte, slechts historische beteekenis hebben, — evenals de toch reeds verbeterde berekeningen, die aan Snellius de waarde van 28513 Rijnlandsche roeden opleverden uit den afstand van Alkmaar tot Bergen-op-Zoom;

<sup>1)</sup> Zie P. van Geer, Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius, Archives Néerl., t. XVIII, p. 463.

<sup>2)</sup> Section des Manuscrits, n°. 15493.

voor het verschil in poolshoogte dezer twee plaatsen nam hij  $1^{\circ} 11' 50''$ , terwijl het nog niet ten volle  $1^{\circ} 8' 14''$  bedraagt.<sup>1)</sup> Toch blijft de historische beteekenis van elk fragment van Snellius' werk; en daarom zullen inzonderheid de Nederlandsche wiskundigen P. Bosmans dank weten voor de moeite en zorg, aan de uitgave en toelichting dezer metingen gewijd.

S. KRÜGER S. J.

**Bekenkunde.** Theorie en practijk ten dienste van Normaalschool- en Middelbaar Onderwijs, door P. BRASSEUR, leeraar aan de staatsnormaalschool van Lier, (16 hoofdst., 536 blz.; fr. 5.—). Gent, Ad. Hoste, 1899.

Dit leerboek bevat o.a. vele leerrijke aantekeningen over talstelsels, over renterekening, met inbegrip van lijfrenten en annuïteiten, en over handelsrekenen. De talrijke vraagstukken zijn naar typen gerangschikt. M<sup>r</sup>.

**Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht**, veröffentlicht durch die Verlags-handlung von Martin Schilling in Halle a. S. Nachtrag, Halle a. S., 1900.

Deze uitgave is een voortzetting van de bekende modellenreeks van de firma L. Brill in Darmstadt en staat onder de wetenschappelijke leiding van Prof. Dr. Fr. Schilling te Göttingen. M<sup>r</sup>.

**Geometria piana** (394 blz.; L. 3.—), **Geometria solida** (297 blz.), di F. GIUDICE, Prof. di Matematica nel R. Istituto T. V. E. Libero docente d'Algebra nella R. università di Genova. Brescia, F. Apollonis, 1897—1900.

Behalve de stof, die men gewoonlijk in elementaire leerboeken over meetkunde aantreft, bevat dit werkje ook eenige aantekeningen over verwante onderwerpen, als niet-euclidische meetkunde, zoogenaamde nieuwere meetkunde, meetkunde van

---

<sup>1)</sup> Van Musschenbroek neemt voor de breedte van Bergen-op-Zoom  $51^{\circ} 28' 47''$ , hetgeen nog  $13''$  meer afwijkt van de werkelijke waarde dan het door Snellius aangenomen cijfer  $51^{\circ} 29'$ . De breedte van Alkmaar daarentegen wordt door Van Musschenbroek, die hier Cassini volgt, omtrent  $40''$  te groot genomen.

P. Bosmans geeft een ander voorbeeld, waarin Van Musschenbroek de verkeerde opgave van een hoek bij Snellius door een nog meer foutieve vervangt.

de ruimte met  $n$  afmetingen, meetkunde van den driehoek, puntransformaties, enz. M<sup>r</sup>.

Nijverheids- en Handelsrekenen, ten gebruike van Nijverheid-, Beroep- en Adultenscholen (2 dln. in 1 band, 9 hoofdst., 260 blz.; fr. 2.—), door H. DE GUCHTENAERE, leeraar aan de Nijverheidsschool te Gent. Gent, Ad. Hoste, 1900.

Een uiterst practisch werkje met vele vraagstukken op allerlei gebied, o. a. ook op dat der textielindustrie. M<sup>r</sup>.

Trattato di Algebra elementare, con molti esercizi di G. M. TESTI, (20 hoofdst., 710 blz.; L. 4.—). Livorno, R. Giusti, 1900.

Dit werkje onderscheidt zich vooral door een streven naar wetenschappelijke behandeling der stof. De onmeetbare getallen worden ingevoerd door middel van de algemeene theorie der grootheden, zooals deze ontwikkeld is door R. Bettazzi (zie: „Teoria delle grandezze”, Pisa, Spoerri, 1890), de complexe getallen door middel van meetkundige beschouwingen.

M<sup>r</sup>.

A Text-Book of Geometry, by G. A. WENTWORTH, A. M. Revised edition. Boston, U. S. A. Ginn & Company, 1899.

Een heldere stijl, goedgekozen oefeningen, keurige druk en een fraai bandje maken deze uitgave tot een bij uitstek practisch schoolboek. Wat al te practisch echter dunkt het ons, dat de schrijver alle moeilijkheden omtrent euclidische of niet-euclidische meetkunde afsnijdt, door het „parallellen-axioma” tot een gevolg te verklaren van de stelling, dat twee loodlijnen op een zelfde rechte evenwijdig loopen. M<sup>r</sup>.

Traité de géométrie par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Septième édition, revue et augmentée par EUGÈNE ROUCHÉ. I. Het platte vlak, fr. 7,50. II. De ruimte, fr. 9,50. Parijs, Gauthier-Villars, 1900.

Deze zevende druk van het gunstig bekende leerboek, dat in stede van zich bij de in Frankrijk vigeerende officieele programma's te bepalen een overzicht tracht te geven van alle methoden en hunnen onderlingen samenhang, is werkelijk



aanzienlijk vermeerderd. De bladzijden-aantallen der beide deelen, die in den vierden druk van 1879 nog slechts 362 en 549 bedroegen, zijn hier tot 548 en 664 geklommen.

Wat deze nieuwe druk van den onmiddellijk voorgaanden onderscheidt, is in hoofdzaak *a)* de uitbreiding van het aan de geschiedenis der meetkunde gewijde gedeelte, *b)* de toevoeging van een afzonderlijk hoofdstuk over symmetrie, *c)* de ontwikkeling van de theorie der isogonale cirkels, *d)* de uitbreiding van de oplossing der vraagstukken van Apollonius, *e)* de afronding van het bewijs der onmogelijkheid van de kwadratuur van den cirkel, doch vooral *f)* de opneming van eenige afzonderlijk voor dit doel bestemde verhandelingen als de door Neuberg bewerkte „meetkunde van den driehoek” en de door Lemoine opgestelde „geometrographie” in het eerste, de door Poincaré geleverde „niet-euclidische meetkunde” en de van NEUBERG afkomstige „meetkunde van het viervlak” in het tweede deel.

Ook in dezen zevenden druk vindt men in het tweede deel een groote ruimte (p. 289–507) gewijd aan de gebruikelijke krommen en oppervlakken. Tot oefening van den lezer bevat elk deel ruim 500 met zorg verzamelde vraagstukken.

De figuren zijn over het algemeen prachtig uitgevoerd; de druk is uitstekend. S\*.

Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques spéciales, par F. MICHEL. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'école polytechnique de 1860 à 1900. Een deel in 8° van 240 blz. met 70 fig. Prijs 6 fr. Parijs, Gauthier Villars, 1900.

Bij de oplossing van dit vijftigtal vraagstukken, die voor het meerendeel zeer leerzaam zijn, heeft de schrijver getracht den weg te volgen, die zich als van zelf aanbood en in vele gevallen dan ook wel de eenvoudigste zal zijn; daarbij heeft hij zich bij voorkeur bediend van de analytische methode en zich alleen ter vermindering van lange berekeningen en ter verhooging van de sierlijkheid nu en dan eens meetkundige beschouwingen veroorloofd.

Ieder vraagstuk wordt voorafgegaan door een of meer der aan de bewerkers der *Revue semestrielle* welbekende merken, iedere oplossing wordt gevolgd door eenige bibliographische verwijzingen omtrent elders gepubliceerde oplossingen. De aard

der vraagstukken kan dus reeds eenigermate afgeleid worden uit de opgaaft der merken; ze zijn  $K 10 e^2$ ,  $11 d$ ,  $16 f$ ,  $18 e, f$ ,  $L^1 4 e$ ,  $5 b^2$ ,  $10 a, b$ ,  $11 b^2$ ,  $16 b^4$ ,  $17 a^8$ ,  $e$ ,  $18 c^1$ ,  $d^3$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$ ,  $L^2 1 a$ ,  $2 i$ ,  $4 a$ ,  $14 b$ ,  $17 a$ ,  $M^1 3 i$ ,  $M^2 2 h$ ,  $3 d$ ,  $4, a$ ,  $e$ .

We stippen aan, dat we achter de oplossing van het op blz. 54 opgegeven vraagstuk, waarin de schaduwkromme op het scheeve schroefvlak onderzocht wordt, een verwijzing naar het bekende werk van J. de la Gournerie hebben gemist.

De uitvoering van het boek is in alle opzichten te prijzen.  
S<sup>c</sup>.

Gronden der beschrijvende meetkunde van J. RADON GHYBEN. Achtste druk, bewerkt door N. C. GROTEN-DORST en J. W. C. BELENKAMP. Eerste deel met aanhangsel. Breda, 1900.

Van den tekst van dit leerboek zijn 152 blz. gewijd aan de theorie en 20 blz. aan de toepassing van deze op de eenvoudigste constructies der versterkingskunst, terwijl een afzonderlijke atlas 123 figuren en 8 platen bevat, die bij de theorie en de toepassing dienst doen.

Deze achtste druk van het eerste deel van het bekende leerboek, dat vooral voor eigen studie van eerstbeginnenden mag worden aanbevolen, onderscheidt zich slechts weinig van den voorgaanden. We stippen alleen aan, dat van het vraagstuk „door een punt een lijn te trekken, die met de beide projectievlakken gegeven hoeken maakt” thans twee oplossingen gegeven zijn, dat daarentegen van het vraagstuk „door een punt een vlak te brengen, dat met de beide projectievlakken gegeven hoeken maakt” een oplossing minder gegeven is dan voorheen, dat de oplossing van het vraagstuk „de doorsnee te construeeren van twee pyramiden” een uitbreiding heeft ondergaan en het aantal gemengde vraagstukken ter oefening, dat op de theoretische hoofdstukken volgt, van 100 tot 125 is geklommen.

S<sup>c</sup>.

Arithmetic theoretical and practical, by J. S. MACKAY, M. A. (472 blz.; 4 sh. 6 d.). London & Edinburgh, Chambers, 1899.

Dit engelsche schoolboekje munt uit door vorm en inhoud.

S<sup>c</sup>.

*Arithmetica particolare e generale* di F. AMODEO. Volume primo degli elementi di matematica. Opera destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia (9 hoofdst., 415 blz.). Napels, L. Pierro, 1900.

Dit werkje van den bekenden wiskundige behandelt behalve de gewone onderwerpen der rekenkunde ook de complexe getallen en de quaternionen; het besluit met een kort overzicht der logica mathematica van Peano. S<sup>c</sup>.

*Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei*, di G. VERONESE e P. CAZZANIGA. Twee deeltjes in klein 8<sup>o</sup>, deel 1, 117 p., deel 2, 239 p. Verona e Padova, Fratelli Drucker, 1900.

De in dit werkje gevolgde leergang verschilt aanzienlijk van den gewonen. Zoo wordt hier het denkbeeld groep vooropgesteld en luidt het eerste postulaat „er zijn verschillende punten, enz. S<sup>c</sup>.

*Elementary trigonometry* by A. J. PRESSLAND, M. A. and CH. TWEEDIE, M. A. (25 hoofdst., 343 blz.). Edinburgh, Oliver & Boyd, 1900.

Dit werkje maakt deel uit van een „educational series”. Het behandelt op verdienstelijke wijze de goniometrie en de rechtlijnige trigonometrie en bevat een aantal vraagstukken. S<sup>c</sup>.

---

STEVIN'S PROBLEMATA GEOMETRICA

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

(Deventer.)

---

Le plus souvent on ne veut savoir que  
pour en parler. PASCAL.

„Die eigentlich mathematischen Schriften Stevins“, zegt Moritz Cantor in zijn Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2<sup>ter</sup> Band, Leipzig 1892, pp. 528—529, „nöthigen uns ihm mehrfach unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Für's Erste haben wir es mit seinen geometrischen und mechanischen Werken zu thun, wobei aber eine Schwierigkeit auftritt. Die weit- aus verbreitetste Ausgabe von Stevins Werken ist die französische Uebersetzung durch Albert Girard, welche nach Stevins Tode vorbereitet erst 1634 nach Girards Tode herauskam. Bei der an Unauffindbarkeit grenzenden Seltenheit der früheren Drucke ist es uns unmöglich zu bestimmen, wie weit in dieser Girard'schen Gesamtausgabe, abgesehen von Zusätzen des Herausgebers, welche durch Beisetzung von dessen Namen als solche gekennzeichnet sind, noch Veränderungen eintraten. Ob z. B. die fünf Bücher geometrischer Aufgaben von 1585 in den sechs Büchern *De la pratique de Géométrie* unserer Ausgabe enthalten sind, lässt sich nicht entnehmen. Unwahrscheinlich ist es nicht, aber denkbar wäre auch, dass jene erste geometrische Schrift für uns gänzlich verloren gegangen wäre. Die letztere Möglichkeit beruht darauf, dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608, welche in manchen Dingen von der französischen sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung *De miscellaneis* besitzt, welche dort ganz fehlt (Kästner III, 407), auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Her-

ausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und deshalb vorläufig zurückgelegt wurden (Kästner III, 410—411). Allerdings sind die *Problemata geometrica* weder in den *Miscellaneis* noch in dem Verzeichnisse fehlender Stücke enthalten, und damit ist für die erstere Möglichkeit eine Stütze gewonnen, welke durch einen Ausspruch des Adriaen van Roomen von 1593 wesentlich verstärkt wird. Dieser berichtet nämlich (Quetelet pag. 167, Note 1) von einem umfassenden geometrischen Werke Stevins, an welchem derselbe arbeite, nachdem er 1583 (p) eine Probe davon in den fünf Büchern Aufgaben gegeben habe." <sup>1)</sup>

Ik stel mij voor de quæstiën, door Cantor opgeworpen, tot klaarheid te brengen: bronnen, om uit te putten, behooren in ons land niet, als elders, tot de zeldzaamheden.

Laat mij beginnen met een opgaaf van Stevin's geschriften, bewerkt naar:

Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden, 2<sup>e</sup> Verz., 1887, No. XXV, waar men de volledige titels en inhouden, de herdrukken en vertalingen, die van verscheidene het licht hebben gezien, en meer wetenswaardigheden vermeld vindt:

- 1) Tafelen van Interest, Leiden 1582, 8°. 92 pp.
- 2) Problemata Geometrica, Antwerpen [1583], 4°. 119 pp.
- 3) Dialectike ofte Bewysconst, Leiden 1585, 8°. 196 pp.
- 4) De Thiende, Leiden 1585, 8°. 36 pp.
- 5) L'Arithmetique, Leiden 1585, 8°. 680 pp.
- 6) La Pratique d'Arithmetique, Leiden 1585, 8°. 216 pp.,

waarin ook de Tafelen van Interest en De Thiende zijn opgenomen.

Nos. 5 en 6 verschenen in één band.

- 7) De Beghinselen der Weeghconst, Leiden 1586, 4°. 132 pp.
- 8) De Weeghdaet, Leiden 1586, 44 pp.
- 9) De Beghinselen des Waterwichts, Leiden 1586, 4°. 72 pp.

Nos. 7, 8 en 9 verschenen in één band.

---

<sup>1)</sup> Omtrent dit citaat en dat in de noot op p. 103, die in den 2<sup>en</sup> druk van 1900 op p. 573 en p. 620, Noot 3), voorkomen, zie men aldaar Vorwort, p. VIII.

- 10) *De motu coeli*, Leiden 1589, 8°.
- 11) *Vita Politica*, *Het Burgherlick leven*, Leiden 1590, 8°. 50 pp.
- 12) *Appendice Algebraïque*, 1594, 8°. 8 pp.
- 13) *De Sterctenbouwing*, Leiden 1594, 4°. 99 pp.
- 14) *De Havenvinding*, Leiden 1599, 4°. 28 pp.
- 15) *Gemeene Reghel op Gesanterie*, 1605.
- 16) *Wisconstige Gedachtenissen*, Leiden 1608, 2°. 1685 pp., waarin ook *De Havenvinding* (1<sup>e</sup> Stuck, 2<sup>e</sup> Deel, 5<sup>e</sup> Bouck), *De Beghinselen der Weeghoonst* (4<sup>e</sup> Stuck, 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup> Bouck), *De Weeghdaet* (4<sup>e</sup> Stuck, 3<sup>e</sup> Bouck) en *De Beghinselen des Waterwichts* (4<sup>e</sup> Stuck, 4<sup>e</sup> en 5<sup>e</sup> Bouck) zijn opgenomen.
- 17) *Castrametatio*, dat is *Legermeting*, Rotterdam 1617, 2°. 64 pp.
- 18) *Nieuwe Maniere van Sterctebou*, door Spilsluysen, Rotterdam 1617, 2°. 64 pp.

Nos. 17 en 18 verschenen in één band.

- 19) *Materiæ Politicæ*, *Burgherlicke Stoffen*, Leiden 1649, 4°. 297 pp., waarin ook *Het Burgherlick leven* (2 *Onderscheyt*) en de *Gemeene Reghel op Gesanterie* (5 *Onderscheyt*) zijn opgenomen.

- 20) *Verrechting van Domeine*, Leiden 1649, 4°. 427 pp., waarin ook uit de *Wisconstige Gedachtenissen* (5<sup>e</sup> Stuck, 2<sup>e</sup> Deel) de *Verstelicke Bouckhouding in Domeine en Finance Extraordinaire*, op de Italiaensche Wyse, is opgenomen.

Nos. 19 en 20, „uyt [Stevin's] naegelate Hantschriften by een gestelt door Sijn [oudsten] Soon Hendrick Stevin, Heere van Alphen, van Schrevelfrecht, &c.”, verschenen in één band.

- 21) *Grondsteen van een vaste regeering*, 2<sup>e</sup> druk, 1754.
- 22) *Vanden Handel der Watermolens*, 4°. 34 pp., en *Vanden Handel der Waterschuyring*, 4°. 84 pp., in: *Henriæ Stevin, Wisconstich Filosofisch Bedryf*, met afzonderlijk *Plaetboec*, Leiden 1667, X. en XI. Boec.

- 23) *Vande Spiegeling der Singconst*, 8°. 39 pp., en *Vande Molens. Gereviceert door den Professor Golius*. 1634., 8°. 32 pp., in: *Bierens de Haan*, t. a. p., Nos. XXVI en XXVII, en afzonderlijk: Amsterdam 1884.

Stevin's *Wisconstige Gedachtenissen*, „Inhoudende t'ghene daer hem in gheoeffent heeft Den Doorlvchtichsten Hoochgehoren

Vorst ende Heere, Mavrits Prince van Oraegien, Grave van Nassau, Catzonellenbogen, Vianden, Moers &c. Markgraef vander Vere, ende Vlissinghen &c. Heere der Stadt Gravo ende S'landts van Cuyc, St. Vyt, Daefburch &c. Gouverneur van Gelderland, Hollant, Zeelant, Westvrieland, Zutphen, Vtrecht, Overijssel &c. Opperste Veltheer vande vereenichde Nederlanden, Admiraal generael vander Zee &c.", ja zelfs verschillende opmerkingen van „sijn Vorstelicke Ghenade" bevattende, zijn verdeeld in vijf stucken:

1) vant Weereltschrift [cosmographie, 924 pp., van 1608], dat uit drie deelen bestaat:

- a) vanden Driehouckhandel [trigonometrie, 374 pp.],
- b) vant Eertelootschrift [geographie, 192 pp.],
- c) vanden Hemelloop [astronomie, 358 pp.];

2) vande Meetdaet [204 pp., van 1605];

3) vande Deursichtighe [perspectief, terugkaatsing van het licht in vlakke en gebogen spiegels, 108 pp., van 1605];

4) vande Weeghconst [statica der vaste lichamen en vloeistoffen, 220 pp., van 1605];

5) vande Ghemengde Stoffen [220 pp., van 1608], dat uit twee deelen bestaat:

- a) vande Telconstighe Anteyckeningen [8 pp.],
- b) vande Vorstelicke Bouckhouding in Demeine en Finance Extraordinaire [203 pp.].

Aan het einde van het werk (5<sup>e</sup> Stuck, p. 107) vindt men een lijst „Van Ettelicke Ghebrekende stoffen, die inde voorgaende Cortbegrijpen [vóór de Stucken, Deelen, Boucken, enz.] veel ghestelt vefende, nochtans daer na onbeschreven sijn ghebleven.

Ten eersten de Wanschaeuwing [breking van het licht], wefende het 3 bouck des derde stucx vande Deursichtighe.

Ten tweeden de Watertrecking, wefende het 5 deel des Byvoughs int vierde stuck der Weeghconst.

Ten derden het Lochtlicht, wefende het 6 deel des Byvoughs int vierde stuck der Weeghconst.

Ten vierden gebreken inde Telconstige anteyckeningen verscheyden Hooftstucken, wefende het 1 deel des vijfde stucx vande Ghemengde stoffen.

Ten vijfden Spiegheeling [theorie] der Singconst, wefende het 3 deel des vijfde stucx vande Ghemengde stoffen.

Ten seften den Huyfbou, wefende het 4 deel des vijfde ftux vande Ghemengde stoffen.

Ten levenden den Crijchshandel, wefende het 5 deel des vijfde ftux vande Ghemengde stoffen.

Ten achtften Verfcheyden anteyckeninghen, wefende het 6 deel des vijfde ftux vande Ghemengde stoffen.

D'oirfaeck waerom die niet gheftelt en fijn na t'inhoudt der voorfchreven Cortbegrijpen, is datfe niet volcommelick genouch gereet en waren, doen den Drucker [Ian Bouwenfz. woonende op de hoogelantfche Kerckgraft tot Leyden] niet langher by hem en begheerde te bewaren datter een tijt lanck tot fijn achterdeel ghedruckt hadde ghelegghen: Sulcx dat mijn voornemen nu is de bovefchreven reft ter ghelegghender tijt te laten uytgaen.",

waarvan evenwel niet gekomen is.

De Wifconftige Gedachteniffen werden door den Leidschen Hoogheleeraar Willebrordus Snellius in het Latijn vertaald onder den titel:

*Hypomnemata Mathematica*, Leiden 1608, 2 Dl., 2°. 1571 pp.,<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Bij Cantor, t. a. p., II p. 569 Noot 2), vindt men aangeteeekend: „Der II. Band der Hypomnemata erschien 1605, der I. erst 3 Jahre später 1608. Der Grund lag darin, dass die Schriften des I. Bandes noch ins Lateinische zu übersetzen waren, während die des II. Bandes ursprünglich lateinisch verfasst waren.”

Vanwaar deze dwaling? De Wifconftige Gedachteniffen verschenen in één deel met één algemeenen titel en vóór ieder van de vijf stukken een dergelijken bijzonderen titel. Evenzoo de *Hypomnemata Mathematica*, die evenwel in twee deelen het licht zagen; het 2<sup>e</sup> deel bevat de stukken 2—5 en begint met den bijzonderen titel van het 2<sup>e</sup> stuk, zonder dat een algemeene titel voorafgaat. Volgens den algemeenen titel van het werk (in het 1<sup>e</sup> deel) zijn de *Hypomnemata Mathematica* door Stevin geschreven en door Snellius uit het Nederduitsch in het Latijn overgezet (*A Simone Stevino conscripta, & à Belgico in Latinum à VVil. Sn. conversa.*); de bijzondere titels der vijf stukken vermelden alleen, dat Stevin de schrijver is (2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> st.: *Conscriptus à Simone Stevino Brugensi.*; 1<sup>e</sup> en 5<sup>e</sup> st.: *Conscriptus à Simone Stevino.*). Verder vindt men op den algemeenen titel het jaartal 1608 en op de bijzondere titels van het 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> stuk het jaartal 1605 en op die van het 1<sup>e</sup> en 5<sup>e</sup> stuk het jaartal 1608. Cantor, die den bijzonderen titel van het 2<sup>e</sup> stuk voor den algemeenen titel van het 2<sup>e</sup> deel zal hebben aangezien, moest dus wel meenen, dat alleen het 1<sup>e</sup> deel vertaald was, waardoor tevens verklaard werd, waarom het 1<sup>e</sup> deel van 1608 en het 2<sup>e</sup> deel van 1605 dateerde.



en door Jean Tuning, Secretaris van Prins Frederik Hendrik, in het Fransch onder dien van:

*Memoires Mathematiques*, Leiden 1608, 2°. 808 pp.

De Fransche uitgaaf bevat evenwel slechts de vertaling van den Driehouckhandel (1° st. 1° dl.), van bk. 1—4 van de Meetdaet (2° st.), die zes boeken telt, van de Verschaeuwing (perspectief, 3° st. 1° bk.) en van de Vorstelicke Bouckhouding (5° st. 2° dl.).

Ook treft men stuk 1—4 der Wisconstige Gedachtenissen als „*Memoires Mathematiques du Prince Maurice de Nassau*” aan in:

Girard, *Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin*, Leiden 1634, 2°. 910 pp.,

waarin buitendien de Arithmetique, de Pratique d'Arithmetique, de Castrametatio, de Nieuwe Maniere van Sterctebou door Spilsluysen en de Sterctenbouwing zijn opgenomen „le tout reveu, corrigé, & augmenté par Albert Girard Samielois [d. w. z. van Saint-Mihil in Lotharingen], Mathematicien”.

De lijst der „ghebrekende stoffen” komt natuurlijk in de uitgaven van Tuning en Girard niet voor.

Voor hem, die Stevin's werken wil leeren kennen, zijn Girard's *Oeuvres Mathematiques de Stevin*, en de, door Hendric Stevin in één band uitgegeven, *Materiæ Politicæ en Verrechting van Domeine de aangewezen bronnen*. Cantor bedient zich uitsluitend van Girard's uitgaaf.

Voor de handschriften van Stevin schijnt na diens dood in 1620 weinig zorg gedragen te zijn, waarover zijn zoon Hendrick zich meermalen beklagt.

In de *Materiæ Politicæ* van 1649 zegt hij op p. 3 van de Opdracht aan Prins Willem II, dat de handschriften zijns vaders door „ontijdighe aflijvicheyt, onghesformt ghebleven, en daer na, deur ander versuym, van veele der volmaeckste ghesift” zijn, en zijn „Hendrick Stevin Aenden Leser” begint aldus: „Ghemerckt het voornemen niet en was de eerstgedruckte Wifconstigh ghedachtenissen, welcke na des Schrijvers eyntlicke

---

Buitendien schijnt Cantor dit werk slechts te kennen uit de beschrijving bij Kästner, *Geschichte der Mathematik*, 3<sup>ter</sup> Band, Göttingen 1799, van een exemplaar zonder den algemeenen titel en zonder de opdracht van Snellius aan Prins Maurits; de algemeene titel wordt door Kästner later afzonderlijk opgegeven.

meyning gheschiedt sijn, te herdrukken, om de ghene, die door my lichtelick meer verwart dan gherodt fullen gheoirdeelt worden te sijn, daer by te voughen; Maer dese, van die afghelicheyden, besonderlick uyt te gheven, om tusschen d'een en d'ander een merckelick onderscheyt te maken, (te meer alsoo wy deur verscheyden onachtsaemheden, na des Schrijvers overlijden, vande meestvolmaeckste sijn ontbloot gheworden, welcker veele, behalven de sekerheyt die wy, soo deur eyghen gheheughenis, als gheloofwaardighe ghetuyghenissen van anderen daer af hebben, uyt de selve eerstgedruckte blijcken can in wesen te sijn gheweest) soo heb ick my an d'oirden die sommighe der stucken of deelen van dien in't Cortbegrijp des vijfden Stuck der selve eerstghedruckte, ghegheven was, niet ghenootsaekt ghevonden te verbinden, maer die na 't ghene my de omstandighen en eyghen beweghinghen schenen te vereyschen, gheschiedt."

En in zijn Wisconstich Filosofisch Bedryf van 1667 leest men op p. 5 van het 1<sup>e</sup> boek: „Sijn [wij] alweer aent herluysen, en deursnuffelen voornamentlic der blade vande voornoemde boeken en hantschriften gevallen: Ende daer in ten lesten so laetdunkende geworden; Dat wy de hantschriften (welke nu deur onachtsaemheyt, al veel jaren onder verscheyden geleerde handen waren vertrouwt, sonder yets anders, onles wetens, daer me verricht te sijn, als datse van vele voltrockene delen, daer wy genoegsame kennis af menen te hebben, geledigt, en sulx de rest heel ongeret, wijt en zijt deur malcander verstroyt waren) naer ons de saec genoegsaem docht te mogen lyen, tot sekere by eencomsten brachten: Ende eyntlic daer uyt een boec schifteden, dat wy al over achtien jaren onder den naem van Burgerlicke stoffen lieten drukken"; en op p. 8 van het 2<sup>e</sup> boek: „Hebbende ons Broeder Fredric Stevin sal. in sijn joncheyt, geleden ontrent dertich jaren, ter studi gelegen, by enen Heer Abraham Beecman, doen Rector tot Rotterdam, en groot liefhebber der Wisconsten; hadde hy Beecman, by die gelegentheynt, de hantschriften onses Vaders Simon Stevin, die onder ons Moeder doen noch overich waren (zijnde deur haer onbedacht toelaten te voren al van vele der voornaemste gesift) ooc in hande gekregen; En daer uyt verscheyde stoffen in een boec van meer andere zijnder eygen aenteyckeningen overgedragen: En onder anderen ettelicke gedachtenissen van

watermolens en ander cam en staefwerc, dat wij t'zjnder tijt en plaets hier of elders menen op te geven".

Achter de Verrechting van Domeine van 1649 (pp. 139—150) vindt men de „Tytels En Cortbegrypen Der Stucken welke behooren totte wisconftige gedachteniffen, inhoudende 'tgeene daer hem in geoeffent heeft den Doorluchtichften Vorft en Heere Maurits Prince van Orange &c. Ho. Lo. Memorie, Beschreven deur Zal. Simon Stevin Van Brugge, fo die uyt des selfs nagelaten handtschriften fijn by een gheftelt deur fyn Soon Hendrick Stevin. Ende hier gevought ten eynde als inde voorreden an den Lefer [in de *Materiæ Politicæ*] is verklaert.", alwaar men (pp. 3-4) leest: „[Ik] ga voort om te segghen waerom ick hier noch by ghevought heb de Opschriften en Cort begripen ghenoughsaem van al 't gheene anmerckens weerdich my ter hant gecommen: Wanttet ghebeuren conde, dat ymant sommighe der voorschreve vermiste stucken ontmoet sijnde en dienvolghens het werck volmaeckter kennende, mijn misgrepen overal bescheydelick anwees, waer deur men niet alleen dien laster te draghen, maer oock den becoftigher des drux te ghewisser ghevaer van verlies te verwachten had, soo men ten eerften alles uytgave, soo docht my gheen beter middel om daer teghen te voorsien, als deur het uytgheven deser Opschriften en Cort begripen bekend te maken, hoe 't mette saeck in 't gheheel gheleghen is, of misschien de Besitters der meerghemelte vermiste stucken, siende wat ons soo in stof als form ghebreeckt, mochten bewoghen worden tijdelick anwijfing daer af te doen, 't fy met die deur den druck ghe-meen te maken of anders; Want wy daerom geeren 't genot des Octroys, sooder eenich in gheleghen is, willen afftaen; Welverstaende in ghevalle bewesen of ons verthoont wort, die na des Schrijvers overlijden oirspronckelick niet ghecommen te wesen uyt des selfs hantschriften, jeghenwoordich onder ons beruftende, maer uyt eenighe der voorschreve vermiste."

Bedoelde stukken, in 1649 onder Hendrick Stevin berustende, waren:

- 1) Vande Crychconst.
- 2) Vanden Huysbau.
- 3) Spiegeling der Singconst.
- 4) Byvouch der Singconst.
- 5) Vande tweede oneventheyt [vereffening] na myn gevoelen.

- 6) Vande Metaelprouf.
- 7) Verrechting van Domeine.
- 8) Nederduytsche Dialectica.
- 9) Nederduytsche Retorica.
- 10) Nederduytsche Dichtconst.

Nos. 1 en 2 zijn grootendeels door Hendrick Stevin in de *Materiæ Politicæ* opgenomen; een deel van het 6<sup>e</sup> boek, Van aldervolmaecste Cammen en Staven, en het 11<sup>e</sup> boek, Vanden Handel der Waterschuyring, in diens *Wisconstich Filosofisch Bedryf* zijn eveneens aan No. 2 ontleend. De Koninklijke Bibliotheek te 's-Gravenhage bezit van Nos. 1 en 2 een fraai afschrift in drie deelen van 40, 87 en 98 pp. 2<sup>o</sup>., door Hendrick Stevin aan Prins Frederik Hendrik aangeboden.

Nos. 3 en 4 zijn door Bierens de Haan in de Bibliotheek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen teruggevonden en uitgegeven, tegelijk met een handschrift *Vande Molens*, in onze lijst niet genoemd, dat grootendeels eensluidend is met het 10<sup>e</sup> boek, Vanden Handel der Watermolens, in Hendrick Stevin's *Wisconstich Filosofisch Bedryf*.

No. 8 vormt de verbeterde en veranderde kopij van de *Dialectike* van 1585.

Van Nos. 5, 6, 9 en 10 zijn slechts de Cortbegrijpen bekend, door Hendrick Stevin medegedeeld.

Nu we de titels zoowel van Stevin's in druk verschenen werken als van diens nagelaten handschriften, voor zooverre deze niet verloren zijn gegaan, hebben leeren kennen, moeten we, om er de *Problemata Geometrica* mede te kunnen vergelijken, even stilstaan bij het 2<sup>e</sup> stuk van de *Wisconstige Gedachtenissen*, dat „Vande Meetdaet”, d. w. z. over de practijk der meetkunde, handelt en 203 foliobladzijden beslaat.

In het Cortbegryp, dat voorafgaat, deelt Stevin een en ander mede omtrent de eigenaardige inrichting van dit werk:

„Alsoo my beieghent vvas een Meetdaet te beschrijven om sijn Vorstelicke Ghenade hem in te oeffenē (die ick daer na deur hem oock verbetert en vermeerdert vant, als int volghende blijcken sal) Soo heb ick overleyt de ghemeenschap tusschen grootheyte en ghetal sulcx te vvefen dat vvat men met d'een doet der ghelijck met d'ander oock can ghedaen worden: Hier uyt heb ick my voorghefelt inde selve Meetdaet een oirden te

volghen lijkformich mette ghene die ghemeenlick by velen in-  
de Telconst gebruyckt vvort: Hoedanich is die? Ten eersten  
men leerter talletters maken. Ten tvveeden haer vveerde uyt-  
spreken of kennen als dit 7 seven te doen, dat 26 sessentvvintich.  
Ten derden de vier gemeene afcomsten als Vergaren, Aftrecken,  
Menichvuldighen, en Deelen. Ten vierden de Reghel der  
Everedenheyt. Ten vijfden de Reghel der everedelicke deeling.  
Ten festen de Verkeering der gebrokens tot een gemeen noemer,  
vvaer deur fy bereyt vvorden om daer mede te vveroken gelijk  
men met heele ghetalen doet.

VVelcke oirden na t'ghemeen oirdeel natuerlick ende bequaem  
in ghetalen sijnde, vvaer deurmen een ghemeene gront crijcht,  
tot afveerdiging van veel Telconstighe verschillen ons dickvvils  
ontmoetende. Soo sullen vvy der ghelijcke met grootheyt in  
dese Meetdaet volgen, achtende alsoo in vveynich gheschrift  
veel stof te begrijpen ende een ghemeene gront te legghen, vvaer  
deur den ghenen die verstaende, veel Meetconstighe verschillen  
hem te vooren commende sal connen afveerdigen. VVij sullen  
dan eerst beschrijven der grootheden Maeckfel of teyckening.  
Ten tvveeden de manier om haer vveerde uyt te spreken of  
kennen, als door meting haer begrijp te vinden. Ten derden  
de vier ghemeene afcomsten als Vergaren, Aftrecken, Menich-  
vuldighen, en Deelen. Ten vierden de Reghel der Everedenheyt.  
Ten vijfde de Regel der everedelicke snyding. Ten festen de  
verkeering, te vveten onghelijcke grootheden tot gelijcke, om  
daer mede te vvercken soomen met gelijcke doet, daer af  
beschrijvende ses verscheyden boucken. Ende alsoo de grootheyt  
drie afcomsten heeft, namelick lini, vlack, en lichaem, soo sal  
elck bouck drie deelen hebben; T'eerste van linien, Het  
tvveede van vlacken: Het derde van lichamen, ende elck deel  
sijn noodige voorstellen: Noch vervoughende daer de ghele-  
ghentheyt voordert, beneven de Meetconstighe vverckinghen  
door grootheden, oock haer vverckinghen door ghetalen, vvelcke  
inde daet, hier eens voor al geseyt, sekerder sijn dan de  
vvifconstighe door de grootheden self; Hoe vvcl nochtans de  
vvifconstighe ghemeenlick gront ende oirsaek sijn, vvaer uyt de  
vvercking door ghetalen gheformt vvort."

De Meetdaet bestaat dus uit zes boucken :

- 1) van het teyckenen der grootheden ;
- 2) van het meten der grootheden ;

3) vande vier afcomsten als vergaring, aftrecking, menichvuldig, en deeling der grootheden;

4) vande everedenheyts reghel der grootheden;

5) vande everedelicke snyding der grootheden;

6) van t' verkeerren der grootheden in ander formen; en daar de grootheden linien, vlacken en lichamen kunnen zijn, is ieder bouck verdeeld in drie deelen.

Voor de bewijzen van de toegepaste regels wordt meestal naar Euclides en Archimedes verwezen.

Bij het teyckenen en meten der grootheden wordt, zooals van een practicus als Stevin te verwachten was, de Werkdadige Meetkunst niet vergeten: we leeren twee punten door een rechte lijn verbinden door middel van de rechte rjje, de slachlijn, de baec en het meterferuys; een loodlijn oprichten en neerlaten op een rechte lijn door middel van den leughenfwee, den winckelhaeck en het meterferuys; een hoek maken even groot als een gegeven hoek door middel van het meterferuys, voorzien van traprondt [graadverdeeling] en fichtrije; — we worden geoefend in het gebruik van de keten en de roe bij het landtmeten; van het hangfnoer, het waterpas, het hanghende rondt en de drieroe (triquetrum) bij de bepaling van onghenakelijke langhden, als daar zijn de afstand van een paar ontoegankelijke punten, de hoogte van verwijderde torens, van dijken, wallen, bolwerken, enz.

Behalve loodlijnen en evenwijdigen leeren we in het 1<sup>e</sup> boek construeeren den cirkel, de ellips, de doorsnede van een omwentelingskegel en -ellipsoïde met een plat vlak, de spiraal van Archimedes, een kromme lijn, een veelhoek en een veelvlak, gelijkvormig met een gegeven kromme lijn, een gegeven veelhoek en een gegeven veelvlak, alsmede de netwerken van de vijf regelmatige en van acht halfregelmatige veelvlakken.

Bij de constructie van de ellips op gegeven assen bedient Stevin zich:

1) van de stelling, dat elk punt van een rechte lijn een ellips beschrijft, als twee van haar punten zich langs twee elkander rechthoekig snijdende rechte lijnen bewegen, waarbij het beschrijvende punt op een der verlengsels van de verbindingslijn der vaste punten wordt aangenomen;

2) van de bepaling der ellips;

3) van de stelling, dat de doorsnede van den mantel van een omwentelingscylinder met een plat vlak een ellips is.

Ook leert Stevin in een ellips de assen construeeren, alsmede, door omkeering van de constructie, onder 1) bedoeld, de eene as uit de andere as en een boog.

Bij de constructie, onder 3) bedoeld, alsmede bij die van de doorsnede van een omwentelingskegel en -ellipsoïde met een plat vlak, neemt Stevin een vlak, dat door de as loodrecht op het snijvlak aangebracht is, als vlak van teekening aan en bepaalt, ovenals in de Beschrijvende Meetkunde, punten van de doorsnede door middel van hulplakken, die rechthoekig op de as staan.

In de boeken, die volgen, vindt men de werkstukken meerendeels „door berekening” opgelost, zooals wij gewoon zijn ons uit te drukken; de constructie van de algebraïsche vormen, waartoe wij zouden geraken, maar die door Stevin niet worden opgeschreven, berust op de constructie:

- 1) van de derde evenredige tot twee gegeven rechte lijnen;
- 2) van de vierde evenredige tot drie gegeven rechte lijnen;
- 3) van de middelevenredige tusschen twee gegeven rechte lijnen;

4) van de twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen „na de vondt van Hero waer af t'bewijs ghedaen is van Eutochius inde uytlegging des 2 boucx vanden cloot en de feul van Archimedes”;

werkstukken, die het 1<sup>e</sup> deel van het 4<sup>e</sup> boek vormen, alsmede op de stelling van Pythagoras.

De constructie van twee middelevenredigen (die met passer en liniaal niet uitvoerbaar is) wordt in de Stereometrie toegepast bij werkstukken, die beantwoorden aan werkstukken in de Planimetrie, waarbij de constructie van één middelevenredige tot het doel leidt.

Moet er bv. een veelvlak geconstrueerd worden, dat gelijkvormig is met twee gegeven gelijkvormige veelvlakken en even groot als hun som en zijn  $a$  en  $b$  twee gelijkstandige lijnen van de gegeven veelvlakken, dan is  $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)}$  de gelijkstandige lijn van het gevraagde veelvlak, die men bepaalt, door na elkander te construeeren: 1) de derde evenredige  $b^2/a$  tot  $a$  en  $b$ ; 2) de derde evenredige  $b^3/a^2$  tot  $b$  en  $b^2/a$ ; 3) de som  $a + b^3/a^2$  van  $a$  en  $b^3/a^2$ ; 4) de twee middelevenredigen

$\sqrt[3]{a^2(a + b^3/a^2)} = \sqrt[3]{(a^3 + b^3)}$  en  $\sqrt[3]{a(a + b^3/a)^2}$  tusschen  $a$  en  $a + b^3/a^2$ .

In het bijzonder handelt het 3<sup>e</sup> boek over de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging (met een meetbaren vermenigvuldiger) en de (verhoudings-) deeling van rechte lijnen, cirkelomtrekken, gelijkvormige platte vlakken en gelijkvormige lichamen;

het 4<sup>e</sup> boek, behalve over de reeds genoemde werkstukken, over de constructie:

1) van een rechte lijn bij een gegeven rechte lijn, zóó dat deze zich verhouden als twee gegeven gelijkvormige platte vlakken (lichamen);

2) van een plat vlak (lichaam) gelijkvormig met een gegeven plat vlak (lichaam), zóó dat deze zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen;

3) van de gelijkvormige derde evenredige tot twee gegeven gelijkvormige platte vlakken (lichamen);

het 5<sup>e</sup> boek over de evenredige verdeling:

1) van rechte lijnen, alsmede over de wijze, waarop „eenighe uyrwerckmakers haer raeyerken in seer even ghedeelten teyckenen”, door de verdeling van een grooten cirkel „tuychverrekelick” op een kleinen concentrischen cirkel over te brengen;

2) van veelhoeken door een rechte lijn:

a) uit een gegeven punt in den omtrek;

b) uit een willekeurig gegeven punt;

c) evenwijdig aan een gegeven rechte lijn;

werkstukken, die „inde daet haar merckelick ghebruyck” hebben, „als onder anderen om landen in begeerde cavels of sticken te deelen”;

3) van prisma's en pyramiden door platte vlakken:

a) overeenkomstig die onder 2, c);

b) evenwijdig aan het grondvlak;

en het 6<sup>e</sup> boek over de vormverandering der figuren, o. a. over de constructie van een veelhoek (veelvlak), gelijkvormig met een gegeven veelhoek (veelvlak) en gelijk aan een ander gegeven veelhoek (veelvlak).

Ik wil dit beknopt overzicht van den inhoud der Meetdaet niet eindigen, zonder er op te wijzen, dat Stevin, voor wien onze taal de „aldercierlickste, alderrijckste, ende aldervolmaectste Spraecke der Spraecken” is, zich in dit werk, evenals elders,



uitsluitend van Nederlandsche termen bedient. Hij spreekt van driehouck, vierhouck, enz., veelhouck en gheschikte [regelmatige] veelhouck; van viercant, rechthouck, ruyt, scheefruyt en bijl [trapezium, aldus genoemd naar den vorm der eettafels bij de Grieken — Gr.  $\tau\rho\acute{\alpha}\pi\epsilon\zeta\alpha$  = tafel, van  $\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma$  = vier en  $\pi\acute{\epsilon}\zeta\alpha$  = voet; — Stevin verkiest den term „bijl” boven den meer gebruikelijken „mensa” — Lat. mensa = tafel — „omdat de vierhouck met twee ewewijdeghe ende twee onevewijdighe sijden (anfiende de bijlen en tafels soomense nu gemeenelick maeckt) beter een bijl dan een tafel gelijckt”]; van rondt, halfmiddellijn, halfmiddellijndeel [sector] en peezeel [segment]; van lanckrondt [ellipse], brantfne [parabool, en brander, omwentelingsparaboloïde, omdat „dier formen daet voornamelicxt bestaet int ontsteken ofte branden”], wassendefne [hyperbool] en slangtreck [spiraal van Archimedes]; van plat en bultich vlack; van rechtlinich plat en plattich lichaem; van pylaer, naelde, seul, keghel, ghecorte keghel, cloot, halfmiddellijnfne eens cloots [bolsector] en coordfne eens cloots [bolsegment]; van clootsche [omwentelingsellipsoïde] en keghelsche [omwentelingsparaboloïde en -hyperboloïde]; van gheschickte en gheschickte ghesneen lichamen [regelmatige en halfregelmatige veelvlakken]; van schilbooch [complement] en halffrontvervulling [supplement]; van houckmaet [sinus], schilboochs houckmaet [cosinus], raecklijn [tangens] en snylijn [secans].

Behalve bij Cantor <sup>1)</sup> vond ik Stevin's *Problemata Geometrica* vermeld bij Van Roomen <sup>2)</sup>, Hendrick Stevin <sup>3)</sup>, Goethals <sup>4)</sup>, Steichen <sup>5)</sup>, Quetelet <sup>6)</sup> en Bierens de Haan <sup>7)</sup>, alsmede in de

<sup>1)</sup> Cantor, t. a. p., II p. 528.

<sup>2)</sup> Van Roomen, *Idea Mathematicae Pars Prima, sive Methodus polygonorum qua laterum, perimetrorum et arearum cuiuscunque polygoni inuestigandorum ratio exactissima et certissima vna cum circuli quadratura continentur*, Antwerpen 1593 en Leuven 1593, Voorrede.

<sup>3)</sup> Hendric Stevin, *Wisconstich Filosofisch Bedryf*, Leiden 1667, I Boec, pp. 3—4.

<sup>4)</sup> Goethals, *Notice Historique sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin*, de Bruges, Brussel 1842, pp. 5 en 62.

<sup>5)</sup> Steichen, *Mémoire sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin*, Brussel 1846, pp. 6, 100—103 en 190—197.

<sup>6)</sup> Quetelet, *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges*, Brussel 1864, p. 167 Noot.

<sup>7)</sup> Bierens de Haan, t. a. p., pp. 186—187 en 214—215.

bibliographieën van Andreas <sup>1)</sup>, Sweertius <sup>2)</sup>, Vossius <sup>3)</sup>, Foppens <sup>4)</sup>, Bayle <sup>5)</sup>, Jöcher <sup>6)</sup> en Vander Haeghen <sup>7)</sup>.

Adriaan van Roomen (Romanus, geb. 1561 te Leuven, overl. 1615 te Mainz), medicus en wiskunstenaar, deelt in zijn *Idea Mathematica*, waarin de verhouding van den omtrek van een cirkel tot zijn middellijn in vijftien decimalen benaderd wordt, een en ander mede omtrent de voornaamste mathematici van zijn tijd. Van Stevin zegt hij:

„Simon Stevinus Brugensis vir certè supra communem omnium captum, in Mathesi versatus Arithmeticam absoluta methodo Gallicè conscriptam, in lucem emisit, ac talem quidem, ut si nihil aliud ab eo expectaretur, jam omnibus satis se mundo fuisse utilissimum declarasset; in ea etenim Arithmeticae vulgaris atque etiam figuratae seu Cossicae regulas, in pulchriorem quam hactenus ab ullo factum sit, ordinem digessit, praxin subjungit, Diophantum illustravit, Euclidis totum librum decimum, qui est de incommensurabilibus quantitatibus, paucissimis propositionibus comprehendit, plurimaeque alia complectitur rara lectuque dignissima. Huic Arithmeticae confinem Geometriam universam simili ordine et methodo, similibusque regulis scribere conatur, cujus exiguam quandam portionem in libris quinque problematum Geometricorum exhibuit. Nec iis contentus fuit, sed praeterea nobilissimam et abstrusissimam eam matheseos partem quae Staticè dicitur, non modo instauravit illustravitve, sed è fundamentis verissimis, longaue experientia confirmatis, de novo extruxit, linguaue Belgica pura et nitida (quam linguarum omnium totius orbis docet esse principem) conscriptam in lucem emisit: cui operi quid statui possit par non video. Is vir adeo rei ponderariae peritus est, ut nullum ei offerri

---

<sup>1)</sup> Andreas, *Bibliotheca Belgica*, Leuven 1623, p. 719, en Leuven 1643, p. 813.

<sup>2)</sup> Sweertius, *Athenæ Belgicæ*, Antwerpen 1628, p. 677.

<sup>3)</sup> Vossius, *De quatuor Artibus Popularibus, de Philologia, et Scientiis Mathematicis*, Amsterdam 1660, p. 336.

<sup>4)</sup> Foppens, *Bibliotheca Belgica*, Tomus II, Brussel 1739, p. 1102.

<sup>5)</sup> Bayle, *Dictionaire Historique et Critique*, Tome IV, Amsterdam, Leiden, Den Haag, Utrecht 1740, p. 279.

<sup>6)</sup> Jöcher, *Allgemeines Gelehrten-Lexicon*, 4<sup>ter</sup> Theil, Leipzig 1751, p. 836.

<sup>7)</sup> Vander Haeghen, *Bibliotheca Belgica*, Tome XXIII, Gent en 's-Gravenhage 1880—1890, S 125.

valeat pondus, quantumcunque grave, quod non parvis viribus, facillique instrumento Pantocratore movere possit. Hinc in regionibus maritimis, machinarum quibus terra à mari defendatur, praefectus est constitutus; quod munus eum magna cum laude, omniumque admiratione obire intelligo.” <sup>1)</sup>

Omstreeks 1593, toen de *Idea Mathematica* verscheen, zou Stevin zich dus hebben bezig gehouden met de samenstelling van een werk over meetkunde, waarvan hij in zijn vijf boeken *Problemata Geometrica* reeds een proeve had geleverd (cujus exiguam quandam portionem in libris quinque problematum Geometricorum exhibuit) en dat naar het voorbeeld van zijn *Arithmetique* van 1585 zou worden ingericht (simili ordine et methodo, similibusque regulis).

Hendrick Stevin en Quetelet, naar wien Cantor verwijst, citeeren Van Roomen's lofspraak op Stevin.

„Waer in dan ons by geval ter hant quam”, aldus Hendrick Stevin, „hoe den vermaerden Wisconstenauer en Geneesheer Adrianus Romanus Lovanensis in sijn boec genaemt *Idea Mathematicæ pars prima; Sive Methodus Polygonorum. &c.* anno 1593, (besig synde den leser ettelicker voornaemste Geleerde sijns tijts besondere wetenschappen aen te tekenen) van ons Vader aldus uytvoer: *Simon Stevin van Brugge, een man, seker boven het begrip van allen, inde wisconsten geoeffent, heeft in volmaeckter oirden en Fransche tael int licht gebracht de Telconst, sulx dat, in geval schoon niet anders van hem verwacht en wiert, hy nu van yder mocht geseyt worden, der werelt ten hoogsten nut geweest te hebben; Want inde selve stelt hy de gemene Telconstige en selregelsche regelen in deftiger oirden als tot noch toe van yemant gedaen is, en vougher de Teldaet by, verklaert Diophantus, vervanght het geheele thiende boec van Euclides, tuelc van de onmeetbare grootheden is, in seer weynig voorstellen, ende begrijpter veel ander besonder ende gansch leesweerdige slucken in. Tot dese Telconst pijnt hy sich, de gemene Meetconst, in gelijker oirden en Regels te beschryven, vant welc hy seker kleyn deel inde vijf boecken der Meetconstige voorstellen heeft verthoont. Noch daer en heeft hy het niet by gelaten, maer heeft bovendien niet alleen weerom opgerecht, ofte bekend gemaect dat alderedelste*

---

<sup>1)</sup> Dit uittreksel werd mij vanwege de Bibliothèque Royale de Belgique te Brussel op mijn verzoek welwillend verstrekt.

*en alderverborgenſte deel der Wiſconſten, de Weegconſt genaemt, maer heeft die uyt ſeer vvarachtige gronden, deur langdurige ervaaringe beveſlicht, van nieus opgetimmert, en in puere ſuyvere Nederduytsche tarl (die hy aenvvijs, aller Talen des Eertbodems Prince te vveſen) beſchreven, in het ligt gebracht: Welc werx vveerga, 't ſy oock vvatter voorgeſtelt kan vvorden, ic niet en ſie. Die man is der mate inde wichtige ſaken ervarz, dat hem geen gewicht can ontmoeten, hoe ſvvaer 'tooc zy, dat hy niet met kleyne macht en ſlecht reetſchap can bevvegen. Hierom is het, dat hem in an Zee gelege lantſchappen, de opſicht bevolen is over de reetſchappen, door welke het lant tegen de Zee, beſchermt wort; vvelc ampt ic verſta, dat hy met grooten lof en vervvondering van allen uytvoert."*

„Maer wat mocht doch die man dan wel geſegt willen hebben", roept Heer Hendrick in vervoering uit, „ſo hy de wiſconſtige gedachteniſſe, De Sterctebou, de Legermeting, De nieuwe manier van Sterctebou deur ſpilſluysen, alle deur hem in Nederduyts geſchreven en deur andere vermaerde mannen int latijn overgeſet, geſien had. Ja hoe mocht hij dan wel gekreten hebben, ſo hem het boec der Burgerlicke ſtoffen voorgecommen waer? En daer toe noch het geen wy van hem in dit ons bedrijf te pas ſullen brengen? ende bovendien het geen van hem onder ons noch in geſchrift en naar ons ſin vergaert legt? Ia ſoder dan noch by quam, 'tgeener deur onachtſaemheyt, naer ſijn doot, uyt ontleent en niet weer te recht gecomen is? Want hy [Van Roomen] ſcheen de dingen ſonder aenſien van perſoon of taelkundigheyt alleen na waerdy op te nemen, ſo gy int ſelve boec aen 't uytmeten des wiſconſtigen talents van den duytsklerkigen leec Ludolf van Collen ſien cont." (pp. 4—5)

Omtrent den inhoud der *Problemata Geometrica* deelen zoolmin Goethals en de aangehaalde bibliografen als Van Roomen, Hendrick Stevin en Quetelet bijzonderheden mede; Bierens de Haan bepaalt zich tot een opgaaf van den titel en de opſchriften van de vijf boeken; Steichen daarentegen geeft een beknopt overzicht van den inhoud van elk boek en uittreksels uit het 1<sup>e</sup> en het 3<sup>e</sup> boek: „Il est déplorable de voir l'histoire des sciences rester muette encore une fois sur ce beau travail", zoo laat hij zich op p. 102 uit: „nous n'en avons pu donner qu'une idée; vouloir l'analyser d'une manière satisfaisante, ce serait

se condamner à le traduire à peu près en entier ou à le copier”.

Van Roomen ontleent zijn mededeelingen omtrent een door Stevin uit te geven *Geometria Universa* aan de *Problemata Geometrica* zelf, waarin de schrijver meermalen van een werk over meetkunde gewaagt, dat hij eerlang hoopt te laten verschijnen; in dit werk zal hij de methode der rekenkunde toepassen en o. a. over de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging, de deeling en de evenredigheid van lijnen, vlakken en lichamen handelen, evenals hij zich reeds in het 2<sup>e</sup> boek van de *Problemata Geometrica* van de *regula falsi* der rekenkunde als „*regula falsi continuæ quantitatis*” bij de oplossing van meetkundige werkstukken bedient <sup>1)</sup>.

Met dit werk over meetkunde wordt de Meetdaet bedoeld, die als 2<sup>e</sup> stuk van de *Wisconstige Gedachtenissen* in 1605, dus ruim twintig jaren na de *Problemata Geometrica*, het licht zag. Dit blijkt genoegzaam uit de inrichting der Meetdaet, die beantwoordt aan Stevin's voornemen, op p. 38 van de *Problemata Geometrica* uitgedrukt, om zijn *Geometria* samen te stellen „in *Methodum Arithmeticæ methodo similem*”. De vertraging in de uitgaaf dier *Geometria*, door Stevin in de *Problemata Geometrica* als op handen voorgesteld, laat zich m.i. aldus verklaren:

Tijdens de samenstelling van de *Problemata Geometrica* moest Stevin met arbeid overladen zijn geweest. Immers in 1585

<sup>1)</sup> Quoniam geometriam (quam breuiter speramus nos edituros) in *Methodum Arithmeticæ methodo similem* digessimus (quod naturalis ordo videtur requirere propter magnam convenientiam continuæ & discontinuæ quantitatis vbi quodcunque genus magnitudinis, vt sunt linea, superficies, corpus, per quatuor species, vt Additionem, Subtractionem, Multiplicationem & Diuisionem, præterea per regulas, vt proportionum &c. tractabimus) offerebat se quoque ex ordine *Problemata* quoddam, vbi per falsam positionem veram solutionem petitam Geometricè inueniremus. p. 38.

Reliquos modos qui per instrumenta expediuntur, in nostra *Geometria* suis instrumentis accommodatis breuiter speramus nos edituros. p. 85.

Chordæ segmentum sphaerale vocamus partem sphaeræ plano à sphaera sectam, ratio huius appellationis vna cum ratione nominis diametralis segmenti sphaeralis in nostra *Geometria* dicitur p. 89.

de quorum omnium constructione in nostra *Geometria* abunde dicitur. p. 91. (quarum descriptionum *Problemata* in nostra *Geometria* ordine collocabimus). p. 100.

verschenen de Bewysconst, de Thiende, de Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique, en in 1586 de Beghinselen der Weeghconst, de Weeghdaet en de Beghinselen des Waterwichts; de Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique werden in het Fransch uitgegeven, de Geometria zou, vermoed ik, evenals de Problemata Geometrica, in het Latijn worden bewerkt. Maar men wist Stevin te bewegen zijn geschriften over wiskunde voortaan in de „Duytsche tael” te laten verschijnen. Immers in de opdracht van zijn Bewysconst aan de „Neerduytschen” laat hij zich (pp. 4–6) aldus uit: „... nadien sommighe mijn seer ghemeene vrienden ende Landtslieden, in ander Spraecken onervaren, nochtans der Consten uytnemende liefhebbers, verstaen hadden, dat wy yet der Mathematiken inden druck soudē doen afveerdighen, maer in vreemder talen, en hebben my (hoe wel mocht yemandt segghen niet begheerens weert) niet slichtelick ghebeden sulcx inde onse oock te doen, maer bycans met redenen willen overtuygen geen behoorlicke gheneghentheyte te draghen, tot onsen Vaderlande, diens voorderinghe nochtans, elck naer zijn uyterste vermoghen, boven vrienden en maghen, ja voor sijn eyghen selfs, is schuldich te beneerstighen; dit soo beleydende ende voortdringende, dat en hadde ick t'mijnder bate niet ghehadt, de ghemeene maniere van doen, ofte de Ghewoonte, die niet t'onrecht d'ander Natuere, gheseyt wort, swaerlick soude ick my ontschuldicht hebben: Ten eynde hun niet alleene belovende naer mijn vermoghen in haerlieder begheeren te voldoen, maer my selfs door eenen yver daer toe verbonden achtende, hebbe my beneersticht 'tselve totter Daet te brenghen: Maer siende dat sich daer in ontmoete Dialectike stijl, Spreucken, ende VVoorden, die sij Vocabula Artium noemen, welcke (naer de maniere der gheenre diese int Duytsch gebruycken) ghenoeemt op sijn Latijnsche, den onervarenen dier Talen soo duyfter vallen, datse de saecke niet grondelick verstaen en connen, oock mede dat int Neerduytsch hare beteeckeninghe onbekent blijft, overmits de Dialectike daer in noch niet beschreven en is: Soo vandt ick my bycans als bedwonghen, voor het uytgeven dies voorseyt is, dese Duytsche Dialectike af te veerdighen”.

De Arithmetique en de Pratique d'Arithmetique waren evenwel, zoo stel ik mij de zaak voor, reeds te ver gevorderd,

dan dat aan den wensch van Stevin's vrienden kon worden voldaan, maar de Geometria zou worden omgewerkt en dit werd de oorzaak, dat dit werk voorloopig bleef liggen: de zooveel belangrijker Weeghconst, Weeghdaet en Waterwicht namen al Stevin's tijd in beslag.

Eerst omstreeks 1592, toen hij met Prins Maurits in aanraking kwam, werd het manuscript der Geometria weer door Stevin ter hand genomen, doordat hem „beieghent vvas een Meetdaet te beschrijven om sijn Vorstelicke Ghenade hem in te oeffenē” <sup>1)</sup>. Met de overige „onghedruete VVisconstige gedachtenissen” <sup>2)</sup> werd de Meetdaet door den Prins op al zijn tochten medegenomen, „niet sonder perikel van te meughen verloren vvorden, te meer dat die reynen de crijchfortuynen gemeenelick ondervvorpen vvare” <sup>3)</sup>. Het was juist de vrees, dat „sulck onghemaal daer over quaem” <sup>4)</sup>, die tot de uitgaaf deed besluiten, te beginnen met de Meetdaet, die Stevin „deur sijn Vorstelicke Ghenade oock verbeteret en vermeerderet vant” <sup>1)</sup>.

De Problemata Geometrica worden door Stevin nergens aangehaald, zelfs niet in zijn Meetdaet, hoewel in dit werk, zooals nader zal blijken, de inhoud van de Problemata Geometrica grootendeels, vermeerderd en verbeterd, teruggevonden wordt, waarom de vijf boeken Meetkundige Werkstukken door Girard dan ook niet in diens overigens volledige uitgaaf van de Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin zijn opgenomen.

Zonder twijfel hebben deze oorzaken met de zeldzaamheid der Problemata Geometrica samengewerkt, om Stevin's eerstlingsarbeid over meetkunde in vergetelheid te doen geraken. De toenmalige bibliothecaris van de stad Brussel, Goethals, schijnt de eerste geschiedvorscher te zijn geweest, door wien er (in 1842) opnieuw de aandacht op gevestigd werd <sup>5)</sup>; pas een halve eeuw later (in 1892) vindt men er voor de eerste maal — voor zoover ik heb kunnen nagaan — door een historiograaf buiten België en Nederland (Cantor) melding van gemaakt. Hoe evenwel Cantor, die o.a. Steichen en Quetelet

<sup>1)</sup> Cortbegryp der Meetdaet.

<sup>2)</sup> Voorreden der Wisconstige Gedachtenissen.

<sup>3)</sup> Cet ouvrage . . . aurait échappé à notre attention, sans la mention qui en est faite dans la brochure de M. Goethals. Steichen, t. a. p, p. 100.

als zijn bronnen citeert, op grond van de omstandigheid, „dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608 [*de Hypomnemata Mathematica*], welche in manchen Dingen von der französischen Ausgabe [*Girard's Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin*] sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung *De miscellaneis* besitzt, welche dort ganz fehlt, auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Herausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und desshalb vorläufig zurückgelegt wurden”<sup>1)</sup>, de mogelijkheid kan veronderstellen, „dass jene erste geometrische Schrift [*de Problemata Geometrica*] für uns gänzlich verloren gegangen wäre”<sup>1)</sup>, dit moet ik verklaren niet te begrijpen.

Evenmin ben ik te weten kunnen komen, op wiens gezag Cantor het jaar der uitgaaf van de *Problemata Geometrica* op 1585 vaststelt<sup>1)</sup>, waar alle bronnen, die ik heb kunnen raadplegen, van Andreas (1623) af tot Vander Haeghen (1880—1890) toe, eenstemmig als zoodanig 1583 opgeven. De *Problemata Geometrica* zelf verschaffen omtrent dien datum nergens inlichtingen: de titel vermeldt wel Antwerpen als plaats van uitgaaf, maar geen jaartal; evenmin zijn de opdracht en de narede gedateerd. Alleen blijkt uit een opmerking van Stevin, dat het werk van ouder dagteekening is dan de *Arithmetique* van 1585 (met Privilegie van 20 December 1584): vermoedelijk zal de datum 1583, door Andreas, een tijdgenoot van Stevin, opgegeven, dus wel de juiste wezen.

Bedoelde opmerking, die op p. 9 van de *Problemata Geometrica* voorkomt, houdt in, dat Stevin de meening deelt van hen, die onmeetbare wortels getallen noemen, over welke quæstie hij zegt breeder te zullen uitweiden in zijn *Algebra*<sup>2)</sup>, waaronder de in 1585 verschenen *Arithmetique* moet worden verstaan.

Inderdaad vindt men in dit werk op pp. 33—37 de stelling verdedigd: „*Qv'Il Ny A Avcvns Nombres Absvrdes, Irrationels, Irreguliers, inexplicables, ou foursds*”. „*Finalement*”, zoo besluit Stevin dit pleidooi, „*ce que nous n'auons fatiffaict en ceste*

<sup>1)</sup> Zie de aanhaling op pp. 99—100.

<sup>2)</sup> (*fumus autem in sententia illorum qui radices inexplicabiles numerum vocant, de quo aliàs in nostra Algebra latius dicetur*). p. 9.



matiere par les argumens precedens, nous l'accomplirons contre tous aduerfaires, par la 4<sup>e</sup> thefe <sup>1)</sup> de noz thefes Mathematiques", die, zeven in aantal, op pp. 202—203 van de Pratique d'Arithmetique worden medegedeeld: „L'heure & lieu de leur expedition se declairera à temps oportun" (p. 203).

Stevin droeg zijn *Problemata Geometrica* op aan Maximiliaan van Cruiningen (1555—1612), burggraaf van Zeeland en Generaal der Artillerie in Statendienst, een ambt, dat hij als katholiek onder Leicester's bewind moest neerleggen. „Zoo wij mochten vernemen, dat deze werkstukken U bevallen", aldus Stevin in zijn narede tot den Heer van Cruiningen, „dan zullen wij eenige andere geheimen der wiskunde [van Weeghconst en Waterwicht waarschijnlijk], door ons onthuld, eveneens onder bescherming van Uw naam bekend maken" <sup>2)</sup>, waarvan evenwel niet gekomen is.

Stevin's *Problematum Geometricorum Libri V*, waarvan ik den inhoud thans boek voor boek ga beschrijven, beslaan 119 pp. klein-quarto en handelen:

1) over de verdeeling van veelhoeken in gegeven verhouding:

- a) door een rechte lijn uit een punt in den omtrek;
- b) door een rechte lijn evenwijdig aan een der zijden; (33 pp.)

2) over de toepassing van de regula falsi bij de oplossing van meetkundige werkstukken; (8 pp.)

3) over de vijf regelmatige veelvlakken, de vijf vermeerderde regelmatige veelvlakken en de negen afgeknotte regelmatige veelvlakken, die in een bol beschreven kunnen worden; (38 pp.)

4) over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met een gegeven meetkundig lichaam en gelijk aan een ander gegeven meetkundig lichaam; (18 pp.)

<sup>1)</sup> Qu'il n'y à aucuns nombres absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds. Pratique d'Arithmetique, p. 202.

<sup>2)</sup> Epilogus.

Hæc sunt Generosiß. D. quæ tibi dicare destinauimus, quæ si A. T. grata esse sentiemus, alia habemus Mathesium arcana sub tui Nominis auspicijs proditura: Interim hæc qualiacunque boni confules. Vale. Ego tibi me quam officiosissimè commendabo Lugduni Bataurum [alwaar Stevin van 1581—1590 verblijf hield]. p. 119.

5) over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met twee gegeven gelijkvormige meetkundige lichamen en gelijk aan: a) hun som; b) hun verschil. (17 pp.)

Wat de toegepaste stellingen aangaat, wordt uitsluitend verwezen naar Euclides' Elementen (ed. Clavius, Keulen 1574).

Aan de behandeling van de werkstukken in het 1<sup>e</sup> boek laat Stevin een beknopt overzicht (13 pp.) over verhoudingen en evenredigheden voorafgaan, dat men, in hoofdzaak onveranderd, als „Troisiesme Partie Des Definitions De La Raison Et Proportion Arithmetique, & de leurs dependances” op pp. 55—70 van zijn Arithmetique terugvindt.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat dit overzicht naar het 5<sup>e</sup> boek van Euclides' Elementen bewerkt is, dat uitsluitend over verhoudingen en evenredigheden handelt (met diens aantekeningen 91 pp. in de ed. Clavius) en, wat zijn wezenlijken inhoud aangaat, van Eudoxus, een leerling van Plato, afkomstig schijnt te wezen.

Er zijn verhoudingen (redens) van twee termen (rationes binariæ), van drie termen (rationes ternariæ), enz. Verhoudingen van twee termen kunnen meetbaar (explicabilis) en onmeetbaar (inexplicabilis) wezen. Meetbare verhoudingen van twee termen heeten verhoudingen van gelijkheid (rationes æqualitatis), als ze  $= 1$  zijn, en verhoudingen van ongelijkheid (rationes inæqualitatis), als ze  $\neq 1$  zijn, in het bijzonder van grooter ongelijkheid (majoris inæqualitatis), als ze  $> 1$ , en van kleiner ongelijkheid (minoris inæqualitatis), als ze  $< 1$  zijn. Verhoudingen van grooter ongelijkheid noemt men enkelvoudig (simplex), als zij  $< 2$ , en samengesteld (composita), als zij  $\geq 2$  zijn. Enkelvoudige verhoudingen heeten superparticularis, als de 1<sup>e</sup> term éénmaal den 2<sup>en</sup> term en één onderdeel van den 2<sup>en</sup> term bevat, en superpartiens, als de 1<sup>e</sup> term éénmaal den 2<sup>en</sup> term en eenige onderdeelen van den 2<sup>en</sup> term bevat. En samengestelde verhoudingen heeten multiplex, als de 1<sup>e</sup> term eenige malen den 2<sup>en</sup> term bevat, multiplex superparticularis, als de 1<sup>e</sup> term eenige malen den 2<sup>en</sup> term en één onderdeel van den 2<sup>en</sup> term bevat, en multiplex superpartiens, als de 1<sup>e</sup> term eenige malen den 2<sup>en</sup> term en eenige onderdeelen van den 2<sup>en</sup> term bevat.

Verbeelden  $k$ ,  $l$  en  $n > l$  aantallen, grooter dan één, dan

kan men de vijf soorten van verhoudingen van grooter ongelijkheid aldus voorstellen <sup>1)</sup> :

$$\begin{aligned}(n+1) : n & \dots \text{superparticularis,} \\ (n+1) : n & \dots \text{superpartiensi,} \\ kn : n & \dots \text{multiplex,} \\ (kn+1) : n & \dots \text{multiplex superparticularis,} \\ (kn+1) : n & \dots \text{multiplex superpartiensi.}\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Ik bedien mij van de tegenwoordige notatie van verhoudingen en evenredigheden; in de *Problemata Geometrica* vindt men alleen de uitdrukkingen: ratio A ad B, ratio binaria AB, ratio ternaria ABC, proportio (binaria) ABCD [lees: ut A ad B sic C ad D], proportio ternaria ABC, (ad) DEF, proportio continua ABC, enz.; in de *Arithmetique* daarentegen noteert Stevin aldus: 6.3.—4.2., 5.1.4.7.—15.3.12.21., enz.

Oughtred (1631) bedient zich bij verhoudingen van de teekens ::,  $\frac{a}{b}$  en  $\frac{a}{b}$  voor =, > en < (overigens van =,  $\sqsubset$  en  $\sqsupset$ ); een gedurige evenredigheid duidt hij met  $\div$  aan. Zoo schrijft hij:

$$\begin{aligned}a.b :: c.d \text{ voor } a:b=c:d, \\ a.b.c.d \div \text{ voor } a:b=b:c=c:d.\end{aligned}$$

Toen evenwel in de 17<sup>e</sup> en 18<sup>e</sup> eeuw de stip meer algemeen als decimaal- en als maalteeken in gebruik werd genomen, verdween zij langzamerhand uit de verhoudingen. Niettemin bleef Oughtred's notatie tot in het begin van de 19<sup>e</sup> eeuw hier en daar stand houden, hoewel men naast  $a.b :: c.d$  reeds bij

Wallis (1685)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  en bij Newton (1763)  $a:b :: c:d$  aantreft. Volgens

Van Swinden (1790) zouden de schrijfwijzen  $a:b=c:d$  en  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  van Leibniz afkomstig wezen.

Bij Herigone (1634), die zich van de teekens  $\pi$ , 2|2, 3|2 en 2|3 bedient, om „staat tot”, =, > en < aan te duiden, vindt men  $a:b=c:d$  aldus voorgesteld:

$$a\pi b2|2c\pi d;$$

De la Hire (1710) noteert:

$$a|b|c|d,$$

en Dilworth (1743):

$$a \dots b :: c \dots d.$$

Bij reken- en meetkundige evenredigheden en reeksen blijven tot op den huidigen dag de schrijfwijzen:

$$a.b:c.d \text{ voor } a-b=c-d,$$

$$a:b :: c:d \text{ voor } a:b=c:d,$$

$$\div a.(a+v).(a+2v) \dots \{a+(n-1)v\}.$$

$$\div a:aq:aq^2: \dots aq^{n-1},$$

die men bij buitenlandsche schrijvers niet zelden ontmoet, aan Oughtred herinneren.

De verhoudingen van kleiner ongelijkheid kunnen als omkeeringen van die van grooter ongelijkheid worden aangemerkt; zij dragen dezelfde benamingen met voorvoeging van „sub”:

- $n : (n + 1)$  . . . subsuperparticularis,  
 $n : (n + l)$  . . . subsuperpartiensi,  
 $n : kn$  . . . submultiplex,  
 $n : (kn + 1)$  . . . submultiplex superparticularis,  
 $n : (kn + l)$  . . . submultiplex superpartiensi.

In het bijzonder noemt men de verhoudingen :

- 1)  $3 : 2$  . . . sesquialtera,  $4 : 3$  . . . sesquitercia, enz.;  
 2)  $11 : 9$  . . . superbipartiensi nonas,  
      $9 : 5$  . . . superquarpartiensi quintas, enz.  
 3)  $2 : 1$  . . . dupla,  $3 : 1$  . . . tripla, enz.  
 4)  $9 : 4$  . . . dupla sesquiquarta,  
      $19 : 6$  . . . tripla sesquisexta, enz.;  
 5)  $23 : 5$  . . . quadrupla supertripartiensi quintas,  
      $74 : 11$  . . . sextupla superoctopartiensi undecimas, enz.

Eenzoo:

- 1)  $2 : 3$  . . . subsesquialtera,  $3 : 4$  . . . subsesquitercia, enz.;

Men kan een verhouding vervormen (transformare), omkeeren (invertere) en verstoren (perturbare).

Een ratio transformata ontstaat, door vormen, die lineair uit de termen van een verhouding zijn samengesteld, te vergelijken, — een ratio inversa, door van een verhouding van twee termen de termen te verwisselen, — en een ratio perturbata, door van een verhouding van  $n$ , d. i. minstens drie termen den  $2^{\text{de}}$  term met den  $3^{\text{de}}$ , den  $3^{\text{de}}$  term met den  $4^{\text{de}}$ , . . . den  $(n - 1)^{\text{de}}$  term met den  $n^{\text{de}}$  en eindelijk den  $1^{\text{de}}$  term met den  $2^{\text{de}}$  te vergelijken.

Men ontmoet dezelfde onderscheidingen, met één vermeerderd, bij de evenredigheden, d. z. gelijkheden van twee verhoudingen van twee, drie, enz. termen (proportiones binariae, ternariae, etc.): de  $1^{\text{e}}$  termen van de twee redens heeten overeenkomstige termen (termini homologi); evenzoo de  $2^{\text{e}}$  termen, enz.

Een proportio transformata ontstaat, door van een evenredigheid de redens op dezelfde wijze te vervormen, — een proportio inversa, door de redens om te keeren, — en een proportio alterna, door de verhoudingen van twee paren overeen-

komstige termen van de redens aan elkander gelijk te stellen. Een proportio perturbata eindelijk levert pas evenredigheden op, als men een der redens verstoort; telt elke reden  $n$ , d. i. minstens drie termen, dan staan de  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$ , . . .  $(n-1)^{\circ}$  term van de  $1^{\circ}$  reden tot elkander als de  $2^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$ , . . .  $n^{\circ}$  term van de  $2^{\circ}$  reden en de  $(n-1)^{\circ}$  en  $n^{\circ}$  term van de  $1^{\circ}$  reden als de  $1^{\circ}$  en  $2^{\circ}$  term van de  $2^{\circ}$  reden.

Van de evenredigheid  $9 : 6 = 15 : 10$  bv. is  $(9 + 6) : 6 = (15 + 10) : 10$  een proportio transformata,  $6 : 9 = 10 : 15$  een proportio inversa en  $9 : 15 = 6 : 10$  een proportio alterna. En de verhoudingen  $12 : 8 : 4 : 2$  en  $6 : 3 : 2 : 1$  bv. vormen een proportio perturbata, omdat zoowel  $12 : 8 : 4$  en  $6 : 3 : 2$  als  $4 : 2$  en  $6 : 3$  een werkelijke evenredigheid (proportio positiva) uitmaken.

De term proportio transformata werd door Stevin ingevoerd, om een veertiental stellingen over evenredigheden, die bij Euclides afzonderlijk vermeld worden, tot één enkele te kunnen samenvatten <sup>1)</sup>.

En de proportiones perturbatæ ontleenen haar beteekenis aan de omstandigheid, dat de uiterste termen van de  $1^{\circ}$  reden evenredig zijn met die van de  $2^{\circ}$  reden (Eucl., Lib. V, Propos. 23). Immers, als  $a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n$  en  $b_1, b_2, b_3, \dots b_{n-1}, b_n$  de redens van een proportio perturbata vormen, dan is  $a_1 : a_{n-1} = b_2 : b_n$  en  $a_{n-1} : a_n = b_1 : b_2$ , waaruit door vermenigvuldiging van de overeenkomstige redens onmiddellijk volgt, dat  $a_1 : a_n = b_1 : b_n$  is.

Evenals bij de meeste van zijn tijdgenooten heet bij Stevin een meetkundige reeks een gedurige evenredigheid (proportio continua), omdat van zulk een reeks de  $1^{\circ}$  term staat tot den  $2^{\text{en}}$  als de  $2^{\circ}$  term tot den  $3^{\text{en}}$  als de  $3^{\circ}$  term tot den  $4^{\text{en}}$ , enz.

Bij een gedurige evenredigheid wordt de verhouding van den  $1^{\text{en}}$  term tot den  $3^{\text{en}}$  2-maal zoo groot genoemd als die van den  $1^{\text{en}}$  term tot den  $2^{\text{en}}$ ; die van den  $1^{\text{en}}$  term tot den  $4^{\text{en}}$  3-maal zoo groot, enz.

Door uitbreiding van dit begrip ontstaan de vier bewerkingen

<sup>1)</sup>

Nota.

Hac definitione transformatæ proportionis concessa, superflua videntur theoremata 1. 2. 3. 4. 5. 6. 12. 15. 17. 18. 19. 20. 22. & 24. lib. 5. Euclid. quæ omnia cùm multis alijs similibus (cùm omnia sub hac vnica definitione comprehendantur) in vno theoremate possent explicari. p. 16.

met verhoudingen, de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging en de deeling, die in de muziekleer en de gezelschapsrekening toepassing vinden.

Stevin behandelt de „quatre computations des Raifons” op pp. 14—27 van zijn *Pratique d'Arithmetique*. „Et par les precedens [verklaringen] l'entendra”, zegt hij, „que Raifon  $\frac{3}{2}$  aioustée à Raifon  $\frac{4}{3}$ , faict Raifon  $\frac{7}{2}$ , c'est à dire en sons, que la quinte avec la quarte, faict l'octaue, & ainsi des autres” (p. 17) en „que de Raifon  $\frac{3}{2}$  soubftraict Raifon  $\frac{4}{3}$ , reste Raifon  $\frac{1}{6}$ , c'est à dire en sons, que de la quinte soubftraict la quarte, reste la seconde, de laquelle les termes sont en Raifon  $\frac{2}{1}$ , & ainsi des autres” (p. 18), want „addition des Raifons ne requiert autre operation que la multiplication des rompuz” [breuken] (p. 17) en „soubstraction des Raifons ne requiert autre operation que diuision des rompuz” (p. 18).

Evenzoo levert de verhouding  $\frac{3}{2}$  bij vermenigvuldiging met 4 als product de verhouding  $\frac{12}{2}$  op en de verhouding  $\frac{4}{3}$  bij vermenigvuldiging met  $\frac{3}{2}$  de verhouding  $\frac{4}{2}$ . En de verhouding  $\frac{2}{1}$ , geeft bij deeling door de verhouding  $\frac{3}{2}$  als quotiënt 3, de verhouding  $\frac{3}{1}$  bij deeling door 4 de verhouding  $\frac{3}{4}$ , en de verhouding  $\frac{4}{3}$  bij deeling door  $\frac{3}{2}$  de verhouding  $\frac{8}{9}$ .

Zooals men ziet, zijn de bewerkingen met verhoudingen inderdaad vermenigvuldigingen, deelingen, machtsverheffingen, worteltrekkingen en logaritmenemingen, met gebroken machten wortel exponenten zelfs. Trouwens, Stevin merkt reeds op, dat de meeningen omtrent den aard dier bewerkingen uiteenloopen. „Il y a controuersé entre les Auteurs Mathematiciens (& principalement entre les Cōmentateurs de la cinquième definition du 5 liure d'Euclide) touchant les computations des Raifons: Car ce que les aucuns appellent Addition & Soubstraction des Raifons, les autres veullent que ce soit Multiplication, & Diuision, les autres disent que c'est matiere obscure & confuse. Mais comme il auint à plusieurs autres disciplines, esquelles l'on cognoit & entend la nature des principes plus parfaitemment, quand on vient à la Pratique d'icelles: Ainsi nous deuïennent les proprieté des computations des Raifons plus notoires par leur vïage: Comme entre autres la Theorie de la Musique (dont nous descriprons alieus vn traicté particulier <sup>1)</sup>). La reigle de

<sup>1)</sup> Bedoeld wordt de in HS gebleven Spiegelung der Singconst.

Compagnie (que nous delarons ci apres) Quelques demonstrations de Ptolemee en sa Grand Compositio<sup>n</sup> 1), &c." (p. 14)

Naar aanleiding van Stevin's 24<sup>e</sup> bepaling, dat van drie evenredige termen de verhouding van den 1<sup>en</sup> tot den 3<sup>en</sup> 2-maal zoo groot is als die van den 1<sup>en</sup> tot den 2<sup>en</sup>, enz., heb ik mij deze uitweidingen meenen te mogen veroorloven, om te kunnen herinneren aan de beteekenis van de meetkundige reeksen voor de ontwikkeling van de wiskundige wetenschappen: zij vormen o.a. de bron, waaraan de rekenkundige bewerkingen van de 3<sup>e</sup> orde, de machtsverheffing en haar omkeeringen, de worteltrekking en de logaritmeneming, met geheele, gebroken en negatieve, ja, zelfs met onmeetbare exponenten haar oorsprong ontleenen. Niet zonder grond mocht Stifel van de wonderbare eigenschappen der meetkundige reeksen gewagen 2).

Op de bepalingen van verhoudingen en evenredigheden volgen in het 1<sup>e</sup> boek der Problemata Geometrica acht werkstukken:

1) rechte lijnen te construeeren, die zich verhouden als eenige gegeven driehoeken;

2) uit een der hoekpunten van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor de driehoek in twee deelen verdeeld wordt, die zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen;

3) uit een punt in een der zijden van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

4) uit een der hoekpunten van een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

5) uit een punt in een der zijden van een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

6) evenwijdig aan een der zijden van een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

7) evenwijdig aan een der zijden van een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.;

8) evenwijdig aan een der zijden van een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz.

1) *Μαθηματικὴ Σύνταξις*, meer bekend onder den naam *Almagest* = het groote boek (van Arab. al = de en Gr. *μέγιστος* = zeer groot).

2) Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducā, & clausis oculis abeā.

Stifel, *Arithmetica Integra*, Neurenberg 1544, fol. 249 verso.

De werkstukken 4—8 zijn van Stevin's eigen vinding <sup>1)</sup>.

Van het 1<sup>e</sup> werkstuk duidt Stevin twee constructies aan.

Bij de 1<sup>e</sup> constructie, die door Euclides (Lib. I, Propos. 42—45) uitvoerig verklaard wordt, moet men beginnen met op de halve basis van elken driehoek een parallellogram te beschrijven, dat even hoog en dus even groot is, en een hoek bevat, die voor alle driehoeken dezelfde is. Ieder van de parallellogrammen verandert men met behoud van de hoeken in een parallellogram met een zijde, die voor alle parallellogrammen dezelfde is, door toepassing van de stelling, dat er twee even groote parallellogrammen ontstaan, als men door een punt in een der diagonalen van een parallellogram rechte lijnen evenwijdig aan de zijden trekt. Voor par. EBHI (Fig. 1) bv. luidt

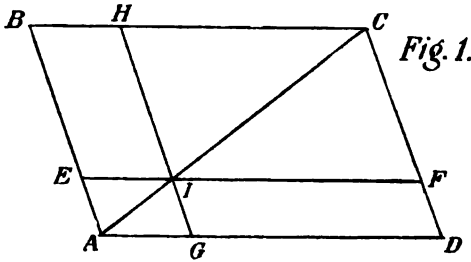


Fig. 1.

de constructie aldus: Verleng bv. de zijde EI met een stuk IF = de zijde, die de parallellogrammen gemeen zullen hebben, trek door F een rechte lijn evenwijdig aan BE en HI, die BH in C ontmoet,

vereenig C met I en trek door het punt A, waarin BE en CI elkander ontmoeten, een rechte lijn evenwijdig aan BH en EI, die CF en HI in D en G ontmoet, dan voldoet par. GIFD aan de gestelde voorwaarden.

Zodoende krijgt men in plaats van de driehoeken parallellogrammen, die een zijde en de hoeken gemeen hebben, en zich dus verhouden als de andere zijden, enz.

Stevin, die de verklaarde handelwijze meermalen toepast, kiest de parallellogrammen steeds rechthoekig.

Bij de 2<sup>e</sup> constructie neemt Stevin aan, dat de driehoeken, waarvan de verhouding door die van rechte lijnen moet worden uitgedrukt, ontstaan zijn, door een punt in den omtrek van een veelhoek met de hoekpunten te verbinden. Elke twee driehoeken, die naast elkander liggen, hebben dan een zijde gemeen en

<sup>1)</sup> Sequentia quinque Problemata sunt ea quæ ante hac nunquam descripta putamus. p. 25.



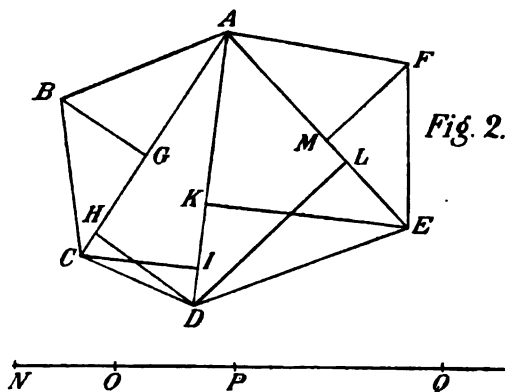
verhouden zich als de hoogtelijnen op deze zijde. Zoo is (Fig. 2):

$$\triangle ABC : \triangle ACD = BG : HD,$$

$$\triangle ACD : \triangle ADE = CI : KE,$$

$$\triangle ADE : \triangle AEF = DL : MF.$$

Construeert men PQ als 4<sup>e</sup> evenredige tot CI, KE en OP = HD, en QR als 4<sup>e</sup> evenredige tot DL, MF en PQ, dan zijn dus  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ADE$  en  $\triangle AEF$  evenredig met NO = BG, OP = HD, PQ en QR.



Op dit 1<sup>e</sup> werkstuk berust de oplossing van vijf van de zeven overige, t. w. van Nos. 3, 4, 5, 7 en 8.

Zooals reeds medegedeeld is, verlangen de werkstukken 2—5, die volgen, de verdeeling van een rechtlijnige figuur in twee deelen van gegeven verhouding door een rechte lijn, te trekken uit een punt in den omtrek, in Nos. 2 en 4 in het bijzonder uit een hoekpunt.

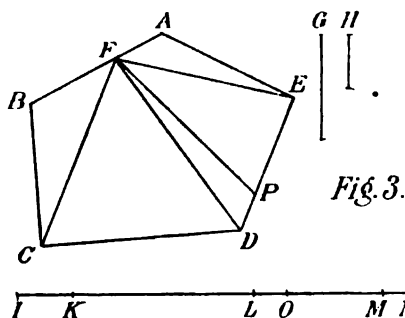
Bij de oplossing van Nos. 3—5 past Stevin een methode toe, waaraan hij, omdat ze algemeen is, reeds bij No. 3 de voorkeur geeft boven onze hedendaagsche oplossing van dit werkstuk, die o.a. in de aantekeningen van Clavius bij het 6<sup>e</sup> boek van Euclides' Elementen (p. 343 van den 3<sup>en</sup> druk van 1591) voorkomt <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>

Nota.

Alius est modus constructionis huius Problematis apud varios auctores, cuius inter alios meminit Christophorus Clavius in fine lib. 6. Euclid. Sed ut sequentia Problemata essent apertiora, secuti fumus hic, nostram generalem inventionem omnium rectilineorum. p. 25.

Om Stevin's methode te doen kennen, laten wij diens oplossing van No. 5 volgen: Uit een punt F (Fig. 3) in de



zijde AB van den vijfhoek ABCDE een rechte lijn te trekken, die den veelhoek in twee deelen verdeelt, waarvan dat aan den kant van B staat tot dat aan den kant van A als de rechte lijn G staat tot de rechte lijn H.

Constructie: Vereenig het punt F met de hoekpunten C, D en E van veelhoek ABCDE, en construeer vier stukken IK, KL, LM en MN, die evenredig zijn met  $\triangle FBC$ ,  $\triangle FCD$ ,  $\triangle FDE$  en  $\triangle FEA$ ; verdeel de som IN dier stukken in twee deelen IO en ON, die tot elkander staan als G en H, en van  $\triangle FDE$ , die beantwoordt aan het stuk LM, waarop het deelpunt O ligt, de zijde DE tegenover het punt F in twee deelen DP en PE, die zich verhouden als LO en OM; vereenig eindelijk F met P, dan is:

$$\text{veelhk. FPDCB} : \text{veelhk. FPEA} = G : H.$$

Bewijs:

$$\triangle FBC : IK = \triangle FCD : KL = \triangle FDE : LM = \triangle FEA : MN, \dots (1)$$

$$IO : G = ON : H, \dots (2)$$

$$DP : LO = PE : OM, \dots (3)$$

$$\triangle FPD : DP = \triangle FPE : PE. \dots (4)$$

Uit (3) en (4) volgt:

$$\begin{aligned} \triangle FPD : LO &= \triangle FPE : OM \\ &= (\triangle FPD + \triangle FDE) : (LO + OM) = \triangle FDE : LM, \dots (5) \end{aligned}$$

uit (1) en (5):

$$\begin{aligned} \triangle FBC : IK &= \triangle FCD : KL = \triangle FPD : LO \\ &= \triangle FDE : OM = \triangle FEA : MN, \dots (6) \end{aligned}$$

uit (6):

$$\begin{aligned} (\triangle FBC + \triangle FCD + \triangle FPD) &: (IK + KL + LO) \\ &= (\triangle FDE + \triangle FEA) : (OM + MN), \end{aligned}$$

dus:

$$\text{veelhk. FPDCB} : IO = \text{veelhk. FPEA} : ON, \dots (7)$$

en uit (2) en (7):

$$\text{veelhk. FPDCB} : G = \text{veelhk. FPEA} : H,$$

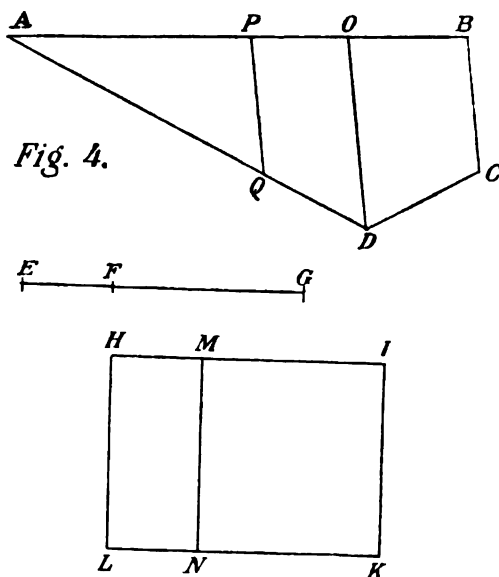
zoals bewezen moest worden.

De werkstukken 6–8 verlangen de verdeling van een rechte lijnige figuur in twee deelen van gegeven verhouding door een evenwijdige aan een der zijden.

In No. 6 moet  $\triangle ABC$  door een evenwijdige aan  $AC$  in reden van  $DE$  tot  $EF$  verdeeld worden. Stevin verdeelt  $BC$  in  $G$  in reden van  $DE$  tot  $EF$ , construeert de middelevenredige  $BH$  tusschen  $BG$  en  $BC$ , en trekt  $HI \parallel AC$ .

In No. 7 moet een vierhoek verdeeld worden; soms zal de deellijn twee zijden snijden, die op elkander volgen, soms twee zijden, die tegenover elkander staan.

Snijdt de deellijn, evenwijdig aan  $BC$  (Fig. 4), die vierhoek



$ABCD$  in reden van  $EF$  tot  $FG$  moet verdeelen, de zijden  $AB$  en  $AD$ , dan construeert Stevin par.  $HIKL = \text{vierhk. } ABCD$ , verdeelt  $HI$  in  $M$  in reden van  $EF$  tot  $FG$ , trekt  $MN \parallel HL$  en  $DO \parallel BC$ , en construeert  $\triangle APQ = \text{par. } HN$  en  $\sim \triangle AOD$  (Eucl., Lib. VI, Propos. 25).

Snijdt de deellijn, evenwijdig aan  $AB$  (Fig. 5), die vierhoek

ABCD in reden van EF tot FG moet verdeelen, de zijden AD en BC, dan verlengt Stevin deze zijden, tot zij elkander in H ontmoeten, construeert par. IKLM =  $\triangle HCD$  en par. KNOL = vierhk. ABCD, verdeelt KN in P in reden van EF en FG,

trekt PQ // IM, en verdeelt eindelijk  $\triangle AHB$  door RS // AB in reden van IP tot PN (werkst. 6).

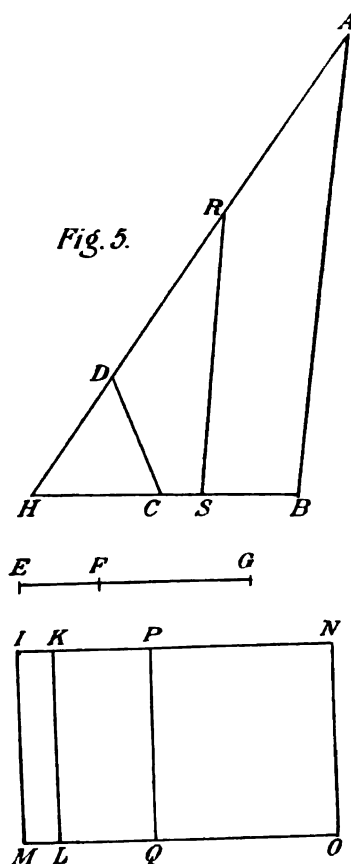
In No. 8 moet veelhk. ABCDEFG (Fig. 6) door een evenwijdige aan AB in reden van HI tot IK verdeeld worden. Stevin verlengt de zijden FE en CD, die door de deellijn gesneden zullen worden, tot zij elkander in L ontmoeten, construeert par. MNOP =  $\triangle LED$  en par. NQRO = veelhk. ABCDEFG, verdeelt NQ in S in reden van HI en IK, trekt ST // MP en FV // AB, construeert  $\triangle LXY$  = par. MT en  $\sim \triangle LFV$ , enz.

Snijdt de deellijn een paar andere zijden, dan moet de constructie dienovereenkomstig gewijzigd worden.

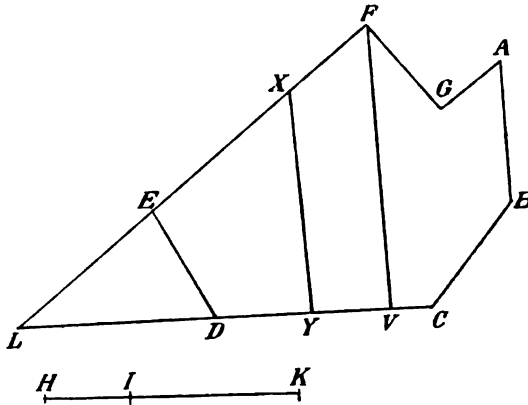
Van de acht werkstukken, door Stevin in het 1<sup>o</sup> boek van zijn *Problemata Geometrica* behandeld, vindt men er zeven met eenige veranderingen, die meerendeels verbeteringen mogen heeten, in zijn *Meetdaet* terug: Problema I

als 8 Voorstel in het Tweede Deel Des Vierden Boecx Vande Everedenheyts Reghel Der Vlacken, Problema II, III, V, VI, VII en VIII resp. als 5, 6, 7, 12, 13 en 14 Voorstel in het Tweede Deel Des Vyfde Boecx Vande Everedelicke Snyding Der Vlacken; Problema III is komen te vervallen.

Bij het 1<sup>o</sup> werkstuk is de oplossing van Euclides weggelaten en die van Stevin in zooverre gewijzigd, dat de driehoeken niet meer als deelen van een veelhoek, maar afzonderlijk voorkomen. Voor de 1<sup>o</sup> van de rechte lijnen, die zich moeten



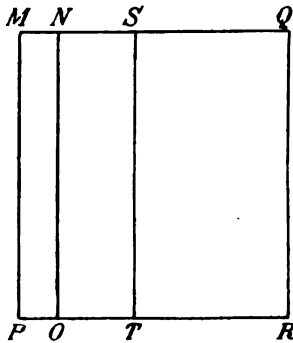
verhouden als de driehoeken, neemt Stevin thans een zijde van den 1<sup>en</sup> driehoek; de overige worden geconstrueerd als 4<sup>e</sup> evenredigen tot de hoogtelijn op de van den 1<sup>en</sup> driehoek genomen zijde, de hoogtelijn op een zijde van den betreffenden



driehoek en deze zijde zelf. Van parallelogrammen wordt bijgeen van de constructies meer gebruik gemaakt.

Het 13 Voorstel wijkt eenigszins van Problema VII af: het is niet meer een willekeurige vierhoek, die verdeeld moet worden door een evenwijdige aan een der zijden, maar een trapezium door een evenwijdige aan de evenwijdige zijden; de deellijn snijdt dus twee overstaande zijden, de beenen van het trapezium.

Fig. 6.



Ook de oplossing verschilt van die in de Problemata Geometrica: wel verlengt Stevin van trapezium ABCD (Fig. 7), dat door LM // AB in reden van EG tot GF verdeeld moet worden, de beenen DA en CB, tot zij elkander in H ontmoeten, maar hij bepaalt het stuk KE, dat zich tot EF moet verhouden als  $\triangle HAB$  tot trapezium ABCD en dat dus aan het stuk IK in Fig. 5 beantwoordt, door berekening, zonder dit evenwel uitdrukkelijk te vermelden; aldus:

$$\begin{aligned} \text{trap. ABCD} : \triangle HAB &= EF : KE, \\ \triangle HDC : \triangle HAB &= HD^2 : HA^2, \end{aligned}$$

dus :

$$(HD^2 - HA^2) : HA^2 = EF : KE,$$

dus :

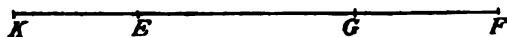
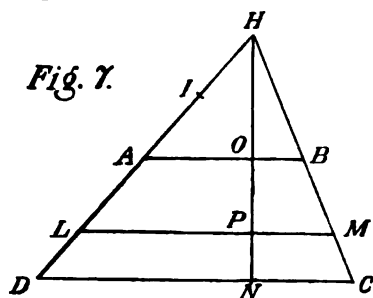
$$(HD - HA^2/HD) : HA^2/HD = EF : KE.$$

Construeert men  $HI = HA^2/HD$ , dus als 3<sup>e</sup> evenredige tot HD en HA, dan wordt  $HD - HA^2/HD = HD - HI = DI$ , dus de evenredigheid:

$$DI : HI = EF : KE,$$

zoodat men KE kan construeeren als 4<sup>e</sup> evenredige tot DI, HI en EF.

En nadat KE gevonden is, verdeelt Stevin  $\triangle HDC$  volgens



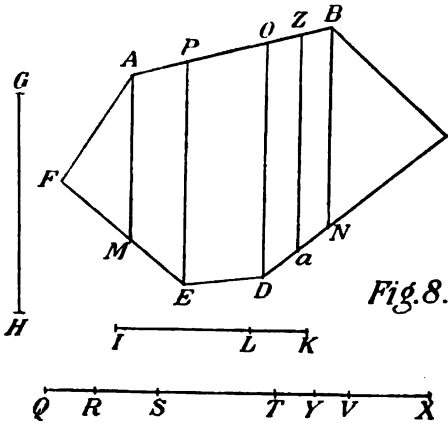
het 12 Voorstel door  $LM \parallel AB$  in reden van KG tot GF.

Eindelijk is het 14 Voorstel in de Meetdaet algemeener dan Problema VIII in de Problemata Geometrica: de deellijn behoeft niet meer evenwijdig aan een der zijden van den veelhoek getrokken te worden, haar richting mag willekeurig worden aangenomen. Ook de oplossing is algemeener en fraaier. Stevin trekt door de hoekpunten van veelhoek ABCDEF (Fig. 8), die door  $Za \parallel GH$  in reden van IL tot LK verdeeld moet worden, evenwijdigen aan GH, construeert QR, RS, ST, TV en VX evenredig met  $\triangle AFM$ , trapezium AMEP, trapezium PEDO, trapezium ODNB en  $\triangle BNC$ , verdeelt QX in Y in reden van IL tot LK, en eindelijk trapezium ODNB, dat beantwoordt aan het stuk TV, waarop het deelpunt Y ligt, volgens het 13 Voorstel door  $Za \parallel GH$  in reden van TY tot YV.

„De snyding der rechtlinighe platten”, zegt Stevin op pp. 138—139 van de Meetdaet, „ghelochiet deur rechte linien op drierley wijſe: D'eene met linien commende uyt een

ghefelt punt inden omtreck: d'ander daer buyten: de derde evenwijdighe met eenighe getoonde lini."

Met werkstukken over de „snijdingh der rechtlinighe platten met een lini commende uyt een ghefelt punt buyten den



omtreck" erkent Stevin „doende gheweest [te] hebben", maar, evenals zooveel anderen, vruchteloos. Vandaar, dat „voorstellen defer ghedaente" niet in de *Problemata Geometrica* konden worden opgenomen, hoezeer de schrijver overtuigd was, dat „de snijding deur een punt soo wel ghegheven buyten den omtreck, als daer binnen" in een „oir-

dentlicke beschrijving vant snyen der platten behooren, te meer dattet in deeling van lande somwijlen dadelick vereyfcht wort".

Twee jaren na de verschijning van Stevin's werk zag evenwel Benedetti's *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber*, Turijn 1585, het licht: uit dit werk zijn „de form der wercking en bewijfing defer voorstellen [in de Meetdaet] getrocken en veroirdent". Pas later bleek Stevin, dat Tartaglia, onder wiens leiding Benedetti de vier eerste boeken van Euclides' *Elementen* had doorgewerkt, reeds in zijn *General Trattato dé Numeri e Misura*, Venetië 1556—1560, dit onderwerp had behandeld <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> De vier voorstellen defer ghedaente seer spitsvondich sijnde, en merk ick niet by de Grieken bekend gheweest te hebben, dan vermoedese in eenighe overbleven schriften des wijfentijts weerom te voorschijn gherocht te wesen, uyt welke sy ghecommen meughen sijn onder anderen ter handt van Ioannes Baptista Benedictus (uyt wiens schriften vertoochse wijse ghefelt, wy de form der wercking en bewijfing defer voorstellen ghetrocken en veroirdent hebben:) Oock ter handt van Nicolas Tartaglia, die ick daer na bevonden heb dat daer af ghechreven had in *Il libro della quarte parte*: Mijn reden van sulck vermoeden is dusdanigh: Ymant die sich voorfelt oirdentlick te willen vervolghen de beschrijving vant snyen der platten, hem comt int ghedacht daer in te behooren de snijding deur een punt soo wel ghegheven buyten den omtreck, als daer

De vier werkstukken, die Stevin in de Meetdaet oplost, luiden :

1) door een punt buiten een driehoek een rechte lijn te trekken, waardoor de driehoek in twee deelen verdeeld wordt, die zich verhouden als twee gegeven rechte lijnen (8 Voorstel);

2) door een punt binnen een driehoek (zoo mogelijk) een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (9 Voorstel);

3) door een punt buiten (binnen) een vierhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (10 Voorstel);

4) door een punt buiten (binnen) een veelhoek een rechte lijn te trekken, waardoor enz. (11 Voorstel).

Bij de oplossing van het 8 Voorstel wordt door Stevin „een meetconftighe wercking ghetrocken uyt een ftelreghefche” <sup>1)</sup>, naar onze wijze van voorstellen aldus :

Moet  $\triangle ABC$  (Fig. 9) door een rechte lijn uit D verdeeld worden in reden van FG tot EG, dan beginne men met D beurtelings te verbinden met elk der hoekpunten van den driehoek, om de zijden te bepalen, die door de deellijn gesneden zullen worden. Zijn AB en AC de zijden, die door de deellijn in N en M gesneden worden, en trekt men uit D een evenwijdige aan BA, die AC in H ontmoet, dan is :

$$\triangle ANM : \text{vierhk. MNBC} = FG : EG, \quad . . . (1)$$

$$\triangle ANM : \triangle ABC = AM \times AN : AB \times AC, \quad . . . (2)$$

$$DH : AN = (AH + AM) : AM. \quad . . . (3)$$

Uit (1) en (2) volgt :

$$AM \times AN : AB \times AC = FG : EF. \quad . . . (4)$$

binuen, te meer dattet in deeling van landē fomwijlen dadelick vereyft wort: Maer fulcx foodaniger menschen ghedachten te wesen, blijktt noch deur diender veel verscheyden dit verschil malcander voorgheftelt hebben, als den boveschreven Benedictus wiens schrift een brief van antwoort was op fulcken vraghe. Ten anderen Cardanus met Ludovicus Ferrarus hebben sulcx voorghehouden aan Tartaglia, t'welck hij Tartaglia daer te voeren, soo hij self schrijft, in sijn openbaer redenfrijt voorgheftelt had. My sijnder oock ander bekennt die daer me, eer dese voorstellen t'haerder handt ghecommen waren, doende gheweest hebben, onder welke ick een was.

Maer t'ghene hier af de menschen nu ter tijt ontmoet, derghelijcke ist billich toe te laten ontmoet te hebben de Vinders der seltfame wetenschappen daer af ons soo seecker teyckens ghebleven sijn, t'welck waren, soo inde bepaling van dies t'sijnder plaets verclaert is, de menschen des wijfentijts, daerom gevet groot vermoeden, datse fulcken vermaert vindlick deel der Meetconft niet ongevonden ghelaten hebben.

Meetdaet, p. 144.

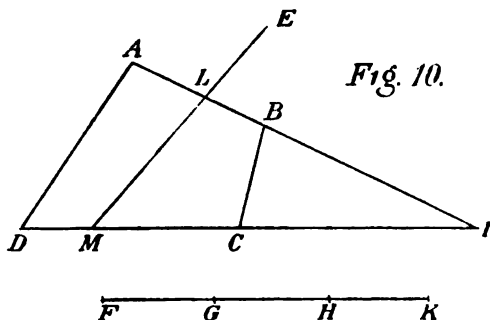
<sup>1)</sup> Meetdaet, p. 147.





Het 10 Voorstel verlangt vierhoek ABCD uit E te verdeelen in reden van FG tot GH.

Snijdt de deellijn twee zijden, die tegenover elkander staan

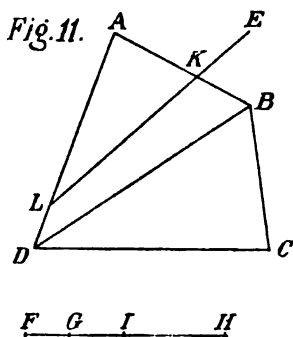


(Fig. 10), dan construeert Stevin HK zóó, dat vierhk. ABCD :  $\triangle BCI = FH : HK$ , en verdeelt  $\triangle ADI$  volgens het 8 Voorstel uit E in reden van FG tot GK.

Snijdt de deellijn twee zijden, die op elkander volgen (Fig.

11), dan construeert Stevin FI zóó, dat vierhk. ABCD :  $\triangle ABD = FH : FI$ , en verdeelt  $\triangle ABD$  eveneens volgens het 8 Voorstel uit E in reden van FG tot GI.

Is in het bijzonder vierhoek ABCD een parallelogram en worden de zijden AB en CD gesneden, dan verbindt Stevin de middens I en K van AD en BC, verdeelt IK in L in reden van FG tot GH en trekt EL.



Het 11 Voorstel eindelijk verlangt veelhoek ABCDEFGH (Fig. 12) uit I te verdeelen in reden van KL tot LM.

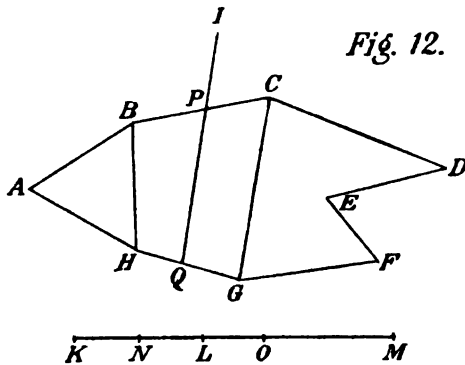
Zijn BC en GH de zijden, die door de deellijn gesneden zullen worden, dan trekt Stevin BH en CG, verdeelt KM in stukken KN, NO en OM, die

tot elkander staan als  $\triangle ABH$ , vierhoek BCGH en vijfhoek CDEFG, en eindelijk vierhoek BCGH volgens het 10 Voorstel uit I in reden van NL tot LO.

Hoewel Stevin zijn Problemata IIII–VIII nergens behandeld had gevonden <sup>1)</sup>, toch ontbrak het hem niet aan voorgangers op dit terrein. Tartaglia is reeds genoemd. Maar zelfs Euclides ( $\pm$  300 v. Chr.) had zich reeds in zijn Boek over de Verdeeling van Figuren, waarvan Proclus (5<sup>e</sup> eeuw

<sup>1)</sup> Zie de noot op p. 134.

n. Chr.) in zijn commentaar op het 1<sup>e</sup> boek der Elementen melding maakt, met opgaven van denzelfden aard beziggehouden. Euclides' verzameling werkstukken bleef evenwel tot in de 2<sup>e</sup> helft van de 16<sup>e</sup> eeuw onbekend, toen, omstreeks



Fg. 12.

1563, door John Dee een Arabisch geschrift over dit zelfde onderwerp werd ontdekt, dat weliswaar Mohammed Bagdadinus als schrijver vermeldt, maar niettemin door Dee op aannemelijke gronden aan Euclides werd toegeschreven, een vermoeden, dat sedert

door Wöpcke's ontdekkingen (1851) tot zekerheid werd verheven: Dee's en Wöpcke's vondsten moeten als Arabische bewerkingen van fragmenten van Euclides' *Περὶ Διαμέτρων Βιβλίον* worden aangemerkt. In Dee's fragment vindt men o. a. behandeld de verdeeling van drie- en vierhoeken in stukken van gegeven verhouding door een rechte lijn evenwijdig aan een gegeven rechte lijn, alsmede (hoewel minder algemeen) die van een vijfhoek door een rechte lijn *a*) uit een punt in een der zijden, *b*) evenwijdig aan een der zijden; in dat van Wöpcke buitendien o. a. de constructie van een rechte lijn, die *a*) een figuur, ingesloten door een cirkelboog en twee rechte lijnen, in even groote stukken verdeelt, *b*) van een gegeven cirkel een stuk van bepaalde grootte afsnijdt.

Dee bezorgde een Latijnsche vertaling van zijn Arabisch handschrift, die door Federigo Commandino, bekend door zijn Latijnsche uitgaven van werken van Grieksche wiskunstenaars, van een aanhangsel werd voorzien, dat den inhoud van dit HS beknopt weergeeft en de verdeeling van figuren algemeener behandelt dan door Mohammed geschiedt. Hun gemeenschappelijke arbeid verscheen in 1570 te Pisa onder den titel:

De superficierum diuisionibus liber Machometo Bagdedino adscriptus, nunc primum Ioannis Dee Londinensis et Federici Command. Urb. Opera in lucem editus. Federici Command.

de eadem re libellus Pifauri ap. Hieronymum Concordiam 1570 <sup>1)</sup>).

Ook Leonardo van Pisa (Fibonacci) 's *Practica Geometriae*, 1220, en Paciolo (Lucas de Burgo) 's *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, Venetië 1494, handelen over de verdeling van figuren, waarbij door genen blijkbaar uit een Arabische bewerking van Euclides' gelijknamigen arbeid is geput, terwijl door dezen Fibonacci's werk als zijn voornaamste bron wordt aangewezen <sup>2)</sup>).

Wij moeten aannemen, dat Stevin tijdens de samenstelling van zijn *Problemata Geometrica* met geen dezer werken bekend is geweest, al vindt men nauwelijks twee jaren later Paciolo's *Summa* door hem in zijn *Arithmetique* bij de oplossing van vergelijkingen vermeld <sup>3)</sup>).

Maar al was het tegendeel waar, Stevin's arbeid overtreft dien van zijn voorgangers. En het is niemand minder dan de geleerde, met de geschriften van Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Machometus Bagdedinus en Federicus Commandinus volkomen vertrouwde Jezuïet Clavius, die onzen voortreffelijken stamgenoot dit loffelijk getuigenis uitreikt, door in zijn *Geometria Practica*, Rome 1604, „Muster eines Lehrbegriffs der praktischen Geometrie" <sup>4)</sup>, de verdeling der veelhoeken (Lib. VI) naar diens *Problemata Geometrica* te bewerken <sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> Cantor, t. a. p., 1<sup>ster</sup> Band, Leipzig 1880, pp. 247—248; II pp. 511—512.

Kästner, *Geschichte der Mathematik*, 1<sup>ster</sup> Band, Göttingen 1796, pp. 272—273; 2<sup>ter</sup> Band, Göttingen 1797, pp. 46—47.

<sup>2)</sup> Cantor, t. a. p., II p. 34 en p. 302.

<sup>3)</sup> Les dérivés de  $\textcircled{2}$  égale a  $\textcircled{1} \textcircled{0}$  [d. z. vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen teruggebracht kunnen worden], inuentez par le susdict premier auteur incognu, sont descriptes par Lucas Pacciolo. *Arithmetique*, p. 268.

<sup>4)</sup> Kästner, t. a. p., 3<sup>ter</sup> Band, Göttingen 1799, p. 287.

<sup>5)</sup> Edidit quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de superficialium diuisionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adscriptum: ipseque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuersalem conscripsit: estque sane libellus vterque acutissimus, & eruditione refertissimus. Idem vero postea argumentum alia via aggressus est, & meo certe iudicio, faciliiori, & magis generali, Simon Stevinus Brugensis: sed in qua aliquid desiderari videatur, vt omnibus superficiebus rectilineis (quod ipse velle videtur) conuenire possit,

Het 2<sup>e</sup> boek van de *Problemata Geometrica* handelt over de „regula falsi continuæ quantitatis”, die falsi heet, „non quod falsum docet, sed quia per falsum positionem pervenitur ad cognitionem veri”, zooals Stevin (p. 38) Apianus nazegt <sup>1)</sup>.

De regula falsi (regula positionum, regula falsarum positionum) vormt in de rekenkunde een hulpmiddel voor hen, „so in der Coss nicht gegründet sind” <sup>2)</sup>, om, zonder kennis van algebra, vraagstukken op te lossen, die aanleiding geven tot vergelijkingen van den 1<sup>en</sup> graad. „Man erhebe die Falsi [echter] so hoch man wolle”, zoo oordeelt Stifel (1545), „man bessere sie auch oder mehre sie soweit vñ tieff man ymmer könne, so bleibt sie doch gegen die Coss wie ein Punkt gegen einen Zirkel” <sup>3)</sup>.

Een vergelijking van den vorm  $ax = b$  werd opgelost volgens de regula falsi simplicis positionis: men nam voor  $x$  willekeurig  $x'$ ; vond men  $ax' = b'$ , dan is  $b':b = x':x$ . En een vergelijking van den vorm  $ax + b = c$  werd opgelost volgens de regula falsi duplicis positionis: men nam voor  $x$  willekeurig  $x'$  en  $x''$ ; vond men  $ax' + b = c'$  en  $ax'' + b = c''$ , dan is  $a(x' - x) = c' - c$  en  $a(x'' - x) = c'' - c$ , dus  $(c' - c) : (c'' - c) = (x' - x) : (x'' - x)$  en  $x = \{x''(c' - c) - x'(c'' - c)\} : (c' - c'')$ , een uitkomst, die men naar onderstaand schema berekende:

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{cc}
 x' & \nearrow & c' - c \\
 & \searrow & \\
 x'' & \nearrow & c'' - c \\
 & \searrow & 
 \end{array} & & = x''(c' - c) \\
 & & \\
 & & = x'(c'' - c) \\
 \hline
 & \text{afgetr.} & \\
 & c' - c'' & x''(c' - c) - x'(c'' - c) \\
 & & \hline
 \text{uitkomst: } & \frac{x''(c' - c) - x'(c'' - c)}{c' - c''} & \text{afgetr.}
 \end{array}$$

quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint . . . .  
Deinde superficierum rectilinearum diuisionem aggrediemur. insistentes eiusdem Steuinii vestigiis, nisi quando generalius rem oportebit demonstrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: . . . .

Clavius, *Opera Mathematica*, Tomus Secundus, Mainz 1611, p. 147.

<sup>1)</sup> Unger, *Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart*, Leipzig 1888, p. 101.

<sup>2)</sup> Unger, t. a. p., p. 101.

<sup>3)</sup> Unger, t. a. p., pp. 103—104.

Een paar voorbeelden van de regula falsi ontleen ik aan Stevin's Arithmetique, p. 101, en Pratique d'Arithmetique, pp. 122 - 123.

### Reigle de faux.

#### 1) D'une faulſe poſition.

„Explication du donné & requis. On veut ſçauoir quel nombre avec ſa moitié fera 18. Construction. On poſera quelque nombre ainſi qu'il auindra, comme ſ'il fuſt le vrai nombre requis, ſoit 2: le meſme avec ſa moitié qui eſt 1, faiſt 3: Or ce n'eſt pas 3 ce que nous voulons, mais 18; Donc la poſition de 2 eſtoit faulſe, parquoy a fin d'auoir le vrai requis, on dira 3 viennent de 2, d'ou viendront 18? faiſt pour ſolution 12.”

#### 2) De deux faulſes poſitions.

„Exemple II. Trois aulnes de drap couſtent 11 lb<sup>1)</sup>, deſquelles la ſeconde couſte le double de la premiere plus 2 lb, & la troiſieſme aulne couſte le triple de la premiere moins 3 lb; Combien couſte chaſcune aulne?

Conſtrvction. On poſera pour la premiere aulne quelque quantité de liures à plaifir, ſoit 1 lb, doncques la ſeconde aulne ſelon la propoſition, couſte 4 lb, & la troiſieſme 0 lb; Or ces trois ſommes montent 5 lb, & doibuent monter 11 lb; Doncques la premiere poſition de 1 vient trop peu ou moins que nous ne deſirons 6, ce qu'on notera en ceſte ſorte:

1 moins 6.

Puis on fera quelque autre poſition, ſoit de 4 lb, pour la premiere aulne, doncques ſelon la propoſition la ſeconde couſte 10 lb, & la troiſieſme 9 lb, leſquelles trois ſommes montent 23 lb, & ne doibuent monter que 11 lb, doncques la ſeconde poſition eſt trop, ou plus que nous ne deſirons de 12 lb, leſquelles on notera ſoubs la premiere poſition, & leur diſpoſition ſera alors telle:

1 moins 6

4 plus 12

Puis on multipliera par croix [t. w.  $4 \times 6$  en  $1 \times 12$ ], & la reſte l'acheuera ſelon la doctrine du 17<sup>e</sup> probleme de l'Arith-

---

<sup>1)</sup> 1 liure (lb) = 20 ſolz (ſ) à 12 deniers (d), zoowel in Vlaanderen, als in Venetië, Frankrijk, Engeland, enz., ofschoon van verſchillende waarde.

metique [waar men op p. 104 in verband met de teekens van  $c' - c$  en  $c'' - c$  den regel vindt medegedeeld, dat „Semblables requierent soustraction, Et difsemblables addition.”] & viendra 2 lb pour la premiere aulne, dont la disposition de l'operation acheuée fera telle:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ moins } 6. \quad 24 \\ 4 \text{ plus } 12. \quad 12 \\ \hline \end{array}$$

18. 36 quotient 2.

Or estant connue la valeur de la premiere aulne, il est manifeste que la seconde (selon la proposition) couste 6 lb, & la troisieme 3 lb.”

Hebben Gemma Frisius (1540), Stifel (1544) e. a. de regula falsi duplicis positionis bij de oplossing van vergelijkingen van hooger dan den 1<sup>en</sup> graad toegepast en Cardano (1545), Bürgi (1592/93), Pitiscus <sup>1)</sup> (1612) e. a. zich van dezen regel bediend bij de benadering van de wortels van hoogere-machts-vergelijkingen, Stevin bracht de regula falsi simplicis positionis van het terrein der rekenkunde op dat der meetkunde over, na tot het inzicht te zijn gekomen, dat de betrekking van evenredige afhankelijkheid, waarin bij dezen regel de onbekende en de bekende grootheden tot elkander staan, aan de evenredigheid van gelijkstandige lijnen in gelijkvormige figuren beantwoordt.

Door middel van zijn regula falsi continuæ quantitatis, ons beter bekend onder den naam van constructie-methode der gelijkvormige figuren, lost Stevin vier werkstukken op:

1) een gelijkzijdigen driehoek te construeeren, als het verschil tusschen de hoogtelijn en de som van de zijde en den straal van den ingeschreven cirkel gegeven is;

2) een vierkant te construeeren, als het verschil tusschen de zijde en de diagonaal gegeven is;

3) een regelmatigen vijfhoek te construeeren, als de verbindingslijn van een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde gegeven is;

4) een vijfhoek LMNKI gelijkvormig met een gegeven vijfhoek BCDEF te construeeren, als  $NL - MN + IL$  gegeven is.

<sup>1)</sup> Nieuw Archief voor Wiskunde, 2<sup>e</sup> Reeks, 3<sup>e</sup> Deel, Amsterdam 1898, p. 265.

Bij het 1° werkstuk bv. construeert Stevin een willekeurigen gelijkzijdigen driehoek BCD, vermindert de zijde CD met een stuk CH = de hoogtelijn BE op CD, vermeerdert HD met een stuk DI = de straal FG uit het middelpunt F van  $\triangle BCD$  op de zijde BC neergelaten, en beschrijft eindelijk de zijde KL van den verlangden  $\triangle LKM$  als 4° evenredige tot HI, BC en het gegeven verschil A.

Evenzoo worden de drie overige werkstukken opgelost.

Het 3° boek van de Problemata Geometrica — o. i. het belangrijkste van de vijf — handelt hoofdzakelijk over half-regelmatige veelvlakken.

Zooals bekend is, onderscheidt men:

- 1) halfregelmatige veelvlakken met regelmatige, incongruente zijvlakken en onregelmatige, congruente veelvlakshoeken;
- 2) halfregelmatige veelvlakken met onregelmatige, congruente zijvlakken en regelmatige, incongruente veelvlakshoeken; die der eene soort kunnen als poolfiguren van die der andere soort worden aangemerkt.

Om de convexe halfregelmatige veelvlakken van de 1° soort te bepalen, bedenke men:

- 1) dat in ieder hoekpunt van het veelvlak niet meer dan vijf zijvlakken van niet meer dan drieërlei soort kunnen samenkomen, daar anders de som van de zijden der veelvlakshoeken niet beneden  $360^\circ$  zou blijven;
- 2) dat, als er in ieder hoekpunt van het veelvlak  $\alpha$   $a$ -hoeken,  $\beta$   $b$ -hoeken, ... samenkomen en bv.  $a$  oneven is, een van de aantallen  $\alpha - 1, \beta, \dots$  minstens = 2 moet wezen, daar wegens de congruentie der veelvlakshoeken de zijvlakken, die een zijvlak met een oneven aantal zijden begrenzen, alle evenveel zijden moeten tellen;
- 3) dat, als het veelvlak  $Z$  zijvlakken,  $H$  hoekpunten en  $R$  ribben telt en er in ieder hoekpunt  $\alpha$   $a$ -hoeken,  $\beta$   $b$ -hoeken, ... samenkomen:

$$Z + H = R + 2,$$

$$2R = (\alpha + \beta + \dots) H,$$

$$Z = \left( \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \dots \right) H,$$



duo:

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \dots + 2 - \alpha - \beta - \dots\right) H = 4$$

is 1).

Aan de voorwaarden, onder 1), 2) en 3) vermeld, voldoen vijftien veelvlakken met  $Z$  regelmatige zijvlakken, waaronder  $Z_a$   $\alpha$ -hoekige,  $Z_b$   $b$ -hoekige, ...,  $H(a, b, \dots)$  congruente  $v$ -zijdige veelvlakshoeken, waarvan de zijden tot een  $\alpha$ -hoek, een  $b$ -hoek, ... behoreen, en  $R$  ribben:

Convexe halfregelmatige veelvlakken van de 1<sup>e</sup> soort:

a) met drieszijdige veelvlakshoeken:

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| 1) $Z = 8 : Z_3 = 4, Z_0 = 4;$                 | $H(3, 6, 6) = 12; R = 18.$    |
| 2) $Z = 14 : Z_3 = 8, Z_8 = 6;$                | $H(3, 8, 8) = 24; R = 36.$    |
| 3) $Z = 32 : Z_3 = 20, Z_{10} = 12;$           | $H(3, 10, 10) = 60; R = 90.$  |
| 4) $Z = 14 : Z_4 = 6, Z_0 = 8;$                | $H(4, 6, 6) = 24; R = 36.$    |
| 5) $Z = 32 : Z_3 = 12, Z_6 = 20;$              | $H(5, 6, 6) = 60; R = 90.$    |
| 6) $Z = n + 2 : Z_n = 2, Z_4 = n;$             | $H(n, 4, 4) = 2n; R = 3n.$    |
| 7) $Z = 26 : Z_4 = 12, Z_6 = 8, Z_8 = 6;$      | $H(4, 6, 8) = 48; R = 72.$    |
| 8) $Z = 62 : Z_4 = 30, Z_6 = 20, Z_{10} = 12;$ | $H(4, 6, 10) = 120; R = 180.$ |

b) met vierzijdige veelvlakshoeken:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| 9) $Z = 26 : Z_3 = 8, Z_4 = 18;$             | $H(3, 4, 4, 4) = 24; R = 48.$  |
| 10) $Z = 2n + 2 : Z_n = 2, Z_3 = 2n;$        | $H(n, 3, 3, 3) = 2n; R = 4n.$  |
| 11) $Z = 14 : Z_3 = 8, Z_4 = 6;$             | $H(3, 4, 3, 4) = 12; R = 24.$  |
| 12) $Z = 32 : Z_3 = 20, Z_5 = 12;$           | $H(3, 5, 3, 5) = 30; R = 60.$  |
| 13) $Z = 62 : Z_3 = 20, Z_4 = 30, Z_5 = 12;$ | $H(3, 4, 5, 4) = 60; R = 120.$ |

c) met vijfzijdige veelvlakshoeken:

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 14) $Z = 38 : Z_3 = 32, Z_4 = 6;$  | $H(3, 3, 3, 3, 4) = 24; R = 60.$  |
| 15) $Z = 92 : Z_3 = 80, Z_5 = 12;$ | $H(3, 3, 3, 3, 5) = 60; R = 150.$ |

Aan deze veelvlakken beantwoorden vijftien veelvlakken met  $H$  regelmatige veelvlakshoeken, waaronder  $H_\alpha$   $\alpha$ -zijdige,  $H_\beta$   $\beta$ -zijdige, ...,  $Z(\alpha, \beta, \dots)$  congruente  $n$ -hoekige zijvlakken, waarvan de hoeken tot een  $\alpha$ -vlakshoek, een  $\beta$ -vlakshoek, ... behoreen, en  $R$  ribben:

---

1) Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 5<sup>tes</sup> Buch, § 7, 6, 2<sup>tes</sup> Band, 3<sup>te</sup> Auflage, Leipzig 1870, pp. 217—220.

Convexe halfregelmatige veelvlakken van de 2<sup>e</sup> soort:

a) met driehoekige zijvlakken:

$$1^*) \quad H = 8 : H_3 = 4, H_6 = 4; \quad Z(3, 6, 6) = 12; R = 18.$$

. . . . .

b) met vierhoekige zijvlakken:

$$9^*) \quad H = 26 : H_3 = 8, H_4 = 18; \quad Z(3, 4, 4, 4) = 24; R = 48.$$

. . . . .

c) met vijfhoekige zijvlakken:

$$14^*) \quad H = 38 : H_3 = 32, H_4 = 6; \quad Z(3, 3, 3, 3, 4) = 24; R = 60.$$

. . . . .

De ontdekking van de halfregelmatige veelvlakken van de 1<sup>e</sup> soort wordt op gezag van Pappus <sup>1)</sup> aan Archimedes toegeschreven; die van de 2<sup>e</sup> soort vindt men, naar Baltzer <sup>2)</sup> mededeelt, voor de 1<sup>e</sup> maal in J. H. T. Müller's Trigonometrie, 1852, p. 345, beschreven.

De beschrijving dier veelvlakken bij Pappus <sup>1)</sup> bepaalt zich tot een opgaaf van het aantal en de soort der zijvlakken en de berekening van het aantal der lichaamshoeken en der ribben bij dertien dier veelvlakken: van onze lijst het 8-vlak No. 1, de 14-vlakken Nos. 2, 4 en 11, de 26-vlakken Nos. 9 en 7, de 32-vlakken Nos. 3, 5 en 12, het 38-vlak No. 14, de 62-vlakken Nos. 13 en 8, en het 92-vlak No. 15.

De veelvlakken Nos. 7 en 10, die begrensd worden door twee  $n$ -hoeken, waarvan de vlakken evenwijdig loopen, alsmede door  $n$  vierkanten bij No. 7 en  $2n$  gelijkzijdige driehoeken bij No. 10, en die dus wegens de onbepaaldheid dier  $n$ -hoeken twee groepen van veelvlakken vormen, Archimedische prisma's en antiprisma's geheeten, ontbreken bij Pappus.

Eenzoo bij Kepler, die de „tredecim Archimedæa Corpora” in zijn Harmonices Mundi Libri V, Linz 1619, Lib. II, XXVIII Propos., pp. 61—65, onder toepassing van de voorwaarden 1) en 2) uit de zijvlakken samenstelt, afbeeldt en benoemt: van onze lijst No. 14, cubus simus, No. 11, cuboctaëdron, en No. 9, rhombicuboctaëdron, uit drie- en vierhoeken; No. 15, dodecaëdron simum, en No. 12, icosidodecahe-

<sup>1)</sup> Pappi Alexandrini Mathematicæ Collectiones. ed. Commandino, Bonn 1660, Lib. V, Propos. XVIII (inleiding), pp. 129—130.

<sup>2)</sup> Baltzer, t. a. p., p. 207 Noot.

dron uit drie- en vijfhoeken; No. 1, tetraëdron truncum, uit drie- en zeshoeken; No. 2, cubus truncus, uit drie en achthoeken; No. 3, dodecaëdron truncum, uit drie- en tienhoeken; No. 4, octaëdron truncum, uit vier- en zeshoeken; No. 5, icosihedron truncum, uit vijf- en zeshoeken; No. 13, rhombicosidodecaëdron, uit drie-, vier- en vijfhoeken; No. 7, cuboctaëdron truncum, uit vier-, zes- en achthoeken; No. 8, icosidodecaëdron truncum, uit vier-, zes- en tienhoeken.

Buitendien vindt men bij Kepler, t. a. p., Lib. II, XXVII Propos., p. 61, twee halfregelmatige veelvlakken van de 2<sup>e</sup> soort beschreven, Nos. 11\* en 12\* van onze lijst, resp. met twaalf en met dertig gelijkzijdige parallelogrammen (rhombi) tot zijvlakken <sup>1)</sup>.

De beroemde Duitsche schilder Albrecht Dürer, als schrijver van weinig minder beteekenis dan als kunstenaar, leert in het 4<sup>e</sup> boek van zijn *Underweysung der messung mit dem zirckel vnd richtscheit*, Neurenberg 1525, de netwerken construeeren van de vijf regelmatige veelvlakken en van de zeven halfregelmatige veelvlakken Nos. 1, 2, 11, 4, 9, 14 en 7 van onze lijst, alsmede die van twee veelvlakken, waarvan het eene door tweeëndertig driehoeken en zes twaalfhoeken en het andere door twaalf driehoeken en zes vierhoeken begrensd wordt <sup>2)</sup>.

Evenals de samenstelling van netwerken een vinding van Dürer zelf schijnt te wezen <sup>3)</sup>, evenzoo zijn de zeven half-

<sup>1)</sup> Wat de keuze der benamingen bij Kepler aangaat, zij opgemerkt:

1<sup>o</sup>. dat een cuboctaëdron wordt ingesloten door zes vierhoeken (evenals een kubus) en acht driehoeken (evenals een octaëder), een rhombicuboctaëdron door twaalf vierhoeken (evenals een van de rhomboëders van propos. XXVII), nog zes vierhoeken (evenals een kubus) en acht driehoeken (evenals een octaëder), een icosidodecahedron door twintig driehoeken (evenals een icosaeëder) en twaalf vijfhoeken (evenals een dodecaëder), enz.;

2<sup>o</sup>. dat een cubus simus hem een „afgeplatte” kubus is en wordt ingesloten door zes vierhoeken (evenals een kubus) en overigens door driehoeken, enz. [„Et in hoc ordine simorum”, zegt Kepler, t. a. p., p. 62, „Icosaëdron posset esse tertium, quod est quasi Tetraëdron simum.”];

3<sup>o</sup>. dat een tetraëdron truncum hem een „afgeknot” tetraëder is en onder zijn zijvlakken veelhoeken met meer dan vijf zijden telt, enz.

<sup>2)</sup> Van dit werk verscheen in 1532 een Latijnsche editie te Parijs.

<sup>3)</sup> Cantor, t. a. p., II p. 428.

regelmatige veelvlakken, waarover hij handelt, waarschijnlijk zelfstandig door hem ontdekt; want had hij uit Pappus' *Μαθηματικαὶ Συναγαραί* geput — waarvan trouwens Commandino's Latijnsche bewerking, Pisa 1588, de oudste editie vormt, die in druk verscheen — dan zou hij zich zeker niet tot de netwerken van zeven dier veelvlakken hebben bepaald, maar ook die van de zes overige hebben afgebeeld.

Hoe dit zij, zeker is het, dat Stevin zijn kennis van de halfregelmatige veelvlakken aan Dürer ontleent. „Behalve de vijf regelmatige lichamen, waarvan de wiskunstenaars melding maken”, zegt hij in de inleiding van zijn 3<sup>e</sup> boek, „zijn er eenige andere, die, hoewel minder regelmatig, evenzeer uitlokken tot wiskundige bespiegelingen en merkwaardige netwerken opleveren. Zes van deze lichamen vindt men in Dürer's Meetkunde vermeld....”<sup>1)</sup>

Het was Stevin evenwel niet genoeg de netwerken dier veelvlakken te kunnen ontwerpen en uit deze de veelvlakken zelf te kunnen samenstellen, hij verlangde hun oorsprong te kennen, dien het hem gelukte eindelijk te ontdekken: Dürer's lichamen bleken hem afgeknotte regelmatige veelvlakken te wezen, een afgeknot viervlak, drie afgeknotte kuben en een afgeknot achthoek; van het 6<sup>e</sup>, den afgeplatten kubus (cubus simus) van Kepler, kon Stevin den oorsprong niet met zekerheid vaststellen; hij gist, dat dit veelvlak uit een afgeknotten kubus moet worden afgeleid<sup>2)</sup>.

Nadat de bron was opgespoord, waaruit de halfregelmatige veelvlakken ontspringen, moet het Stevin niet moeilijk zijn gevallen, hun aantal met drie te vermeerderen, die aan de re-

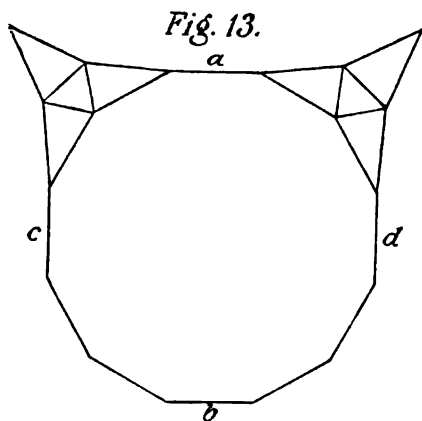
---

<sup>1)</sup> Præter quinque corpora regularia quorum Mathematici meminerunt, animadvertimus alia quædam corpora quæ quamvis talem non haberent regularitatem ut in quinque illis regularibus requiritur (nam demonstratur quinque tantum talia corpora posse inveniri) nihilominus Geometricarum speculationum essent plena, ac mirabilis dispositionis correlatiuarum superficierum. Horum autem corporum sex meminit Albertus Durerus, in sua Geometria.... p. 46.

<sup>2)</sup> . . . , vidimus tandem regularia corpora ipforum esse scatibram, nam illorum vnum, erat tetraedrum truncatum, altera tria, truncati cubi, & quintum, truncatum octoedrum: Sexti verò corporis truncatio hæc scribentibus nobis erat ignota, quamvis ex truncato cubo originem habere non dubitamus. p. 46.

gelmatige twaalf- en twintigvlakken hun oorsprong ontleenen <sup>1)</sup>, en waarvan hij zich de eer der ontdekking toeëigent, zoolang hem van geen voorganger blijkt <sup>2)</sup>.

Stevin spreekt van zes halfregelmatige veelvlakken, die in Dürer's Geometria zouden voorkomen; dit is een vergissing, die zich tot de inleiding bepaalt. Inderdaad vindt men bij Stevin de zeven halfregelmatige veelvlakken der Messung mit Zirckel und Richtscheyt terug, vermeerderd met de drie, door hem zelf ontdekt. Van dit tiental verwijst Stevin den cubus simus, waarvan hij de herkomst niet kan vaststellen, naar een Aanhangsel, zoodat er voor hem „novem truncata corpora regularia” te behandelen overblijven.



Omtrent de twee veelvlakken van Dürer, die resp. door tweeëndertig driehoeken en zes twaalfhoeken worden ingesloten, merkt Stevin op, dat van het 1<sup>e</sup> het netwerk niet kan worden samengevouwen, omdat soms drie (lees: vier) vlakke hoeken samenkomen, waarvan de som =  $360^\circ$  is, en dat het 2<sup>e</sup> niet aan zijn bepaling van „truncatum corpus regula-

re” voldoet <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Cum'que hæc nobis essent nota invenimus (nam tale quid sæpe fit cum rerum causas cognoscimus) alia tria corpora non minoris elegantiae nempe ex truncatis Dodecaedro & Icofaedro. p. 46.

<sup>2)</sup> Si forte ab alio ante nos sunt inventa... fatemur hoc nos ignorare. Quare vt pro nostro invento talia edimus. p. 47.

<sup>3)</sup> (sunt quidem in eadem Alberti descriptione & alia duo corpora quæ ex complicatis planis componuntur quorum alterum non potest plicari, ratio est quia ad vnum angulum solidum construendum compositi sunt tres anguli plani æquales quatuor rectis, qui angulum solidum per 21. prop. lib. 11. Euclid. non constituunt. Alterum verò corpus non continetur intra metas quæ in sequenti 11. definit. sunt positæ, quare illa duo corpora reliquimus). p. 46.

Inderdaad bestaat het netwerk van het 1° veelvlak uit vier deelen als Fig. 13, zóó verbonden, dat de zijden  $a$  van het 2°, 3° en 4° deel resp. samenvallen met de zijden  $b$  van het 1°, 2° en 3° deel, en uit twee twaalfhoeken, op ieder van de zijden  $c$  en  $d$  van het 2° deel één. Dit veelvlak zou dus vierentwintig driezijdige en vierentwintig vierzijdige veelvlakshoeken tellen: van de vierzijdige, door een twaalfhoek en drie driehoeken gevormd, zou de som der zijden  $= 360^\circ$  wezen. Maar ook al kon dit netwerk worden samengevouwen, dan nog zou er geen halfregelmatig veelvlak ontstaan, daar er onder de tweeëndertig driehoeken vierentwintig gevonden worden, die niet gelijkzijdig zijn <sup>1)</sup>.

En het netwerk van het 2° veelvlak bestaat uit zes vierkanten, die een rechthoek vormen, zesmaal zoo lang als breed, met op de zijden in de lengte twaalf gelijkbeenige driehoeken, waarvan de hoogten even groot zijn als de bases <sup>2)</sup>: bij samenvouwing ontstaat een regelmatig zeszijdig prisma met een regelmatige zeszijdige pyramide op ieder eindvlak.

Buiten Stevin schijnt niemand opgemerkt te hebben, dat Dürer's 8° veelvlak onbestaanbaar is en dat de driehoekige zijvlakken van zijn 9° veelvlak niet gelijkzijdig zijn <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> qui non habent omnia latera æqualia.

Dürer, Geometria, Parijs 1532, p. 157.

<sup>2)</sup> quorum quilibet tantam habeat altitudinem, quantum fuerit latus quadrati.

Dürer, t. a. p., p. 157.

<sup>3)</sup> Te verbeteren aanhalingen:

Sechs Quadrate zwischen zwei Parallelen an einander gezeichnet, und auf jede ihrer Seiten, welche in die Parallelen fallen, ein gleichseitiges Dreyeck gelegt, giebt auch ein Netz zu einem Körper, ein Prisma, das auf jeder seiner sechsseitigen Grundflächen eine Pyramide hat.

Kästner, t. a. p., I p. 691.

Überall sind die Grenzflächen regelmässig gedacht, nur beim 8) Körper sind 24 unter den 32 Dreiecken nicht gleichseitig sondern nur gleichschenkelig, oder wie Dürer es ausspricht „sie haben aber nit all gleych seyten“.

Cantor, t. a. p., II p. 428.

Dürer zeichnet nun die zusammenhangenden Netze der Körper, und zwar der fünf regulären und von acht Archimedeischen. Auf diese Netze weist Michael Stifel im zweiten Buche seiner Arithmetica integra, 1544 hin und bringt im Druckfehlerverzeichniss am Ende des ganzen Bandes diese Netze selbst. [Stifel bepaalt zich tot de netwerken van de regelmatige veelvlakken en zwijgt over die van halfregelmatige.]

Brückner, Vielecke und Vielfache, Leipzig 1900, p. 156.

Stevin begint zijn beschouwing van de halfregelmatige veelvlakken met een bepaling (def. 11) van een afgeknot regelmatig veelvlak, die woordelijk aldus luidt:

Een lichaam, dat in een bol kan worden beschreven, — waarvan de lichaamshoeken alle gelijk en de zijvlakken niet alle gelijkvormig zijn, — waarvan elk zijvlak gelijkhoekig en gelijkzijdig is en alle ribben even lang zijn, noemt men een afgeknot regelmatig lichaam.

Dan volgen elf bepalingen (def. 12–22), waarin Stevin zijn negen afgeknotte regelmatige veelvlakken benoemt, en verklaart, hoe ze uit de vijf regelmatige veelvlakken ontstaan; in een opmerking wordt telkens het aantal en de soort der zijvlakken, alsmede het aantal der lichaamshoeken en der ribben opgegeven. Wegens den dubbelen oorsprong van twee der veelvlakken wordt hun aantal door dat der bepalingen met twee overtroffen.

De „novem truncata corpora regularia” van Stevin heeten:

1) truncatum tetraedrum per laterum tertias (def. 12; No. 1 van onze lijst).

2) truncatus cubus per laterum media (def. 13; No. 11 van onze lijst).

3) truncatus cubus per laterum diuisiones in tres partes (def. 14; No. 2 van onze lijst).

4) biftruncatus cubus primus (def. 15; No. 9 van onze lijst).

5) biftruncatus cubus secundus (def. 16; No. 7 van onze lijst).

6) truncatum octaedrum per laterum media (def. 17; No. 11 van onze lijst).

7) truncatum octaedrum per laterum tertias (def. 18; No. 4 van onze lijst).

8) truncatum dodecaedrum per laterum media (def. 19; No. 12 van onze lijst).

9) truncatum dodecaedrum per laterum diuisiones in tres partes (def. 20; No. 3 van onze lijst).

10) truncatum icosaedrum per laterum media (def. 21; No. 12 van onze lijst).

11) truncatum icosaedrum per laterum tertias (def. 22; No. 5 van onze lijst).

Uit deze benamingen blijkt, dat van de afgeknotte regelmatige veelvlakken door Stevin één van het viervlak, vier van

den kubus, twee van het achthoek, twee van het twaalfhoek en twee van het twintighoek worden afgeleid; de veelvlakken, in def. 13 en def. 18 als *truncatus cubus*- en *truncatum octaedrum per laterum media* beschreven, zijn identisch (No. 11 van onze lijst); evenzoo die, in def. 19 en def. 21 als *truncatum dodecaedrum*- en *truncatum icosaedrum per laterum media* beschreven (No. 12 van onze lijst). Zondert men de „*biftruncati cubi*” van def. 15 en def. 16 uit, dan ontstaan Stevin's afgeknotte regelmatige veelvlakken, door van de regelmatige veelvlakken aan de hoekpunten congruente regelmatige pyramiden af te snijden. Dit afknotten kan geschieden „*per laterum media*”, „*per laterum tertias*” en „*per laterum diuisiones in tres partes*”; bij de 1<sup>e</sup> handelwijze moet men de ribben in twee even groote stukken verdeelen, bij de 2<sup>e</sup> in drie even groote stukken en bij de 3<sup>e</sup> in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de uiterste staat als de diagonaal van een zijvlak tot de zijde.

De 1<sup>e</sup> handelwijze kan op elk regelmatig veelvlak worden toegepast. Telt het regelmatige veelvlak  $Z$   $n$ -hoekige zijvlakken,  $H$   $\nu$ -zijdige veelvlakshoeken en  $R$  ribben, dan ontstaat er, mits  $n \neq \nu$  zij, een halfregelmatig veelvlak met  $Z$   $n$ -hoekige en  $H$   $\nu$ -hoekige, d. i. samen  $Z + H = R + 2$ , zijvlakken,  $R$  vierzijdige veelvlakshoeken en  $2R$  ribben. Uit een viervlak ontstaat evenwel, daar  $n = \nu = 3$  is, geen halfregelmatig veelvlak, maar een viervlak; een zes- en een achthoek leveren een zelfde halfregelmatig veelvlak op, evenals een twaalf- en een twintighoek, wat zijn grond vindt in de omstandigheid, dat zes- en achthoek en twaalf- en twintighoek elkanders poolfiguren zijn, zoodat  $Z$  en  $n$  bij het eene veelvlak dezelfde waarden hebben als  $H$  en  $\nu$  bij het andere.

Door afknopping „*per laterum media*” ontstaan dus twee halfregelmatige veelvlakken, Nos. 11 en 12 van onze lijst.

De 2<sup>e</sup> handelwijze kan slechts op een regelmatig veelvlak worden toegepast, waarvan de zijvlakken driehoeken zijn, dus op het vier-, acht- en twintighoek, en de 3<sup>e</sup> handelwijze slechts op een, waarvan de zijvlakken vier- of vijfhoeken zijn, dus op het zes- en twaalfhoek.

Door afknopping „*per laterum tertias*” en „*per laterum diuisiones in tres partes*” ontstaan dus vijf halfregelmatige veelvlakken, Nos. 1, 4, 5, 2 en 3 van onze lijst, met  $Z$   $2n$ -



hoekige en H v-hoekige, d. i. samen  $Z + H = R + 2$ , zijvlakken,  $2R$  driezijdige veelvlakshoeken en  $3R$  ribben.

De „biftruncati cubi” eindelijk ontstaan, zooals de naam reeds uitdrukt, door een kubus tweemaal af te knotten. Aldus:

Verdeelt men van een kubus elke ribbe in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de twee uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van den kubus bij elke ribbe een driezijdig prisma af door een vlak, dat door de vier deelpunten gaat, die het dichtst bij die ribbe liggen, dan houdt men een veelvlak over met o. a. zes zijvlakken, dat vierkanten zijn, die van de zijvlakken van den kubus zijn overgebleven, en acht hoekpunten, die verder van het middelpunt van den kubus verwijderd zijn dan de overige hoekpunten; snijdt men van dit veelvlak bij ieder dier acht hoekpunten een driezijdige pyramide af door een vlak, dat van de hoekpunten dier zes zijvlakken de drie bevat, die het dichtst bij dat hoekpunt liggen, dan houdt men een halfregelmatig veelvlak over met acht driehoekige en achttien vierhoekige zijvlakken, vierentwintig hoekpunten en achtenveertig ribben, dat bij Stévin „biftruncatus cubus primus” heet.

En verdeelt men van een kubus elke ribbe in vijf stukken, waarvan het middelste tot ieder van de vier uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van den kubus bij elke ribbe een driezijdig prisma af door een vlak, dat door de vier deelpunten gaat, die het dichtst bij die ribbe liggen, dan houdt men een veelvlak over met o. a. zes zijvlakken, dat vierkanten zijn, die van de zijvlakken van den kubus zijn overgebleven, en acht hoekpunten, die verder van het middelpunt van den kubus verwijderd zijn dan de overige hoekpunten; verdeelt men van dit veelvlak ieder van de zijden dier zes zijvlakken in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de twee uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde, en snijdt men van dit veelvlak bij ieder dier acht hoekpunten een veelvlak af door een vlak, dat van de deelpunten op de zijden dier zes zijvlakken de zes bevat, die het dichtst bij dit hoekpunt liggen, dan houdt men een halfregelmatig veelvlak over met twaalf vierhoekige, acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken, achtenveertig hoekpunten en tweeënzeventig ribben, dat bij Stevin „biftruncatus cubus secundus” heet.

Evenals door Stevin zijn door Kepler blijkens de bijvoeging „truncus” sommige halfregelmatige lichamen als afgeknotte veelvlakken opgevat. Waar evenwel Stevin de wijze van ontstaan dier veelvlakken angstvallig naspeurt en van Dürer's lichamen zelfs een verwerpt, omdat hij er den oorsprong niet met zekerheid van kan vaststellen, laat Kepler zich bij de toekenning van het attriboot „truncus” door den algemeenen indruk leiden, dien de halfregelmatige veelvlakken op hem maken.

Zoo heet Stevin's „bistruncatus cubus secundus” bij Kepler „cuboctaëdron truncum”. Nu telt een cuboctaëdron — No. 11 van onze lijst — acht driehoekige en zes vierhoekige zijvlakken en twaalf vierzijdige veelvlakshoeken, en een cuboctaëdron truncum — No. 7 van onze lijst — twaalf vierhoekige, acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken. Bij ieder van de twaalf hoekpunten van een cuboctaëdron zou men dus een vierzijdige pyramide moeten afsnijden, om een cuboctaëdron truncum over te houden; van de acht driehoekige en de zes vierhoekige zijvlakken zouden dan tevens acht zeshoekige en zes achthoekige zijvlakken overblijven, zooals vereischt wordt. Maar al deze zijvlakken moeten regelmatige veelhoeken wezen: men zou de zijden der driehoeken dus in drie even groote stukken moeten verdeelen en die der vierhoeken in drie stukken, waarvan het middelste tot ieder van de uiterste staat als de diagonaal van een vierkant tot de zijde.

Aan deze twee voorwaarden kan evenwel niet gelijktijdig worden voldaan, zoodat Stevin's „bistruncatus cubus secundus” inderdaad niet als „cuboctaëdron truncum” kan worden opgevat.

Evenmin is Kepler's „icosidodecaëdron truncum” — No. 8 van onze lijst — een afgeknot „icosidodecahedron” — No. 12 van onze lijst.

Hebben, evenals Kepler na hem, vermoedelijk reeds meerderen vóór Stevin in de Archimedische lichamen verminkte regelmatige veelvlakken herkend, zonder evenwel den aard dier verminking nauwkeurig te kunnen omschrijven, aan onzen scherpzinnigen stamgenoot komt de eer toe, den oorsprong van negen dier lichamen in bijzonderheden te hebben aangewezen, onder toepassing van handelwijzen, waardoor, zooals sedert gebleken is, ook de vier overige van regelmatige veelvlakken kunnen worden afgeleid, en die in het wegsnijden van hoekpunten en ribben bestaan.

Zoo ontstaat van de Archimedische veelvlakken van onze lijst:

a) door het wegsnijden van hoekpunten, No. 1 uit een tetraëder, No. 2 uit een hexaëder, No. 3 uit een dodecaëder, No. 4 uit een octaëder, No. 5 uit een icsaëder, No. 11 uit een hexaëder en een octaëder, en No. 12 uit een dodecaëder en een icsaëder;

b) door het wegsnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, evenwijdig aan die ribben, No. 4 uit een tetraëder, No. 7 uit een hexaëder en een octaëder, No. 8 uit een dodecaëder en een icsaëder, No. 9 uit een hexaëder en een octaëder, en No. 13 uit een dodecaëder en een icsaëder;

c) door het wegsnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, niet-evenwijdig aan die ribben, No. 14 uit een hexaëder (zooals Stevin reeds vermoedde) en een octaëder, en No. 15 uit een dodecaëder en een icsaëder<sup>1)</sup>.

(*Wordt vervolgd.*)

---

<sup>1)</sup> Brückner, t.a.p., pp. 134—139.

## VERBETERINGEN.

Bladz. 107, regel 3 v. o. staat: p. 103, lees: p. 110.

» 126, » 3 v. o. » pp. 99—100, lees: pp. 106—107.

# I N H O U D.

		Blz.
V 9, P 1, 4, 6,	D. J. KORTEWEG. Overzicht der door den heer A. N. Godefroy nagelaten handschriften en teekeningen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken, aanwezig op de Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam . . . . .	1.
M <sup>1</sup> 5—7,		
M <sup>2</sup> 3 a, h $\beta$ ,	P. H. SCHOUTE. De prijsvraag van Godefroy . . . . .	33.
L <sup>1</sup> 6 a.		
P 4 b, O 2 e.	W. KAPTEYN. Sur la solution la plus générale de deux équations aux dérivées partielles . . . . .	41.
H 9 h.		
R 7.	A. J. SWART. Een vraagstuk der dynamica . . . . .	44.
V 1 a, D 6 b.	G. SCHOUTEN. De enkelvoudige periodiciteit van de functien $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ . . . . .	57.
L <sup>1</sup> 17 d.	H. DE VRIES. Eenige opmerkingen naar aanleiding van Emil Weyr's „Beiträge zur Curvenlehre". . . . .	68.
V 1 a, R 8 a.	G. SCHOUTEN. De differentiaalvergelijkingen voor de beweging van een vast lichaam . . . . .	86.
	Bibliographie. . . . .	99.
	C. A. LAISANT et H. FEHR. L'enseignement mathématique. Paris, Georges Carré et C. Naud.	
	WILLEBRORD SNELLIUS. Le Degré du Méridien terrestre mesuré, publié par HENRI BOSMANS. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick.	
	P. BRASSEUR. Rekenkunde. Gent, Ad. Hoste.	
	CATALOG mathematischer Modelle. Halle a. S., 1900.	
	F. GIUDICE. Geometria plana, Geometria solida. Brescia, F. Apollonis, 1897—1900.	
	H. DE GUCHTENAERE. Nijverheids- en Handelsrekenen. Gent, Ad. Hoste, 1900.	
	G. M. TESTI. Trattato di Algebra elementare. Livorno, R. Giusti, 1900.	
	G. A. WENTWORTH. A Text-Book of Geometry. Boston, U. S. A. Ginn & Company, 1899.	
	E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. Traité de géométrie. Paris, Gauthier-Villars, 1900.	
	F. MICHEL. Recueil de problèmes de géométrie analytique. Paris, Gauthier-Villars, 1900.	
	J. BADON GHYBEN. Gronden der beschrijvende meetkunde. Breda, 1900.	
	J. S. MACKAY. Arithmetic theoretical and practical. London & Edinburgh, Chambers, 1899.	
	F. AMODEO. Arithmetica particolare e generale. Napels, L. Pietro, 1900.	
	G. VERONESE e P. CAZZANIGA. Elementi di geometria. Verona e Padova, Fratelli Drucker, 1900.	
	A. J. PRESSLAND and CH. TWEEDIE. Elementary trigonometry. Edinburgh, Oliver & Boyd, 1900.	
V 6, 7.	N. L. W. A. GRAVELAAR. Stevin's Problemata Geometrica 103.	

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief" betreffende  
gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie, Dr. J. C. KLUYVER  
te Leiden.

# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

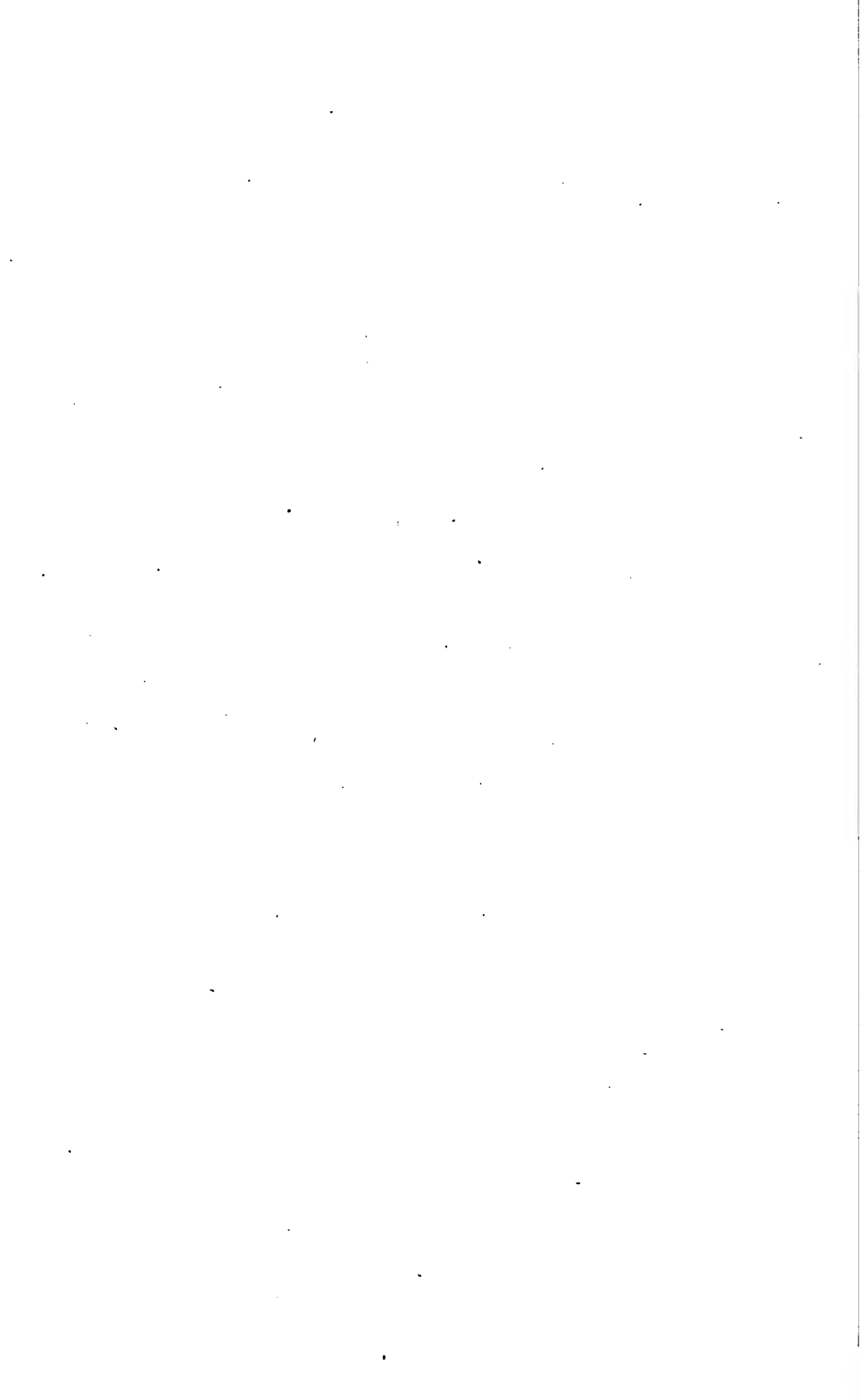
J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEDE REEKS  
DEEL V  
TWEDE STUK

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1901



Zoo ontstaat van de Archimedische veelvlakken van onze lijst:

a) door het wegnijden van hoekpunten, No. 1 uit een tetraëder, No. 2 uit een hexaëder, No. 3 uit een dodecaëder, No. 4 uit een octaëder, No. 5 uit een icosaëder, No. 11 uit een hexaëder en een octaëder, en No. 12 uit een dodecaëder en een icosaëder;

b) door het wegnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, evenwijdig aan die ribben, No. 4 uit een tetraëder, No. 7 uit een hexaëder en een octaëder, No. 8 uit een dodecaëder en een icosaëder, No. 9 uit een hexaëder en een octaëder, en No. 13 uit een dodecaëder en een icosaëder;

c) door het wegnijden van hoekpunten en van ribben door vlakken, niet-evenwijdig aan die ribben, No. 14 uit een hexaëder (zoals Stevin reeds vermoedde) en een octaëder, en No. 15 uit een dodecaëder en een icosaëder<sup>1)</sup>.

Het 3<sup>e</sup> boek van Stevin's *Problemata Geometrica* handelt evenwel niet alleen over de negen afgeknotte regelmatige veelvlakken, maar ook over de vijf regelmatige veelvlakken zelf, alsmede over de vijf vermeerderde veelvlakken, die ontstaan, door op de zijvlakken der regelmatige veelvlakken als grondvlakken pyramiden te construeeren, waarvan alle ribben even lang zijn. Om ieder van deze negentien veelvlakken kan een bol worden beschreven, die echter bij de vermeerderde regelmatige veelvlakken slechts door de toppen der pyramiden gaat.

Op de „*definitiones quinque corporum regularium, quinque auctorum corporum regularium & nouem truncatorum corporum regularium*” laat Stevin volgen de constructie a) van de ribben, b) van de netwerken der veelvlakken, als de straal van den omgeschreven bol gegeven is.

De ribben van de vijf regelmatige veelvlakken construeert hij op nagenoeg dezelfde wijze als Euclides (Lib. XIII, Propos. 18 der Elementen): in Fig. 14 is  $EA = EC = R$ ,  $EF = \frac{1}{2} R$ ,  $CH = 2R$ , enz., dus:

$AG = \frac{2}{3} R\sqrt{6}$  = de ribbe van het regelmatige viervlak;

$CG = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$  = de ribbe van het regelmatige achthvlak;

$BC = R\sqrt{2}$  = de ribbe van het regelmatige zesvlak;

<sup>1)</sup> Brückner, t.a.p., pp. 134—139.





de zijden twee aan twee evenwijdig loopen, vier hoekpunten in den cirkelomtrek liggen en twee er binnen vallen. Van dezen zeshoek construeert Stevin in den halven cirkel, die in Fig. 14 ontbreekt, de eene helft  $A12C$  zóó, dat  $A1 = CK$  een koorde en  $12 = C2 =$  de loodlijn is, die in een regelmatigen vijfhoek met de zijde  $CK$  uit een hoekpunt op de overstaande zijde kan worden neergelaten. Eindelijk trekt hij  $E3 \perp C2$  en beschrijft uit  $C$  met  $CK$  als straal een cirkelboog, die  $E3$  in 5 snijdt:  $E3$  is dan de straal  $R'$  van den bol, die om het „dodecaëdram auctum” kan worden beschreven, waarvan het dodecaëder met de ribbe  $CK$  de kern vormt; want als  $C2$  door  $E3$  in (51) wordt gesneden, dan is  $E$  (51) de straal van den bol, die in het dodecaëder met de ribbe  $CK$  kan worden beschreven, en (51) 5 de hoogte van de pyramiden, waarmede dit veelvlak vermeerderd is.

En den straal  $R'$  van het „truncatum tetraëdram per laterum tertias”, dat aan het tetraëder met de ribbe  $AG$  zijn oorsprong ontleent, construeert Stevin, door  $AG$  in drie even groote stukken te verdeelen en  $E$  met een van de deelpunten te verbinden.

Wat eindelijk de netwerken van al deze lichamen aangaat, die van de regelmatige veelvlakken hebben den tegenwoordigen Euclidischen vorm, die van de afgeknotte regelmatige veelvlakken zijn, op die van de drie door Stevin zelf ontdekte na, aan Dürer ontleend, en die van de vermeerderde regelmatige veelvlakken bepalen zich tot de zijoppervlakken van de pyramiden, die op de zijvlakken van de regelmatige veelvlakken komen te staan.

Terwijl van de „regula falfi continuæ quantitatis”, die den inhoud van het 2e boek der *Problemata Geometrica* uitmaakt, in Stevin's Meetdaet geen spoor te ontdekken valt, vindt men van dien van dit 3e boek in de Meetdaet althans de meeste netwerken terug, zonder meer evenwel: in het 18 Voorstel van het Derde Deel Des Eersten Boecx Van Het Teyckenen Der Lichamen die van „de vijf gheschikte lichamen”, t. w. het vier-, ses-, acht-, twelf- en twintichgrondich lichaam, en in het 19 Voorstel die van „de gheschikte ghesneen lichamen”, t. w. het ghesneen viergrondich deur der sijden derdendeelen, de ghesneen teerlinck deur der sijden derdendeelen, de ghesneen teerlinck deur der sijden middel, de ghesneen teerlinck op een

derde manier, de ghesneen teerlinck op een vierde manier, de ghesneen teerlinck op een vijfde manier, het ghesneen achtgrondich lichaam deur der sijden derdendeelen en het ghesneen twelf- (twintich-) grondich deur der sijden middel, juist de zeven halfregelmatige veelvlakken van Dürer en één van de drie van Stevin, van onze lijst Nos. 1, 2, 11, 14, 9, 7, 4 en 12.

Wij hebben gezien, dat Stevin de afgeknotte regelmatige veelvlakken bij Dürer heeft leeren kennen; thans willen wij nagaan, wat hem aanleiding gaf tot de beschouwing van de vermeerderde regelmatige veelvlakken.

Van de 5<sup>e</sup> eeuw v. Chr. af tot op den huidigen dag toe hebben wetenschap en kunst zich de regelmaat van de vijf Platonische veelvlakken ten nutte zoeken te maken, bij wijzegeerige bespiegelingen en theoretische onderzoekingen zoowel als voor practische doeleinden.

Zóó, waar de Pythagoreër Timæus van Locri, Plato's leermeester, van de vier elementen het vuur als viervlak laat optreden, de lucht uit achtvlakken, het water uit twintigvlakken en de aarde uit zesvlakken laat bestaan, om met een twaalfvlak het heelal te omsluiten <sup>1)</sup>; — zóó, waar tegen het einde der 16<sup>e</sup> eeuw Johannes Kepler, toenmaals „Landschafts-Mathematicus von Steyermark”, zijn met zoo schitterenden uitslag bekroonde pogingen, om de Wetten des Hemels te ontcijferen, aanvangt met de ontsluiting „per quinque regularia corpora geometrica” van dit „mysterium cosmographicum de admirabili proportionibus orbium cœlestium”, dat de sferen van Saturnus en Jupiter de om- en ingeschreven boloppervlakken vormen van een hexaëder, die van Jupiter en Mars van een tetraëder, die van Mars en de Aarde van een dodecaëder, die van de Aarde en Venus van een icosaeëder en die van Venus en Mercurius eindelijk van een octaëder <sup>2)</sup>; — zóó, waar „die Theorie

<sup>1)</sup> Cantor, t. a. p., I p. 148.

<sup>2)</sup> Terra est Circulus menfor omnium: Illi circumscribe Dodecaetron: Circulus hoc comprehendens erit Mars. Marti circumscribe Tetraedron: Circulus hoc comprehendens erit Iupiter. Ioui circumscribe Cubum: Circulus hunc comprehendens erit Saturnus. Iam terræ inscribe Icofaedron: illi inscriptus Circulus erit Venus. Veneri inscribe Octaedron: Illi inscriptus Circulus erit Mercurius. Habes rationem numeri planetarum.

Kepler, Prodomus Dissertationum Cosmographicarum, Frankfort 1621, p. 10 (verscheen oorspronkelijk in 1596 te Tubingen).

des Ikosaeders in den letzten Jahren für fast alle Gebiete der modernen Analysis" van belang geworden is <sup>1)</sup>; — zóó, waar „de ouden eertijts vande gheschikte [lichamen] dobbelsteenen pleghen te maken, t'welck sommighe defes tijts noch navolghen, teyckenende oock Sonwijfers op verscheyden platten die tot den voorgestelden sichteinder connen beschenen worden", en velerlei afgeleide vormen o. a. in de bouwkunst „tot cyraet strecken" <sup>2)</sup>.

Met zulke vormen hebben zich vóór Stevin, behalve Archimedes, Hermolaus Barbarus, Patriarch van Aquileja <sup>3)</sup>, Pacciolo <sup>4)</sup>, De Foix-Candalla <sup>5)</sup> en Jamitzer <sup>6)</sup> bezig gehouden.

Omtrent Barbarus' werk zijn mij geen bijzonderheden bekend. Pacciolo behandelt in zijn *Divina Proporzione*, Venetië 1509, uitvoerig het afsnijden (abscindere) en verhoogen (elevare) van regelmatige en halfregelmatige veelvlakken; De Foix-Candalla beschrijft in het 17<sup>e</sup> boek van zijn uitgaaf van Euclides' *Elementen*, Parijs 1566, de halfregelmatige veelvlakken Nos. 11 en 12 van onze lijst onder de namen „exoctaedron" en „icododecaedron", die evenals bij Kepler zijn samengesteld <sup>7)</sup>; in de *Perspectiva Corporum Regularium*, Neurenberg 1568, van den Neurenberger goudsmid Jamitzer eindelijk vindt men „ein schöne Anleytung, wie auss denselbigen fünf Cörpern one Endt, gar viel andere Cörper, mancherley Art und Gestalt, gemacht und gefunden werden mügen" <sup>8)</sup>, waaronder twee worden aangetroffen, die een oppervlakkige gelijkenis vertoonen met Poinso't's dodécaèdres réguliers de deuxième en de troisième espèce (twaalfhoekig sterttwaalfvlak en twaalfvlakkige sterttwaalfhoek) <sup>9)</sup>.

Invloed op Stevin's arbeid hebben de geschriften van Pacciolo, Candalla en Jamitzer evenwel niet uitgeoefend: immers hij vermeldt ze niet als bronnen, citeert niet Candalla's, maar

<sup>1)</sup> Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leipzig 1884, p. III.

<sup>2)</sup> Meetdaet, p. 40.

<sup>3)</sup> Montucla-Strabbe, *Historie der Wiskunde*, 2<sup>e</sup> Deel, Amsterdam 1787, p. 169.

<sup>4)</sup> Kästner, t. a. p., I pp. 417—449.

<sup>5)</sup> Kästner, t. a. p., I pp. 313—324.

<sup>6)</sup> Kästner, t. a. p., II pp. 19—24.

<sup>7)</sup> Zie p. 153 Noot 1).

<sup>8)</sup> Kästner, t. a. p., II p. 19.

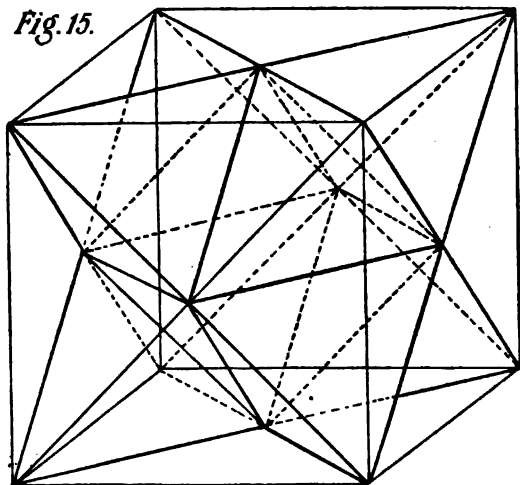
<sup>9)</sup> Günther, *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig 1876, pp. 35—36. Brückner, t. a. p., p. 176 Noot 4).

Clavius' uitgaaf van Euclides' Elementen en spreekt niet van „abscindere” en „elevare”, maar van „truncare” en „augere”.

Hetzelfde kan niet van Dürer's Geometria gezegd worden: de spaarzame opmerkingen over afknotten en vermeerderen, die voorkomen in dit werk <sup>1)</sup>, waarin overigens bij dit onderwerp niet wordt stilgestaan, zouden voor Stevin inderdaad een vingerwijzing hebben kunnen wezen, om in die richting voort te gaan.

Wat het denkbeeld der afknotting aangaat, acht ik dit zelfs niet onwaarschijnlijk, maar dat der vermeerdering werd hem, naar zijn eigen getuigenis, pas later door een vond van Frans Cophart, directeur der Leidsche muziekvereniging, aan de hand gedaan <sup>2)</sup>.

Fig. 15.



Cophart's vond bestond naar diens eigen meening in niets

<sup>1)</sup> Quando ab his corporibus per planas abscissiones anguli amputantur, & deinde anguli remanentes quoq; abscinduntur. sic poterunt fieri multiplicia ex his corpora. Ex his rebus varia fieri possunt, cū pars earū transponitur inter se, id quod ad excisionem statuarū & columnarum earumq; ornatū conducit.

Dürer, t. a. p., p. 158.

In his etiam corporibus sup singulas superficies planas poteris statuere pūctum acutum, altum, aut depressum facere, tot quidem angulorum quot fuerint anguli in superficie super quam steterit punctus.

Dürer, t. a. p., p. 150.

<sup>2)</sup> Postea verò factum est (recitamus hæc quia aliquando non iniucundum est inventionum occasiones non ignorare) vt Franciscus Cophart Archimusicus nostri Leidenfis Musicorum collegij, & Geometriæ singularis amator, vellet mihi persuadere se casu quodam sextum corpus regulare vidisse, cuius constructio talis erat: . . . . p. 47.

minder dan de constructie van een zesde regelmatig veelvlak als overschot van een kubus, waarvan bij de ribben viervlakken zijn weggesneden, die de uiteinden dier ribben en de middelpunten van de in die ribben samenkomende zijvlakken tot hoekpunten hebben (Fig. 15).

Stevin bestreed de bewering van zijn stadgenoot met de opmerking, dat diens „*sextum corpus regulare*” een der kenmerken van een regelmatig veelvlak mist: de veertien hoekpunten liggen niet op een zelfde, maar in groepen van zes en acht op twee verschillende concentrische boloppervlakken.<sup>1)</sup>

Bij nadere beschouwing bleek hem, dat Cophart's veelvlak uit een regelmatig achtvlak bestaat met op ieder zijvlak als basis een regelmatig viervlak. En het was dit denkbeeld, dat hem tot de constructie van zijn vermeederde regelmatige veelvlakken aanleiding gaf.<sup>2)</sup>

Een niet zeer vruchtbaar denkbeeld voorzeker! Had Stevin daarentegen in verbinding der hoekpunten van een regelmatig zesvlak, in uitbreiding der zijvlakken van een regelmatig achtvlak den oorsprong van Cophart's veelvlak herkend, wellicht was hij er dan in geslaagd aan de regelmatige twaalf- en twintigvlakken de ontdekking van een paar andere regelmatige ster veelvlakken te ontleenen, zelfs al was hem de ware aard dier veelvlakken verborgen gebleven, evenals Cophart vermoedelijk in zijn zesde regelmatig veelvlak niet een regelmatig ster veelvlak met acht driehoekige zijvlakken en evenveel driezijdige drievlakshoeken, maar slechts een regelmatig veelvlak, ingesloten door vierentwintig gelijkzijdige driehoeken, zal hebben gezien.

Inderdaad evenwel opent Cophart's „*sextum corpus regulare*” als discontinu regelmatig achthoekig achtvlak de rij der regelmatige ster veelvlakken, waarvan aan Kepler en aan Poinsoot de eer der ontdekking toekomt.

<sup>1)</sup> Igitur quia hoc corpus non habebat omnes proprietates quae in regularibus corporibus requiruntur, concludebamus illud non esse sextum corpus regulare. p. 48.

<sup>2)</sup> Postea verò vidimus tale corpus esse octoedrum cui apposita erant octo tetraedra, quorum bases erant octoedri octo superficies. Cumque hoc animaduerteremus vñà cùm elegantia ipsius, atque Geometricis rationibus in eo consistentibus, adplicauimus talem constructionem ad cetera quatuor regularia corpora, quae omnia regularia aucta vocauimus. p. 48.

In zijn Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres (Journal de l'Ecole Polytechnique, 10<sup>ième</sup> Cahier, Tome IV, Paris 1810, pp. 35—36) laat Poinot zich aldus uit:

„Mais, si, en conservant toujours la définition générale des solides réguliers, on étend, comme on le doit, celle de la convexité, on voit la possibilité de construire de nouveaux polyèdres réguliers, non-seulement avec les nouveaux polygones que j'ai considérés, mais même avec les polygones réguliers ordinaires: et pour bien entendre ceci, il faut commencer par distinguer nettement dans un polyèdre, ses faces, ses arêtes et ses sommets.

Comme un même polyèdre peut paraître également construit sous tels ou tels polygones, je prendrai pour les faces, les plans qui, en plus petit nombre, achèvent complètement ce même polyèdre . . . .

Pour les arêtes, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces du solide, et par lesquels ces faces se joignent deux à deux; de sorte que chaque arête sert de côté à deux faces adjacentes, et qu'ainsi le nombre des arêtes est égal à la moitié du nombre des côtés de toutes les faces.

C'est à ces seules droites, comme faites, que se trouvent les angles dièdres du solide, les autres angles que pourraient former les faces en se traversant, n'en font point partie: et de même, c'est aux seuls points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les sommets et les angles solides du polyèdre.

Cela posé, je dis que l'on peut construire de nouveaux polyèdres parfaitement réguliers . . . : ils ont tous leurs faces égales et régulières, également inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet. Ils peuvent être inscrits et circonscrits à la sphère . . . . La différence essentielle de ces solides aux polyèdres ordinaires, est que, dans ceux-ci, les faces étant projetées par des rayons sur la sphère inscrite ou circonscrite, les polygones correspondans recouvrent une seule fois la sphère; au lieu que dans les autres, ces polygones la recouvrent exactement ou deux fois, ou trois fois, &c.; et cela d'une manière uniforme, en sorte que la surface est par-tout ou doublée, ou triplée, &c." <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Uit Kepler's beschrijving van zijn twaalfhoekig en twintighoekig ster twaalfvlak (Poinot's dodécaèdres réguliers de deuxième et de quatrième espèce)

**Van elk zoodanig sterveelvlak eindelijk vallen de hoekpunten met de hoekpunten en de zijvlakken met de zijvlakken van een convex regelmatig veelvlak samen. 1)**

blijkt onduidelijk, dat diens opvatting van een regelmatig sterveelvlak reeds dezelfde was als die van Poincaré:

„Claudent enim pentagonicae solidas figuras aculeatas undiqz: quarum una fit duodecim angulorum quinquelinearium, altera viginti angulorum trilinearium: illa trinis angulis inficit, haec quinque simul; illa pulchrius super angulum erigitur; haec rectius sedet, incumbens in quinos. In his etfi forinfecus non apparet regulare planum, sed ejus loco Triangulum æquicrurum Pentagonicum; quina tamen hujusmodi semper in unum idemqz planum competentia, occultum sub soliditate quinquangulum, veluti cor suum circumstant; faciuntqz cum eo dictam stellam pentagonicam, seu Germanico Idiomate, pedem Truttæ, Theophrasto Paracelso signum sanitatis. Idea corporis quodammodo eadem est, quæ sui Plani; Nam vt in hoc, sc. in stella quinquangula, binorum semper triangulorum latera in unam rectam competunt, quæ parte sui interiore fit basis uni exteriori triangulo, latus verò intimo quinquangulo: sic in solido, semper quinquorum solidorum angulorum Triangula singula æquicrura, competunt in unam planitiem, quorum quinqz triangulorum seu stellæ intima medulla & cor, quinquangulum, fit basis in unâ superfantantis anguli solidi: vel in alterâ, supstantium quinqz solidorum. Est autem tanta cognatio figurarum harum, unius cum Dodecaëdro, alterius cum Icosaëdro: vt videantur hæc, præsertim Dodecaëdron, trunca quodammodo & mutila, si cum illis aculeatis comparentur.”

Kepler, *Harmonices Mundi Libri V*, Lintz 1619, Lib. II, XXVI. *Propos.*, p. 60.

1) Un polyèdre régulier, de quelque espèce qu'il soit, a nécessairement les mêmes sommets qu'un polyèdre régulier convexe.

Bertrand, *Note sur la Théorie des Polyèdres Réguliers* (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome XLVI, Paris 1858, p. 80).

Je dis de plus, que la régularité du polyèdre d'espèce supérieure entraîne nécessairement la régularité du polyèdre de première espèce qui lui sert de noyau.

Cauchy, *Recherches sur les Polyèdres* (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, 16ième Cahier, Tome IX, Paris 1813, p. 70).

Bij Poincaré's sterveelvlakken:

1) het dodécaëdre étoilé de seconde espèce (twaalfhoekig stertwaalfvlak van de 3e soort);

2) het dodécaëdre de troisième espèce (twaalfvlakke stertwaalfhoek van de 3e soort);

3) het dodécaëdre étoilé de quatrième espèce (twintighoekig stertwaalfvlak van de 7e soort);

4) het icosaeëdre de septième espèce (twintigvlakke stertwaalfhoek van de 7e soort);  
vallen de hoekpunten van Nos. 1, 2 en 4 met die van een convex regelmatig twintigvlak samen en de hoekpunten van No. 3 met die van een convex regelmatig twaalfvlak, en sluiten de zijvlakken van Nos. 1, 2 en 3 een convex regelmatig twaalfvlak in en de zijvlakken van No. 4 een convex regelmatig twintigvlak.

Cophart's veelvlak bezit al de opgesomde kenmerken: zijn zijvlakken zijn congruente regelmatige driehoeken, zijn veelvlakshoeken congruente regelmatige drievlakshoeken; zijn hoekpunten vallen samen met die van een regelmatig zesvlak, zijn zijvlakken sluiten een regelmatig achthoek in; met dit zesvlak heeft het den omgeschreven, met dit achthoek den ingeschreven bol gemeen; zijn middelpuntprojectie op het omgeschreven boloppervlak bedekt dit 2-maal; — doordat het uit twee congruente regelmatige veelvlakken is samengesteld, waarvan de ribben elkander twee aan twee rechthoekig midden-door deelen, onderscheidt het zich evenwel van Poinso'ts vier regelmatige ster veelvlakken door de omstandigheid, dat niet elke twee hoekpunten door een heele-ribbentrek verbonden zijn: Cophart's achthoekig achthoekig vormt dus een discontinu regelmatig ster veelvlak van de 2<sup>e</sup> soort.<sup>1)</sup>

Niet bij Jamitzer alzoo, in diens *Perspectiva Corporum Regularium*, Neurenberg 1568, ontmoet men in de geschiedenis der wiskundige wetenschappen het 1<sup>e</sup> regelmatig ster veelvlak<sup>2)</sup>, maar in Stevin's *Problemata Geometrica*, Antwerpen 1583, en dit 6<sup>e</sup> regelmatig veelvlak was een vond van den Leidschen muziek-directeur, liefhebber der wiskunst, Frans Cophart.

Het 4<sup>e</sup> boek van de *Problemata Geometrica* handelt over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig met een van twee gegeven meetkundige lichamen en even groot als het andere.

---

<sup>1)</sup> Naast de vijf convexe regelmatige veelvlakken bestaan er zeven regelmatige ster veelvlakken: de vier continue ster veelvlakken van Poinso't en drie discontinue ster veelvlakken van de 2<sup>e</sup>, de 5<sup>e</sup> en de 10<sup>e</sup> soort:

- 1) het achthoekig achthoekig van Cophart;
- 2) een twintighoekig twintigvlak;
- 3) een twintighoekig veertigvlak.

No. 1 bestaat uit twee, No. 2 uit vijf en No. 3 uit tien concentrische congruente regelmatige viervlakken; van No. 1 vallen de hoekpunten samen met die van een regelmatig zesvlak, van Nos. 2 en 3 met die van een regelmatig twaalfvlak: van No. 1 sluiten de zijvlakken een regelmatig achthoek in, van Nos. 2 en 3 een regelmatig twintigvlak. Het twintighoekige veertigvlak is uit twee symmetrische twintighoekige twintigvlakken samengesteld, waarvan de hoekpunten en de zijvlakken samenvallen. (Verg. Brückner, t. a. p., pp. 167—169.)

<sup>2)</sup> Günther, t. a. p., p. 36.



In de inleiding merkt Stevin op, dat dit werkstuk beantwoordt aan de constructie van een veelhoek, gelijkvormig met een van twee gegeven veelhoeken en even groot als de andere, door Euclides in zijn Elementen, Lib. VI, Propos. 25, beschreven, en dat het voor bolsegmenten reeds werd opgelost door Archimedes in zijn werk Over den Bol en den Cylinder, Lib. II, Propos. 5.

Aan het einde van zijn beschouwingen vat Stevin de kern van zijn handelwijze samen in een „theoremata” van dezen inhoud:

Stelling: Zijn  $D_1$  en  $D_2$  de middellijnen der grondvlakken en  $H_1 = H_2$  de hoogten van de kegels  $K_1$  en  $K_2$ , en construeert men:

a)  $P$  als 3<sup>e</sup> evenredige tot  $D_1$  en  $D_2$ :

$$D_1 : D_2 = D_2 : P; \quad \dots (1)$$

b)  $D$  en  $Q$  als middelevenredigen tusschen  $D_1$  en  $P$ :

$$D_1 : D = D : Q = Q : P; \quad \dots (2)$$

c)  $H$  als 4<sup>e</sup> evenredige tot  $D_1$ ,  $H_1$  en  $D$ :

$$D_1 : H_1 = D : H; \quad \dots (3)$$

dan is de kegel  $K$  met  $D$  als middellijn van het grondvlak en  $H$  als hoogte  $\sim K_1$  en  $= K_2$ .

Bewijs: Uit (3) volgt onmiddellijk, dat de kegels  $K_1$  en  $K$  gelijkvormig zijn.

Verder volgt uit (1), dat de verhouding van  $D_1$  en  $P$  naar de zegswijze van Stevin <sup>1)</sup> 2-maal zoo groot is als die van  $D_1$  en  $D_2$ ; ook is de verhouding van de grondvlakken der kegels  $K_1$  en  $K_2$  2-maal zoo groot als die van hun middellijnen  $D_1$  en  $D_2$ : de grondvlakken der even hoge kegels  $K_1$  en  $K_2$ , dus ook hun inhouden, verhouden zich derhalve als  $D_1$  en  $P$ .

Eindelijk volgt uit (2), dat de verhouding van  $D_1$  en  $P$  3-maal zoo groot is als die van  $D_1$  en  $D$ ; ook is de verhouding van de inhouden der gelijkvormige kegels  $K_1$  en  $K$  3-maal zoo groot als die van de middellijnen  $D_1$  en  $D$  van hun grondvlakken: de inhouden der kegels  $K_1$  en  $K$  verhouden zich derhalve als  $D_1$  en  $P$ .

---

<sup>1)</sup> Zie p. 134.

Evenzoo verhouden zich de inhouden der kegels  $K_1$  en  $K_2$ : de kegels  $K_2$  en  $K$  zijn dus even groot.

Stevin's constructie laat zich eenigszins bekorten, als men opmerkt, dat uit de voorwaarden van het werkstuk, t.w.:

$$D : H = D_1 : H_1,$$

$$\frac{1}{2} \pi D^2 H = \frac{1}{2} \pi D_1^2 H_1,$$

$$H_1 = H,$$

volgt, dat  $D = \sqrt{D_1 D_2}$ , dus de 2<sup>e</sup> van de beide middelevenredigen tusschen  $D_1$  en  $D_2$  is: de constructie van de 3<sup>e</sup> evenredige tot  $D_1$  en  $D_2$  komt dan te vervallen.

Na deze voorbereiding gaan we tot het algemeene werkstuk over:

Een lichaam  $L$  te beschrijven  $\sim L_1$  en  $= L_2$ .

De constructie luidt bij Stevin aldus:

- a) Verander  $L_1$  in een kegel  $K_1$  en  $L_2$  in een kegel  $K_2$ ;
- b) verander  $K_2$  in een kegel  $K'$  van dezelfde hoogte als  $K_1$ ;
- c) construeer de middellijn van het grondvlak van een kegel  $K \sim K_1$  en  $= K'$ ;
- d) construeer  $L \sim L_1$  en  $= K'$ .

Bij ieder van de vier onderdeelen van de constructie moeten we even stilstaan.

Elk meetkundig lichaam kan volgens Stevin in een kegel veranderd worden, zooals hij in zijn Geometria nader zal uiteenzetten.<sup>1)</sup> Inderdaad vindt men in de Meetdaet (6 Bovck, 31—34 Voorstel) de „verkeering” in een kegel behandeld van een keghelsche, een corte keghel, een clootsche en een cloot, een coördine en een middellijnafne van een clootsche en een cloot. In de Problemata Geometrica bepaalt hij zich, in aansluiting bij Archimedes, tot de verandering van een bolsegment in een kegel met hetzelfde grondvlak:

Is de hoogte van het segment  $= H$  en de straal van den bol, waarvan het deel uitmaakt  $= R$ , dan is de hoogte van den kegel  $= H(3R - H) / (2R - H)$ , d. i. de 4<sup>e</sup> evenredige tot  $2R - H$ ,  $(2R - H) + R$  en  $H$ .

Op even eenvoudige wijze laat zich een kegel in een kegel

<sup>1)</sup> . . . omni corpori Geometrico . . . æqualis conus potest describi (quarum descriptionum Problemata in nostra Geometria ordine collocabimus). . . p. 100.

van gegeven hoogte veranderen, met name  $K_2$  in een kegel  $K'$  van dezelfde hoogte als  $K_1$ : Is van  $K_2$  de hoogte  $= H_2$  en de middellijn van het grondvlak  $= D_2$  en van  $K_1$  de hoogte  $= H_1$ , dan is de middellijn van het grondvlak van  $K' = D_2 \sqrt{H_1 H_2} / H_1$ , d.i. de 4<sup>e</sup> evenredige tot  $\sqrt{H_1 H_2}$ ,  $H_1$  en  $D_2$ .

De middellijn van het grondvlak van den kegel  $K \sim K_1$  en  $= K'$  wordt vervolgens gevonden door uitvoering van de beide eerste constructies, in Stevin's hoofdstelling vermeld.

Bedenkt men eindelijk, dat de kegels, waarin men, bij toepassing van een zelfde handelwijze, gelijkvormige lichamen kan veranderen, eveneens gelijkvormig zijn, dan levert de constructie van het lichaam  $L \sim L_1$  en  $= K'$  geen moeilijkheden meer op, daar men van de gelijkvormige kegels  $K' = L$  en  $K_1 = L_1$  een paar gelijkstandige lijnen, de middellijnen van de grondvlakken, kent.

Stevin past zijn algemeene constructie toe op kegels, op cylinders, op bolsegmenten en, door berekening, op regelmatige vierzijdige pyramiden; de cylinders en pyramiden behoeven blijkbaar niet in kegels veranderd te worden. Bij de bolsegmenten stelt hij naast zijn eigen handelwijze die van Archimedes, waarvan de zijne niet wezenlijk verschilt.<sup>1)</sup> Immers, na, evenals Stevin, de bolsegmenten in de kegels  $K_1$  en  $K_2$  met de grondvlakken dier segmenten als grondvlakken veranderd te hebben, construeert Archimedes:

a)  $P$  als 4<sup>e</sup> evenredige tot  $H_1$ ,  $D_1$  en  $H_2$ ;

b)  $D$  en  $Q$  als middelevenredigen tusschen  $D_2$  en  $P$ ;  
waarmede de middellijn  $D$  van het grondvlak van den kegel  $K \sim K_1$  en  $= K_2$  gevonden is.

De verandering van  $K_2$  in een kegel  $K'$  van dezelfde hoogte als  $K_1$  bij Stevin was tegenover Archimedes' constructie zeker geen vereenvoudiging.

Zowel door Stevin als door Archimedes moeten twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen geconstrueerd worden. Dit werkstuk verlangt eenige toelichting.

<sup>1)</sup>

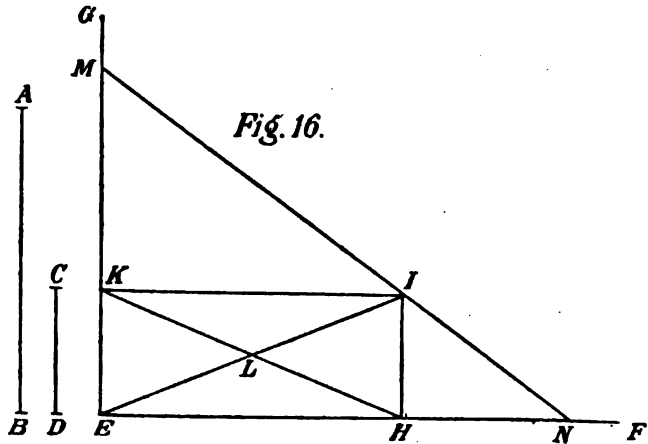
Nota.

Non importune videtur huic Problemati applicari modus constructionis Archimedis eiusdem Problematis, ex propositione 5. lib. 2. de sphaera & cylindro sumptus, vt cuivis concordantia particularis descriptionis problematis Archimedis, cum vniverfali hac nostra constructione fit manifesta. p. 96.

Zooals bekend is, werd het Delische vraagstuk der verdubbeling van den kubus, in de 5<sup>e</sup> eeuw v. Chr. door het orakel te Delphi opgeworpen, door Hippocrates van Chios<sup>1)</sup> teruggebracht tot de bepaling van twee middelevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen, de ribbe van den kubus en haar 2-voud, een werkstuk, waarvan een meetkundige constructie met passer en liniaal niet mogelijk is, maar dat langs andere wegen o.a. door Archytas, Plato, Eudoxus, Menechmus, Apollonius, Eratosthenes, Hero, Philo van Byzantium, Nicomedes, Diocles en Pappus is opgelost.

Stevin beschrijft Hero's constructie:

Meet, als de middelevenredigen tusschen AB en CD gevonden moeten worden, op de beenen van den rechten hoek FEG



(Fig. 16) de stukken  $EH = AB$  en  $EK = CD$  af, voltooi den rechthoek  $EKI H$  en beschrijf uit het snijpunt  $L$  der diagonalen als middelpunt een cirkel, die  $EG$  in  $M$  en  $EF$  in  $N$  snijdt, zóó, dat de punten  $M$ ,  $I$  en  $N$  in één rechte lijn komen te liggen, welk doel men door probeeren moet zien te bereiken:  $KM$  en  $HN$  zijn dan de gezochte middelevenredigen.

Voor het bewijs verwijst Stevin naar Eutocius' (8<sup>e</sup> eeuw n. Chr.) commentaar op het 2<sup>e</sup> boek van Archimedes' Bol en Cylinder, en voor de constructie van middelevenredigen door andere

<sup>1)</sup> Niet te verwarren met diens naamgenoot, den beroemden geneesheer Hippocrates van Cos.

instrumentale hulpmiddelen dan passer en liniaal naar zijn eerlang uit te geven Geometria.<sup>1)</sup> Evenals in de *Problemata Geometrica* vindt men de constructie in de *Meetdaet* (4 Bovck, 4 Voorstel, p. 123) echter slechts „na de vondt van Hero” uitgevoerd, met de bijvoeging: „Maer om tusschen twee ghegheven linien meetconstelick te vinden twee of meer middeleveredenighe, soo veel alffer begheert worden daer toe dient den tuych van Eratosthenes deur den voornoemden Eutochius beschreven”.

Den wezenlijken inhoud van het 4<sup>e</sup> boek der *Problemata Geometrica* vindt men in de *Meetdaet* terug, alwaar het 28 Voorstel van het Derde Deel Des Sesten Bovcx Van T' Verkeeren Der Lichamen de constructie verlangt van een veelvlak  $V \sim V_1$  en  $= V_2$ .

$V_1$  en  $V_2$  worden veranderd in rechte prisma's met een zelfde, maar overigens willekeurig grondvlak.<sup>2)</sup>

Zijn  $H_1$  en  $H_2$  de hoogten dier prisma's en is  $R_1$  een ribbe van  $V_1$ , dan construeert Stevin:

a) P als 4<sup>e</sup> evenredige tot  $H_1$ ,  $H_2$  en  $R_1$ ;

b) R en Q als middelevenredigen tusschen  $R_1$  en P;  
en eindelijk  $V \sim V_1$  op R als gelijkstandige ribbe van  $R_1$ .

Tot lichamen met gebogen vlakken breidt Stevin het werkstuk in de *Meetdaet* niet uit: vermoedelijk zal hij dit overbodig gerekend hebben na alles wat hij over de verandering dier lichamen in cylinders en kegels mededeelt (6 Bovck, 29—34 Voorstel).

Het 5<sup>e</sup> boek van de *Problemata Geometrica* eindelijk handelt over de constructie van een meetkundig lichaam, gelijkvormig

<sup>1)</sup>

Nota.

Et si hoc Problema (quamvis non Geometrica) per diuersa instrumenta multifariam à veteribus sit inventum, dabitur tamen hic tantum vnicum exemplum per lineas, secundum modum Heronis. Reliquos modos qui per instrumenta expediuntur, in nostra Geometria suis instrumentis accommodatis breuiter speramus nos edituros. p. 85.

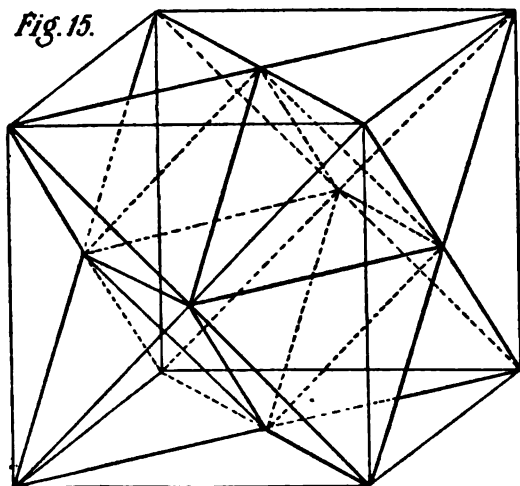
<sup>2)</sup> Door het construeeren van 4<sup>e</sup> evenredigen kan men een driehoek, dus ook een willekeurigen veelhoek, in een rechthoek van gegeven lengte veranderen; evenzoo een pyramide, dus ook een willekeurig veelvlak, in een recht prisma met gegeven grondvlak (men beginne met de grondvlakken van pyramide en prisma in rechthoeken van dezelfde lengte te veranderen).

Clavius' uitgaaf van Euclides' Elementen en spreekt niet van „abscindere” en „elevare”, maar van „truncare” en „augere”.

Hetzelfde kan niet van Dürer's Geometria gezegd worden: de spaarzame opmerkingen over afknoten en vermeerderen, die voorkomen in dit werk <sup>1)</sup>, waarin overigens bij dit onderwerp niet wordt stilgestaan, zouden voor Stevin inderdaad een wijziging hebben kunnen wezen, om in die richting voort te gaan.

Wat het denkbeeld der afknotting aangaat, acht ik dit zelfs niet onwaarschijnlijk, maar dat der vermeerdering werd hem, naar zijn eigen getuigenis, pas later door een vond van Frans Cophart, directeur der Leidsche muziekvereniging, aan de hand gedaan <sup>2)</sup>.

Fig. 15.



Cophart's vond bestond naar diens eigen meening in niet

<sup>1)</sup> Quando ab his corporibus per planas abscissiones anguli amputantur, deinde anguli remanentes quoq; abscinduntur, sic poterunt fieri multiplicia e his corpora. Ex his rebus varia fieri possunt, cū pars earū transponitur inter se id quod ad excisionem statuarū & columnarum earumq; ornatū conducit.

Dürer, t. a. p., p. 158.

In his etiam corporibus sup singulas superficies planas poteris statuere pūctum acutum, altum, aut depressum facere, tot quidem angulorum quot fuerint anguli in superficie super quam steterit punctus.

Dürer, t. a. p., p. 150.

<sup>2)</sup> Postea verò factum est (recitamus hæc quia aliquando non iniucundu est inventionum occasiones non ignorare) vt Franciscus Cophart Archimusicus nostri Leidenſis Musicorum collegij, & Geometriæ singularis amator, vellet mi persuadere se casu quodam sextum corpus regulare vidiſſe, cuius construct talis erat: . . . . p. 47.

minder dan de constructie van een zesde regelmatig veelvlak als overschot van een kubus, waarvan bij de ribben viervlakken zijn weggesneden, die de uiteinden dier ribben en de middelpunten van de in die ribben samenkomende zijvlakken tot hoekpunten hebben (Fig. 15).

Stevin bestreed de bewering van zijn stadgenoot met de opmerking, dat diens „*sextum corpus regulare*” een der kenmerken van een regelmatig veelvlak mist: de veertien hoekpunten liggen niet op een zelfde, maar in groepen van zes en acht op twee verschillende concentrische boloppervlakken.<sup>1)</sup>

Bij nadere beschouwing bleek hem, dat Cophart's veelvlak uit een regelmatig achtvlak bestaat met op ieder zijvlak als basis een regelmatig viervlak. En het was dit denkbeeld, dat hem tot de constructie van zijn vermeederde regelmatige veelvlakken aanleiding gaf.<sup>2)</sup>

Een niet zeer vruchtbaar denkbeeld voorzeker! Had Stevin daarentegen in verbinding der hoekpunten van een regelmatig zesvlak, in uitbreiding der zijvlakken van een regelmatig achtvlak den oorsprong van Cophart's veelvlak herkend, wellicht was hij er dan in geslaagd aan de regelmatige twaalf- en twintigvlakken de ontdekking van een paar andere regelmatige ster veelvlakken te ontleenen, zelfs al was hem de ware aard dier veelvlakken verborgen gebleven, evenals Cophart vermoedelijk in zijn zesde regelmatig veelvlak niet een regelmatig ster veelvlak met acht driehoekige zijvlakken en evenveel driezijdige drielvlakshoeken, maar slechts een regelmatig veelvlak, ingesloten door vierentwintig gelijkzijdige driehoeken, zal hebben gezien.

Inderdaad evenwel opent Cophart's „*sextum corpus regulare*” als discontinu regelmatig achthoekig achtvlak de rij der regelmatige ster veelvlakken, waarvan aan Kepler en aan Poinsoot de eer der ontdekking toekomt.

<sup>1)</sup> Igitur quia hoc corpus non habebat omnes proprietates quæ in regularibus corporibus requiruntur, concludebamus illud non esse sextum corpus regulare. p. 48.

<sup>2)</sup> Postea verò vidimus tale corpus esse octoedrum cui apposita erant octo tetraedra, quorum bases erant octoedri octo superficies. Cumque hoc animaduerteremus vñà cùm elegantia ipsius, atque Geometricis rationibus in eo consistentibus, adplicauimus talem constructionem ad cetera quatuor regularia corpora, quæ omnia regularia aucta vocauimus. p. 48.

optelling van gelijkvormige lichamen) als 9 Voorstel en Problema III (over de aftrekking van gelijkvormige lichamen) als 10 Voorstel in het Derde Deel Des Derden Boecx Vande vier afcomften als vergaring, aftrekking, menichvuldiging, en deeling der lichamen; Problema I (over de optelling van gelijkvormige vlakken) komt voor als 5 Voorstel en het overeenkomstige werkstuk over de aftrekking van gelijkvormige vlakken, dat men in de *Problemata Geometrica* niet aantreft, als 6 Voorstel in het Tweede Deel Des Derden Boecx Vande vier afcomften als vergaring, aftrekking, menichvuldiging, en deeling der vlakken.

Stevin's *Problemata Geometrica* (1583), hebben we gezien, vormen een zelfstandig werk, verschillend van diens *Meetdaet* (1605, 2<sup>e</sup> Stuck der *Wisconstige Gedachtenissen*) = *Praxis Geometriæ* (1605, Tomus II der *Hypomnemata Mathematica*, de door Snellius bezorgde Latijnsche vertaling van de *Wisconstige Gedachtenissen*) = *Practique de Géométrie* (1634, Volume III van Girard's Fransche uitgaaf van de *Oeuvres Mathématiques* de Stevin).

Hun inhoud vindt men grootendeels in de *Meetdaet* terug: dien van Lib. I in Bk. 5 (en 4), van Lib. IV in Bk. 6 (en 4) en van Lib. V in Bk. 3; de netwerken van Lib. III eindelijk in Bk. 1; alleen de „*regula falsi continuæ quantitatis*” van Lib. II treft men in de *Meetdaet* niet aan; — daarentegen komt alles, wat Stevin in Lib. I over verhoudingen en evenredigheden mededeelt, bijna onveranderd voor in diens *Arithmétique* (1585).

Vandaar, dat de Latijnsche *Problemata Geometrica* in de Nederlanden door de Neerduytsche *Meetdaet* verdrongen werden en door Girard niet, naast dit werk, onder de „*Oeuvres Mathématiques*” van Stevin zijn opgenomen, een omstandigheid, waardoor diens merkwaardig, maar zeldzaam geschrift in het buitenland nagenoeg onbekend is gebleven.

Aangenaam was mij de taak een poging aan te wenden, om den voorlooper der *Meetdaet* voor algeheele vergetelheid te helpen bewaren, aangenaam en — leerrijk; want niet vergeefs meestal, o Mirza Schaffy, zoekt, „in alter Bücher Staub vertieft”, wie vinden wil, naar „*Weisheit und Erfahrung*”:

There are more things in heaven and earth,  
Than are dreamt of in your philosophy.

HAMLET.



## A A N T E E K E N I N G E N .

Problematum / Geometricorum / In gratiam D. Maximiliani,  
Domini A / Crvningen &c. editorum, Libri V. / Auctore / Simone  
Stevinio Brvgense. / Vignet met randschrift: In Dies Arte Ac  
Fortvna /

Antverpiae, / Apud Ioannem Bellerum ad insigne / Aquilæ  
aureæ. /

4<sup>o</sup>. 19½ × 15 cM. A1<sup>1</sup>, p. 1, *Titel*. A1<sup>2</sup>, p. 2, *Verzen*: *In Geometrica Problemata Simonis Stevinii, Luca Belleri I. P. Carmen.*, 27 regels; *In Eiusdem Geometrica Problemata Henricus Vuithemius.*, 12 regels. A2, pp. 3—4: *Illustrissimo Heroi, D. Maximiliano, Domino Crvningae, Crevecœur, Heenvliet, Haservvode, Steenkercken, Vicecomiti Zelandiae &c. Supremo Machinarum Bellicarum Inferioris Germaniae Praefecto. Simon Stevinus. S. .P* A3<sup>1</sup>—E3<sup>1</sup>, pp. 5—37: *Liber Primus In Quo Demonstrabitur Quomodo à dato puncto in latere cuiuscunque rectilinei, recta linea Geometricè ducenda sit versus partem petitam, quæ rectilineum diuidat secundum rationem datam. Item Quomodo In Quocunque Rectilineo ducenda erit linea recta & parallela cum latere ipsius quæsito, quæ rectilineum diuidat versus partem petitam secundum rationem datam.* E3<sup>2</sup>—F3<sup>1</sup>, pp. 38—45: *Liber Secundus De Continuae Quantitatis regula Falsi.* F3<sup>2</sup>—L2<sup>1</sup>, pp. 46—83: *Liber Tertius De Quinque Regularium, Quinque auctorum Regularium & nouem Truncatorum regularium corporum eidem sphaeræ inscriptibilium descriptione.* L2<sup>2</sup>—N3<sup>1</sup>, pp. 84—101: *Liber Quartus In Quo Demonstrabitur Quomodo datis duobus corporibus Geometricis, tertium corpus describi potest, alteri datorum simile, alteri vero æquale.* N3<sup>2</sup>—P3<sup>2</sup>, pp. 102—118: *Liber Quintus In Quo Demonstrabitur Quomodo datis quibuscunque duorum similium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construi potest datis duobus æquale, & alteri datorum simile. Item quomodo datis quibuscunque duobus similium & inæqualium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construi potest tanto minus dato maiore, quantum est datum minus, & alteri datorum simile.* P4<sup>1</sup>, *Epilogus. en Errata.* 16 regels. P4<sup>2</sup>, wit.

[Een exemplaar van dit werk bezitten de Bibliotheek der

Rijksuniversiteit te Leiden, de Stadsbibliotheek te Antwerpen, de Bibliothèque Royale de Belgique te Brussel en de Bibliotheek van de Université Catholique te Leuven.]

LIBER PRIMVS.

24 Definitiones <sup>1)</sup>; 8 Problemata <sup>2)</sup>; 30 figuren <sup>3)</sup>.

Magnitudinum, quæ & termini dicuntur, com- paratio est in	Ratione quæ est	Regularis	Positiua defi. 2.
		Mutata	Transformata defi. 8.
		Irregularis, vt perturbata	Inversa defi. 9.
			defi. 10.
	Proportione quæ est	Regularis	Positiua. defi. 12.
		Mutata	Transformata defi. 19.
			Inversa defi. 20.
			Alterna defi. 21.
		Irregularis, vt perturbata	defi. 22.

*Definitio 1.* Terminus est vna finita magnitudo.

*Definitio 2.* Ratio magnitudinum est diuersorum terminorum eiusdem generis magnitudinis mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

*Definitio 3.* Ratio in duobus terminis paucissimis consistit.

*Definitio 4.* Binaria ratio est, quæ in duobus terminis consistit. Ternaria vero ratio quæ in tribus terminis: Et sic pari ordine secundum multitudinem terminorum vocabitur ratio.

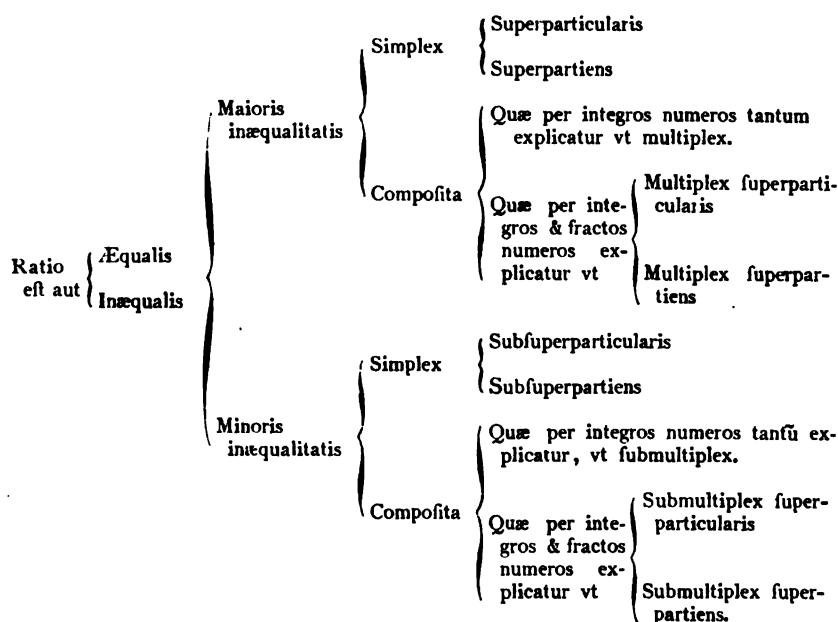
*Definitio 5.* Æquales rationes sunt, quarum termini sunt multitudine pares, & vt vnus rationis primi termini quantitas, ad secundi termini quantitatem: sic alterius rationis primi termini quantitas, ad secundi termini quantitatem. Si vero rationes essent ternariæ: tunc vt vnus rationis primi termini quantitas, ad secundi, & secundi ad tertii: sic alterius rationis primi termini quantitas, ad secundi, & secundi ad tertii: & sic deinceps pari ordine in omnibus rationibus secundum multitudinem terminorum.

*Definitio 6.* Explicabilis ratio est quæ explicabili numero explicari potest.

<sup>1)</sup> Bij Definitiones: dikwijls Explicatio, niet zelden Nota(æ).

<sup>2)</sup> Bij Problemata: Explicatio dati, Explicatio quæfiti, Constructio (soms met Distinctiones), soms Præparatio demonstrationis, Demonstratio (soms met Distinctiones), Conclusio en soms Nota(æ).

<sup>3)</sup> Houtsneden, tusschen den tekst.



*Definitio 7.* Inexplicabilis ratio est, quæ explicabili numero explicari non potest.

*Definitio 8.* Transformata ratio est, in qua per resumptionem fit termini vel terminorum transfiguratio.

*Definitio 9.* Inversa ratio est sumptio consequentis termini ad antecedentem.

*Definitio 10.* Perturbata ratio est, comparatio secundi termini ad tertium, & primi ad secundum: si verò plurium terminorum fuerit ratio, tum secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & sic deinceps quamdiu ratio extiterit: tandemque primi ad secundum.

*Definitio 11.* Perturbata ratio in tribus terminis paucissimis consistit.

*Definitio 12.* Proportio magnitudinum est duarum æqualium rationum similitudo.

*Definitio 13.* Binaria proportio est quæ ex duabus æqualibus binarijs rationibus consistit. Ternaria verò proportio quæ ex duabus æqualibus ternarijs rationibus consistit, & sic pari ordine secundum species rationum vocabitur proportio.

*Definitio 14.* Continua proportio est, cum quisque intermedius terminus vice antecedentis & consequentis sumitur.

*Definitio 15.* Continua proportio in tribus terminis paucissimis consistit.

*Definitio 16.* Discontinua proportio est cum quisque intermedius terminus vice antecedentis & consequentis sumi non potest.

*Definitio 17.* Discontinua proportio in quatuor terminis paucissimis consistit.

*Definitio 18.* Proportionis Homologi termini dicuntur, primus primæ rationis, cum primo secundæ rationis. Similiter dicuntur Homologi termini secundus primæ rationis, cum secundo secundæ rationis, & sic pari ordine in reliquis secundum multitudinem terminorum.

*Definitio 19.* Transformata proportio est quæ ex duabus æqualibus transformatis rationibus consistit.

*Definitio 20.* Inversa proportio est quæ ex duabus æqualibus inversis rationibus consistit.

*Definitio 21.* Alterna proportio est similis sumptio homologorum terminorum ad homologos terminos.

*Definitio 22.* Perturbata proportio est similitudo duarum æqualium rationum quarum altera est perturbata.

*Definitio 23.* Perturbata proportio in sex terminis paucissimis consistit.

*Definitio 24.* Cum tres termini proportionales fuerint: Primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor termini continuè proportionales fuerint, primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius quamdiu proportio extiterit.

PROBLEMA I. Datis rectilinei triangulis: Rectas lineas invenire inter se in ea ratione ac ordine vt sunt trianguli.

PROBLEMA II. A quouis angulo trianguli rectam lineam ducere, quæ diuidat triangulum versus partem petitam secundum rationem datam.

PROBLEMA III. A dato puncto in latere trianguli, rectam lineam ducere quæ diuidat triangulum versus partem petitam secundum rationem datam.

Sequentia quinque Problemata sunt ea quæ ante hac nunquam descripta putamus.

PROBLEMA IIII. A quouis angulo quadranguli, rectam lineam ducere, quæ diuidat quadrangulum versus partem petitam secundum rationem datam.

PROBLEMA V. A dato puncto in latere cuiuscunque rectilinei,

rectam lineam ducere quæ diuidat rectilineum versus partem petitam secundum rationem datam.

PROBLEMA VI. In dato triangulo rectam lineam ducere parallelam cum latere trianguli quæsito, quæ triangulum diuidat versus partem quæsitam secundum rationem datam.

PROBLEMA VII In dato trapezio <sup>1)</sup> rectam lineam ducere parallelam cum latere trapezij quæsito quæ trapezium diuidat versus partem quæsitam secundum rationem datam.

*Modus primus.* Vbi linea diuidens trapezium cadit in duo latera eundem angulum continentia.

*Modus secundus.* Vbi linea diuidens trapezium cadit in duo latera trapezij opposita.

PROBLEMA VIII. In dato quocunque rectilineo rectam lineam ducere parallelam cum latere rectilinei quæsito, quæ rectilineum diuidat versus partem quæsitam secundum rationem datam.

## LIBER SECVNDVS.

### 1 Problema; 4 figuren.

*Quid sit regula Falsi.* Quoniam geometriam (quam breuiter speramus nos edituros) in Methodum Arithmeticæ methodo similem digessimus (quod naturalis ordo videtur requirere propter magnam convenientiam continuæ & discontinuæ quantitatis vbi quodcunque genus magnitudinis, vt sunt linea, superficies, corpus, per quatuor species, vt Additionem, Subtractionem, Multiplicationem & Diuisionem, præterea per regulas, vt proportionum &c. tractabimus) offerebat se quoque ex ordine Problema quoddam, vbi per falsam positionem veram solutionem petitam Geometricè inueniremus: Quare vt continuæ & discontinuæ quantitatum correspondentiam tantò manifestius redderemus (nam vulgaris quædam regula in Arithmetica habetur quæ regula Falsi dicitur) Regulam Falsi continuæ quantitatis nominauimus, non quod falsum docet, sed quia per falsam positionem pervenitur ad cognitionem veri.

Utilitas huius regulæ inter alia hæc est, Quod eam quasi quoddam generale Problema citare possimus, quoties alicuius occultæ magni-

---

<sup>1)</sup> Evenals Euclides vat Stevin onder den naam „trapezium” alle vierhoeken samen, die geen parallelogrammen zijn. In zijn tegenwoordige beteekenis kwam de term pas onistreeks het midden van de 18<sup>e</sup> eeuw algemeen in gebruik. (Chasles, *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*, 2<sup>ième</sup> Edition, Parijs 1875, p. 422. Noot.)

tudinis quantitatem & formam operæpretium erit invenire, id enim inebitur tantum per regulam Falsi expediri. Itaque sæpe non opus erit in Problematum constructionibus quarundam occultarum magnitudinum inventionem copiosius describere.

**PROBLEMA.** Ex datæ lineæ explicata tantum qualitate, superficiem describere æqualem & similem superfici ei in qua ipsa linea existit.

*Exemplum primum.* Sit data recta A, linea cuiusdam occulti æquilateri trianguli, talis vt si linea æqualis perpendiculari ab angulo in medium oppositi lateris secetur à latere, & reliquo addatur recta æqualis rectæ à centro trianguli in medium lateris. Summa Additionis sit ipsa A.

Oporteat ex huiusmodi lineæ A explicata qualitate, æquilaterum triangulum describere, æqualem æquilatero occulto in quo existit A.

*Exemplum secundum.* Sit data recta A, linea cuiusdam occulti quadrati talis, vt si linea æqualis lateri ipsius quadrati secetur à diagonali, reliquum sit ipsa A.

Oporteat ex huiusmodi lineæ A explicata qualitate, quadratum describere, æquale quadrato occulto in quo A existit.

*Exemplum tertium.* Sit data recta A linea perpendicularis cuiusdam occulti pentagoni æquilateri & æquianguli, ab angulo in medium ipsius oppositi lateris.

Oporteat ex eiusmodi lineæ A explicata qualitate pentagonum describere, æquale est simile pentagono occulto in quo A existit.

*Exemplum quartum.* Sit data recta A, linea cuiusdam occulti rectiliniij similis rectilineo BCDEF, ita vt linea æqualis occulti rectilinei homologæ lineæ cum BC, secta ab occulti rectilinei homologa linea cum FC, & reliquo addita occulti rectilinei homologa linea cum FE, sit in directum vnus lineæ ipsa data linea A.

Oporteat ex huiusmodi lineæ A explicata qualitate rectilineum describere, æquale & simile similiter'que positum rectilineo occulto in quo A existit.

## LIBER TERTIUS.

22 Definitiones; 2 Problemata; 21 figuren.

Præter quinque corpora regularia quorum Mathematici meminerunt, animaduertimus alia quædam corpora quæ quamvis talem non haberent regularitatem vt in quinque illis regularibus requiritur (nam demonstratur quinque tantum talia corpora posse inveniri) nihilominus Geometricarum speculationum essent plena, ac mirabilis dispositionis correlatiuarum superficierum Horum autem corporum

sex meminit Albertus Durerus, in sua Geometria (sunt quidem in eadem Alberti descriptione & alia duo corpora quæ ex complicatis planis componuntur quorum alterum non potest plicari, ratio est quia ad vnum angulum solidum construendum compositi sunt tres anguli plani æquales quatuor rectis, qui angulum solidum per 21. prop. lib. 11. Euclid. non constituunt. Alterum verò corpus non continetur intra metas quæ in sequenti 11. definit. sunt positæ, quare illa duo corpora reliquimus) sed cum talium corporum originem vel nomina apud neminem inveniremus tamen existimaremus non sine aliquo certo fundamento consistere, vidimus tandem regularia corpora ipsorum esse scatebram, nam illorum vnum, erat tetraedrum truncatum, altera tria, truncati cubi, & quintum, truncatum octaedrum: Sexti verò corporis truncatio hæc scribentibus nobis erat ignota, quamvis ex truncato cubo originem habere non dubitamus. Cum'que hæc nobis essent nota invenimus (nam tale quid sæpe fit cum rerum causas cognoscimus) alia tria corpora non minoris elegantiae nempe ex truncatis Dodecaedro & Icosaedro. Quorum definitiones sunt sequentes defi. 20. 21. 22. Et ipsorum planorum dispositiones in sequenti secundo Problemate distinct. 17. 18. 19. inveniuntur. Si forte ab alio ante nos sunt inventa (de quo ferè non dubitarem propter magnam diligentiam veterum in formarum inquisitione) fatemur hoc nos ignorare. Quare vt pro nostro invento talia edimus.

Postea verò factum est (recitamus hæc quia aliquando non iniucundum est inventionum occasiones non ignorare) vt Franciscus Cophart Archimusicus nostri Leidensis Musicorum collegij, & Geometriæ singularis amator, vellet mihi persuadere se casu quodam sextum corpus regulare vidisse, cuius constructio talis erat:

Ducantur omnes Diagonales lineæ omnium quadratorum cubi, ducantur deinde plana ab omnibus angulis solidis cubi per duas diagonales lineas vsque ad ipsarum diagonalium medietates, excindantur'que hoc modo omnia superficierum cubi latera, cum subiecta solida parte ipsius cubi inter duo secantia plana comprehensa. Erunt itaque cubo (quoniam duodecim habet latera) duodecim crenæ incisæ: relinquetur'que elegans corpus in viginti & quatuor æqualibus triangulis æquilateris contentum. Quare ille argumentabatur hoc modo:

Corpora sphaeræ inscriptibilia quorum superficies sunt omnes æquales & similes, sunt corpora regularia:

Corpus hoc est corpus sphaeræ inscriptibile, cuius superficies sunt omnes æquales & similes:

Ergo est corpus regulare, & per consequens sextum.

Sed negabamus partem antecedentem assumptionis, quoniam tale corpus non est corpus sphaerae ita inscriptibile, ut in regularium corporum inscribilitate requiritur, nam sensus ibi est omnes angulos solidos corporum debere existere in superficie sphaerae circumscriptae, huius verò corporis duae sunt species solidorum angulorum, nam alterius speciei anguli sunt externi, alterius interni. Verum quidem est omnes angulos externos eidem sphaerae esse inscriptibiles: Similiter & omnes angulos internos eidem sphaerae inscriptibiles: Sed non omnes eidem, nam alia est sphaera externorum angulorum alia interiorum. Igitur quia hoc corpus non habebat omnes proprietates quae in regularibus corporibus requiruntur, concludebamus illud non esse sextum corpus regulare. Postea verò vidimus tale corpus esse octoedrum cui apposita erant octo tetraedra, quorum bases erant octoedri octo superficies. Cum'que hoc animadverteremus vnà cum elegantia ipsius, atque Geometricis rationibus in eo consistentibus, adplicauimus talem constructionem ad cetera quatuor regularia corpora, quae omnia regularia aucta vocauimus, quorum constructio & eidem sphaerae inscriptio vnà cum ceteris, est materia de qua nunc agetur.

#### Definitiones quinque corporum regularium.

*Definitio 1.* Tetraedrum est corpus sub quatuor triangulis aequalibus & aequilateris contentum.

*Definitio 2.* Cubus est corpus sub sex quadratis aequalibus contentum.

*Definitio 3.* Octoedrum est corpus sub octo triangulis aequalibus & aequilateris contentum.

*Definitio 4.* Dodecaedrum est corpus sub duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis contentum.

*Definitio 5.* Icosaedrum est corpus sub viginti triangulis aequalibus & aequilateris contentum.

#### Definitiones quinque auctorum corporum regularium.

*Definitio 6.* Si cuicunque superficiei tetraedri apponatur tetraedrum habens superficiem illam pro basi: Corpus ex illis compositum duodecim triangulis aequalibus & aequilateris contentum vocatur tetraedrum auctum.

*Definitio 7.* Si cuicunque superficiei hexaedri apponatur pyramis habens superficiem illam pro basi, & reliquas superficies triangula aequilatera: Corpus ex illis compositum vigintiquatuor triangulis aequalibus & aequilateris contentum, vocatur Hexaedrum auctum.



*Definitio 8.* Si cuicunque superficiei octoedri apponatur tetraedrum habens superficiem illam pro basi: Corpus ex illis compositum viginti & quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur octoedrum auctum.

*Definitio 9.* Si cuicunque superficiei dodecaedri apponatur pyramis habens superficiem illam pro basi, & reliquas superficies triangula æquilatera: Corpus ex illis compositum sexaginta triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur dodecaedrum auctum.

*Definitio 10.* Si cuicunque superficiei icosaedri apponatur tetraedrum habens superficiem ipsam pro basi: Corpus ex illis compositum sexaginta triangulis æqualibus & æquilateris contentum, vocatur icosaedrum auctum.

### Definitiones nouem truncatorum corporum regularium.

*Definitio 11.* Solidum sphaerae inscriptibile cuius anguli solidi sunt omnes æquales, & cuius plana non sunt omnia similia, & quodcunque planum est æquiangulum & æquilaterum, & omnium planorum latera sunt inter se æqualia: vocatur truncatum corpus regulare.

*Definitio 12.* Si omnia latera tetraedri diuidantur in tres partes æquas, & plano singulus angulus solidus tetraedri abscindatur, per trium laterum diuisiones ipsi angulo proximas; Reliquum solidum vocatur truncatum tetraedrum per laterum tertias.

*Definitio 13.* Si omnia latera cubi diuidantur in duas partes æquas, & plano singuli anguli solidi cubi abscendantur, per trium laterum diuisiones ipsi angulo proximas: Reliquum solidum vocatur Truncatus Cubus per laterum media.

*Nota.* Hoc corpus simile est truncato octoedro per laterum media sequentis 17. Definitionis.

*Definitio 14.* Si omnia latera cubi diuidantur in tres partes, hoc modo vt singulae mediae partes se habeant ad vtramque alteram partem ipsius lateris vt diagonalis quadrati ad suum latus, & plano singuli anguli solidi ipsius cubi abscendantur per trium laterum diuisiones ipsi angulo proximas: Reliquum solidum vocatur truncatus cubus per laterum diuisiones in tres partes.

*Definitio 15.* Si omnia latera cubi diuidantur in tres partes, hoc modo vt singulae mediae partes se habeant ad vtramque alteram partem ipsius lateris, vt diagonalis quadrati ad suum latus, & plano singula latera abscendantur per quatuor laterum diuisiones in ipsis abscindendis lateribus, non existentibus & ipsis lateribus proximas,

relinquetur corpus habens sex quadrata, & octo angulos solidos in æquidistantia à centro cubi, & ab eodem centro remotiores quàm reliqui anguli solidi: Si deinde singuli anguli illorum octo, plano abscindantur per tres proximos angulos planos trium quadratorum ipsis solidis angulis proximorum: Reliquum solidum vocatur bistruncatus cubus primus.

*Definitio* 16. Si omnia latera cubi diuidantur in quinque partes, hoc modo vt mediæ partes se habeant ad quamcunque partem reliquarum quatuor partium ipsius lateris, vt diagonalis quadrati ad suum latus, & plano singula latera abscindantur, per quatuor laterum diuisiones in vnoquoque abscindendo latere non existentes, & ipsi lateri proximas, relinquaturque hoc modo corpus habens sex quadrata & octo angulos solidos in æquidistantia à centro, & ab eodẽ centro remotiores quàm reliqui anguli solidi: Si deinde omnia latera illorum sex quadratorum diuidantur in tres partes, hoc modo vt singulæ mediæ partes se habeant ad vtramque alteram partem ipsius lateris, vt diagonalis quadrati ad suum latus, & plano singuli anguli solidi illorum octo angulorum abscindantur, per sex diuisiones illorum laterum quadratorum ipsis angulis solidis proximas: Reliquum solidum vocatur bistruncatus cubus secundus.

*Definitio* 17. Si omnia latera octoedri diuidantur in duas partes æquas, & plano singuli anguli solidi octoedri abscindantur per quatuor laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum octoedrum per laterum media.

*Nota.* Hoc corpus simile est truncato cubo per laterum media 13. definitionis.

*Definitio* 18. Si omnia latera octoedri diuidantur in tres partes æquas, & plano singuli anguli solidi octoedri abscindantur, per quatuor laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur octoedrum truncatum per laterum tertias.

*Definitio* 19. Si omnia latera dodecaedri diuidantur in duas partes æquas, & plano singuli anguli solidi abscindantur per trium laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum dodecaedrum per laterum media.

*Nota.* Hoc corpus simile est truncato Icosaedro per laterum media sequentis 21. definitionis.

*Definitio* 20. Si omnia latera dodecaedri diuidantur in tres partes, hoc modo vt singulæ mediæ partes ad vtramque alteram partem ipsius lateris se habeant vt chorda arcus duarum quintarum peripheriæ circuli ad chordam arcus vnus quintæ eiusdem peripheriæ & plano singuli anguli solidi dodecaedri abscindantur per trium

laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum dodecaedrum per laterum diuisiones in tres partes.

*Definitio 21.* Si omnia latera Icosaedri diuidantur in duas partes æquas, & plano singuli anguli solidi icoſaetri abſcindantur per quinque laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur truncatum icoſaetrum per laterum media.

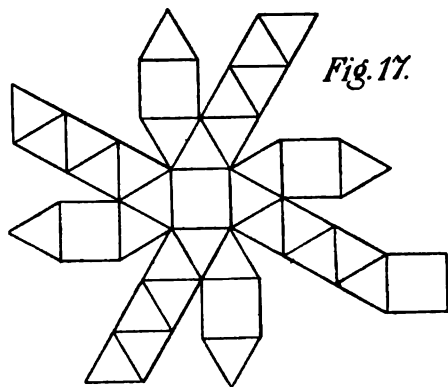
*Nota.* Hoc corpus ſimile eſt truncato dodecaetro per laterum media præcedentis 19. definitionis.

*Definitio 22.* Si omnia latera icoſaetri diuidantur in tres partes æquas, & plano ſinguli anguli solidi icoſaetri abſcindantur per quinque laterum diuisiones ipsis angulis proximas: Reliquum solidum vocatur icoſaetrum truncatum per laterum tertias.

**PROBLEMA I.** Dato maximo circulo ſphæræ: latera quinque regularium corporum, quinque auctorum corporum, & nouem truncatorum corporum regularium, ipſi ſphæræ inſcriptibilium, inuenire.

**PROBLEMA II.** Datis lateribus quinque corporum regularium, & quinque auctorum regularium corporum, & nouem truncatorum regularium corporum, eidem ſphæræ inſcriptibilium, plana conſtruere ac diſponere, quæ ſi ritè complicantur efficiant ipſa corpora.

*Appendix.* Planorum verò diſpoſitio corporis truncati (cuius eſt facta mentio in principio huius 3. lib.) cuius truncandi modus hæc ſcribentem me latebat talis eſt: Diſponantur, vt infra [Fig. 17], ſex quadrata & 32. trianguli.



*Fig. 17.*

Sed propter ipſius truncationis, ſeu veræ originis ignorantiam non potuimus hoc Geometricè antedictæ ſphæræ inſcriptibile cum ceteris conſtruere.

## LIBER QVARTVS.

4 Problemata; 1 Theorema <sup>1)</sup>; 9 figuren.

PROBLEMA I. Datis duabus rectis lineis duas medias proportionales invenire.

*Nota.* Etſi hoc Problema (quamvis non Geometricè) per diuerſa instrumenta multifariam à veteribus ſit inventum, dabitur tamen hic tantum vnicum exemplum per lineas, ſecundum modum Heronis. Reliquos modos qui per instrumenta expediuntur, in noſtra Geometria ſuis instrumentis accommodatis breuiter ſperamus nos edituros.

PROBLEMA II. Dato cono æqualem conum ſub data altitudine deſcribere.

PROBLEMA III. Dato chordæ ſegmento ſphærali, æqualem conum deſcribere, habentum baſin cum chordæ ſegmento eandem.

PROBLEMA IIII. ac quæſitum huius Quarti libri: Datis quibuſcunque duobus corporibus Geometricis, tertium corpus deſcribere, alteri datorum ſimile, alteri vero æquale.

*Exemplum primum.* Sint duo corpora quæcunque, nempe duo conſ ABC, & DEF, ſit'que conſ DEF altitudo, recta DG, & baſis diameter EF.

Oporteat tertium conum conſtruere, cono DEF ſimilem & cono ABC æqualem.

*Exemplum ſecundum.* Antedicta conorum conſtructio ac demonſtratio applicari poteſt ad ſubſcriptos cylindros: —

*Exemplum tertium.* Sint duo chordæ ſegmenta ſphæralia ABCD, & EFGH, ſit'que chordæ ſegmenti EFGH, altitudo HF, & baſis diameter EG.

Oporteat tertium chordæ ſegmentum ſphærale conſtruere, ſegmento EFGH ſimile, & ſegmento ABCD æquale.

[*Exemplum quartum.*] Sit pyramis ABC, cuius baſis ſit quadratum, & laſus BC eiufdem quadrati 2 pedum, altitudo vero pyramidis AD ſit 12 pedum, quare ipſius pyramidis magnitudo 16 pedum: Sit deinde pyramis EFG, cuius baſis ſit quadratum, & laſus FG eiufdem quadrati 8 pedum, altitudo vero ipſius pyramidis EH 3 pedum.

Oporteat per numeros eo ordine, vt ſupra per lineas factum eſt, tertiam pyramidem deſcribere, pyramidi EFG ſimilem & pyramidi ABC æqualem.

<sup>1)</sup> Bij Theoremata: ſoms Explicatio datis, Demonſtratio en Concluſio.

**THEOREMA.** Si fuerit diametrorum basium tertia linea proportionalis, duorum rectorum conorum æqualis altitudinis, fuerit'que prima linea media proportionalis, duarum mediarum proportionalium, inter primam diametrum & tertiam, fuerit'que quædam recta linea in ea ratione ad illam primam mediam, vt primi coni altitudo ad suam diametrum basis: Conus rectus cuius diameter basis fuerit illa prima media, altitudo vero illa recta linea, similis erit primo cono, æqualis vero alteri cono.

### LIBER QUINTVS.

3 Problemata; 3 Theoremata; 12 figuren.

**PROBLEMA I.** Datis duobus planis similibus: tertium planum describere datis duobus æquale & alteri datorum simile.

**THEOREMA.** Si tertia linea proportionalis duarum homologarum linearum existentium in similibus planis, addatur primæ lineæ: Media linea proportionalis inter primam & illam compositam, est potentialiter homologa linea, cum illis homologis lineis, cuiusdam plani quod simile est alteri datorum; & æquale ambobus.

**PROBLEMA II.** Datis quibuscunque duorum similium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construere datis duobus æquale, & alteri datorum simile.

**THEOREMA.** Si quarta linea proportionalis duarum homologarum linearum existentium in similibus corporibus, addatur primæ lineæ: Antecedens linea duarum mediarum proportionalium inter primam & illam compositam, est potentialiter homologa linea cum illis homologis lineis, cuiusdam corporis quod simile est alteri datorum, & æquale ambobus.

**PROBLEMA III.** Datis quibuscunque duorum similium & inæqualium Geometricorum corporum homologis lineis, tertium corpus construere, tanto minus dato maiore, quantum est datum minus, & alteri datorum simile.

**THEOREMA.** Si à quarta linea proportionali duarum homologarum linearum existentium in similibus inæqualibus corporibus, auferatur minor homologarum: Antecedens linea duarum mediarum proportionalium, inter minorem homologam lineam, & illius lineæ reliquum, est potentialiter homologa linea cum illis homologis, cuiusdam corporis quod simile est alteri datorum corporum, & tanto minus dato maiore, quantum est datum minus.

---

SUR LA TRANSFORMATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE,

PAR

W. KAPTEYN.

(Utrecht.)

Dans cette note je me propose de démontrer l'identité suivante

$$\int_0^\mu \frac{\phi \sin \phi d\phi}{\sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \mu \sin^2 b}} = \int_0^\mu \operatorname{tg} \phi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos b} d\phi$$

de deux intégrales définies de forme bien différente.

Pour y parvenir je me servirai de la formule

$$\int_a^b d\rho \int_\rho^b z ds = \int_a^b ds \int_a^s z d\rho$$

de Lejeune-Dirichlet, dont les deux membres expriment le même volume compris entre la surface  $z = f(\rho, s)$ ,  $f(\rho, s)$  désignant une fonction quelconque qui reste finie entre les limites des intégrations, et les quatre plans  $z=0$ ,  $s=\rho$ ,  $\rho=a$ ,  $s=b$ .

En choisissant

$$z = \frac{\rho}{s \sqrt{s^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}}, \quad a = \cos \mu, \quad b = 1$$

cette formule donne

$$\begin{aligned} & \int_{\cos \mu}^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}} \int_\rho^1 \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - \rho^2}} = \\ & \int_{\cos \mu}^1 \frac{ds}{s} \int_{\cos \mu}^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{s^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_{\rho}^1 \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - \rho^2}} = \frac{1}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}$$

$$\int_{\cos \mu}^s \frac{\rho d\rho}{\sqrt{s^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}} =$$

$$= - \left| \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 - \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}} \right|_{\cos \mu}^s = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 - \cos^2 \mu}}{\cos \mu \cos b}$$

par suite

$$\int_{\cos \mu}^1 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \cos^2 \mu \sin^2 b}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} d\rho =$$

$$= \int_{\cos \mu}^1 \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{s^2 - \cos^2 \mu}}{\cos \mu \cos b} ds$$

ou, en posant  $\rho = \cos \phi$  et  $s = \frac{\cos \mu}{\cos \phi}$

$$\int_0^{\mu} \frac{\phi \sin \phi d\phi}{\sqrt{\cos^2 \phi - \cos^2 \mu \sin^2 b}} = \int_0^{\mu} \operatorname{tg} \phi \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos b} d\phi.$$

## BIBLIOGRAPHIE.

---

**Le traité des sinus de Michiel Coignet publié par HENRI BOSMANS de la Compagnie de Jésus. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1901, 8°.**

[pp. 1—41, Introduction. pp. 42—31, Notes de l'introduction. pp. 32—55, Texte de Coignet. pp. 56—80, Notes du texte.]

In zijn *Ideae mathematicae pars prima*, 1593, roemt Adriaan van Roomen zijn tijdgenoot Michiel Coignet van Antwerpen als een bekwaam wis- en werktuigkundige en gewaagt o.a. met lof van diens onuitgegeven geschriften over reken-, meet- en sterrenkunde.

Eenige dier handschriften, die wegens de ongunst der tijden nimmer in druk zijn verschenen, bezit de Koninklijke Bibliotheek te Brussel, t.w. een verhandeling over de samenstelling van goniometrische tafels, een over vlakke-driehoeksmeting en een over het gebruik van een verdeelde liniaal, pantometer genoemd, bij de oplossing van meetkundige vraagstukken.

Door de uitgaaf van de verhandeling over de samenstelling van goniometrische tafels — *Le Traicté des Sinus* — hoopt P. Bosmans de herinnering aan zijn landgenoot te verlevendigen en een geleerde, op wien België met recht trotsch mag wezen, voor vergetelheid te bewaren. In de belangrijke historische inleiding, die het *Traicté des Sinus* voorafgaat, vindt men o. a. een overzicht van den inhoud van de verhandelingen over vlakke-driehoeksmeting en over den pantometer, terwijl aan Inleiding en *Traicté* talrijke aantekeningen zijn toegevoegd.

Hoewel dankbaar voor wat P. Bosmans den liefhebbers van de historie der wiskunde hier aanbiedt, kan ik bezwaarlijk instemmen met den lof door hem aan C.'s geschrift toegezwaid, want diens verhandeling, den 19en October 1612 voltooid,



blijkt reeds bij een oppervlakkige vergelijking grootendeels bewerkt te zijn naar Pitiscus' *Trigonometria*, met name naar het tweede en het vijfde boek der Augsburgser uitgaaf van 1600.

De gang der berekening van de sinussen, tangenten en secanten der bogen bij C. stemt geheel overeen met dien bij P. en de bekortingen, door dezen toegepast, vindt men bij genen terug. Zoo beantwoorden: C.'s „*Practiq; pour examiner si les tables de sinus sont bien calculees*” (pp. 47—50) aan P.'s „*Compendium Canonis condendi primum*” (pp. 111—113); — C.'s „*reigles compendieuses pour le faict des Tables des Tangentes, et Secantes*” en diens „*Reigle pour former la table des secantes par laide des Tangentes*” (pp. 51—53) met twee van diens voorbeelden aan P.'s „*C. C. c. secundum*” en „*tertium*” (pp. 113—119); — C.'s „*Abreuiations sur la reigle de trois aux tables de Sinus*” (pp. 53—55) met twee van diens voorbeelden aan P.'s „*C. C. usurpandi primum*” en „*secundum*” (pp. 119—122): C.'s derde voorbeeld, aan de sferische astronomie ontleend, komt, met andere gegevens, bij P. op p. 285 voor. Bij dezen ontbreken evenwel het 2e, 7e en 8e problema van C., die „*ne sont pas en grand vsaige aupres des Canonistes qui vueillent calculer les Tables de sinus, pour estre fort longues a practiquer*” (p. 43), alsmede de noot op pp. 45—47. (P. behandelt den inhoud dier noot „*ex mente Byrgii*” in den 2en en 3en druk van zijn leerboek, waaraan C.'s opmerkingen echter niet ontleend zijn.)

Op één zaak, die P. Bosmans niet onbekend geweest is (p. 72, noot 1) en hem den weg naar C.'s voornaamste bron had kunnen wijzen, moet ik nog de aandacht vestigen, t. w. op de overeenstemming in den vorm, waarin C. en P. de formules voor  $\sin(a \pm b)$  uitdrukken.

Bij C. leest men (p. 40):

„Le 5<sup>e</sup>. Probleme. Quand les sinus de deux diuers arcs sont donnez comment on trouuera le sinus de leur somme . . . .

La Reigle. Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du 2<sup>e</sup>. arc, et aussij multiplierez le sinus du 2<sup>e</sup>. arc, auecq; le complement du premier arc (sic), la somme de ces deux produiet partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherchoit,”

en bij P. (pp. 46 en 47):

„*Datis finibus duorum arcuum inæqualium coniunctim qua-*

drante minorum, unà cum finibus complementorum, finum summæ duorum illorum arcuum inuenire . . . . .

Primum multiplicentur alternatim sinus arcus unius per finem complementi alterius. Tum producta componantur. Denique; summa per radium diuidatur, hoc est, notæ quinq; à dextris abscindantur. Notæ reliquæ erunt sinus summæ datorum duorum arcuum." Enz.

Ook de bewijzen bij C. en P. stemmen geheel overeen: beiden leiden de stellingen uit het theorema van Ptolemeus af.

"Il est impossible", zegt P. Bosmans in een „Notice historique sur les formules  $\sin(a \pm b)$ " (pp. 62—73), waarin Rhæticus' Opus Palatinum de triangulis, 1596 — „un écrivain prolixe, obscur et souvent difficile" (p. 72) — als C.'s bron wordt aangewezen, „il est impossible d'être quelque peu familier avec les anciens traités de trigonométrie, sans être frappé de la netteté et de la précision, que la formule  $\sin(a \pm b) = (\sin a \cos b \pm \sin b \cos a) / R$  prend sous la plume de Coignet et de la forme, presque moderne, dirais je, sous laquelle elle y est énoncée . . . . Coignet déduit les formules  $\sin(a \pm b)$  des théorèmes de Ptolémée d'une manière si simple, si naturelle, qu'en lisant sa démonstration on est porté à se dire que ces formules ne sont que ces théorèmes eux-mêmes, énoncés en d'autres termes (p. 62) . . . . S'il y a du mérite à découvrir la vérité, il y en a aussi à la mettre en pleine lumière. Il faut reconnaître, que ce dernier mérite, Coignet l'a eu au plus haut degré. Il a profondément étudié Rheticus . . . . (p. 72)."

Niet aan Michiel Coignet evenwel, den wis- en werktuigkundige der aartshertogen Albertus en Isabella, komt deze lofspraak toe, maar aan den hofprediker van Frederik IV, keurvorst van de Palts, Bartholomeus Pitiscus, „le correcteur et le continuateur de Rheticus" (p. 72, noot 1).

N. L. W. A. GRAVELAAR.

Grondslagen der synthetische meetkunde door Dr. P. VAN GEER, Hoogleraar aan de Rijks-Universiteit te Leiden. Een deel in 8<sup>o</sup>, 186 blz. Prijs f 2.90. Leiden, A. W. SYTHOFF, 1901.

Spoediger dan men redelijkerwijze kon verwachten heeft de hooggeleerde schrijver het in zijn „Leerboek der analytische meetkunde" kenbaar gemaakte voornemen dit door een beknopt

werk over de grondslagen der synthetische meetkunde te laten volgen ten uitvoer gelegd.

In dit nieuwe werkje, dat er bovenal naar streeft eenvoudig te blijven, staat de dubbelverhouding in die mate op den voorgrond, dat eerst ver in de tweede helft het eigenlijke onderwerp „de projectieve voortbrenging der kegelsneden” aan de orde komt.

De door den schrijver gevolgde gedachtengang is het best af te leiden uit de opsomming van de titels der afdeelingen en der in deze voorkomende hoofdstukken. Ze zijn:

Eerste afdeeling (figuren van den eersten trap): 1. Bepalingen. 2. De dubbelverhouding. 3. Harmonische ligging. 4. Imaginaire elementen. 5. Homografie. 6. Dubbelelementen der homografie. 7. Involutie.

Tweede afdeeling (rechtlijnige figuren): 8. Volledige vierzijde en driehoek. 9. Vierhoek en zeshoek. 10. Perspectieve en projectieve figuren.

Derde afdeeling (de cirkel): 11. Een cirkel. 12. Twee cirkels. 13. Drie en meer cirkels.

Vierde afdeeling (elementaire theorie der kegelsneden): 14. Het ontstaan der kegelsneden. 15. De ellips. 16. De hyperbool. 17. De parabool.

Vijfde afbeelding (synthetische theorie der kegelsneden). 18. Bepalingen. 19. Ingeschreven vierhoek en omgeschreven vierzij. 20. Ingeschreven zeshoek en omgeschreven zeszij. 21. Peilverwantschap. 22. Middelpunt, middellijnen, assen. 23. Brandpunten en richtpunten.

Zesde afdeeling (verwante kegelsneden). 24. Wederkeerige poolfiguren. 25. Kegelsnedebundel en kegelsnedeschaar.

Aanhangsel. 1. De isotrope richtingen. 2. Analytische bepaling der brandpunten.

Vraagstukken en toepassingen.

Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens von Dr. ARTHUR VON OERTINGEN, Prof. ord. hon. an der Universität Leipzig, u.s.w. Een deel in 8°, 177 blz., 209 figuren in den tekst. Prijs 8 Mark, gebonden 9 Mark. Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1901.

Aan de inleiding van dit met opzet tot eenvoudige onderwerpen beperkt gehouden leerboek des bekenden bewerkers

van verscheidene van Ostwald's „Klassiker der exakten Wissenschaften“ ontleenen we het volgende:

„Het blijkt steeds meer en meer noodig te zijn, de elementen der synthetische meetkunde in het perspectieve denken en praktische teekenen in te voeren. Het kan niet dringend genoeg worden aangeraden zich de grondslagen van deze wetenschap, tenminste voor zoover ze hier opgenomen worden, eigen te maken. Daartoe behooren de stellingen over dubbelverhoudingen, projectieve stelsels, scheve projectie, voortbrenging der kegelsneden, dubbelelementen en de eenvoudigste projectieve ruimtestelsels. Dit alles wordt hier vooraf behandeld gedeeltelijk in den klassieken door Steiner en aan gegeven vorm met gebruik van de in Steiner's beroemd werk voorkomende figuren. Hij, die zich tot hoofdzaken bepalen wil, kan alleen de met groote letter gedrukte tekst bestudeeren; wordt ook dit nog te moeielijk geacht, dan kan men met het tweede hoofdstuk *het perspectieve teekenen* beginnen. Het tweede gedeelte de maatperspectief, waaraan beschouwingen over harmonische elementen, pool en poollijn, cirkel en puntstelsels voorafgaan, zal den beginner minder moeite kosten. Ook hier is het noodzakelijkst met groote letters gedrukt. De methode lijnen en vlakken door vlucht- en doorsnijdingselementen te bepalen is hier niet gevolgd. Een minder abstracte voorstelling, met behulp van het terrein, zal den lezer steeds doelmatiger voorkomen.

Uit deze aanhaling kan de aard van bovenstaand werkje voldoende blijken; naar het ons voorkomt, kan het zoowel den minder wiskundig ontwikkelden lezer als den wiskundige van dienst zijn. S°.

Le operazioni distributive et le loro applicazioni all' analisi di Salvatore Pincherle, prof. ord. nella R. Univ. di Bologna, in collaborazione con Ugo Amaldi, dottore in math. Een deel in 8°, 490 blz. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1901.

Zoo als bekend is, noemt men een bewerking  $\Lambda$  distributief, zoodra zij voldoet aan de vergelijking  $\Lambda(\alpha + \beta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta)$ , waarin  $\alpha$  en  $\beta$  willekeurige grootheden zijn. Over deze eigenschap bezittende bewerkingen en hun toepassingen op de analyse handelt het lijkve boekdeel der italiaansche wiskundigen.

We geven hier, opdat men zich eenigszins een denkbeeld van den inhoud van dit werk kunnen geven, de vertaling van de titels der hoofdstukken en der onderafdeelingen.

1. Het algemeene lineaire samenstel van  $n$  afmetingen.
2. Algemeene beschouwingen over bewerkingen (bewerkingen in het algemeen; distributieve bewerkingen).
3. Wortels en wortelruimten van een distributieve bewerking (eerste eigenschappen der wortels; eigenschappen der wortels van commutatieve bewerkingen).
4. Bouw van de invariante ruimten met een eindig aantal afmetingen.
5. Het samenstel der machtreeksen en de eenvoudigste distributieve bewerkingen (machtreeksen als elementen van een lineair samenstel; de eenvoudigste functioneele bewerkingen).
6. De elementen der functierekening (de machtreeksen van het symbool  $D$ ; de afgeleiden eener bewerking; de geheele negatieve machten van het symbool  $D$ ; de machtreeksen van het symbool  $D^{-1}$ ).
7. Eerste toepassingen der functierekening (de met de differentiatie commutatieve bewerkingen; wortels van een lineairen vorm met van een gegeven bewerking afhandende getallen-coëfficiënten; de veeltermen van Appell; de bewerkingen, die een ruimte met een oneindig aantal afmetingen doen overgaan in een ruimte met een eindig aantal afmetingen; bepaling van functioneele bewerkingen door symbolische vergelijkingen).
8. De normaalbewerkingen (de bewerkingen  $U$ ; de bewerkingen  $U$  in een uitgestrekter ruimte; normaalbewerkingen van hooger en graad).
9. Toegevoegde bewerkingen.
10. De lineaire differentievormen (de ruimte der elementen van de differentierekening; de lineaire differentievormen; wortels der vormen, differentievergelijkingen; grondstelsels van wortels; ontbinding van vormen in factoren; vormen van de eerste en de tweede soort, herleidbaarheid; toegevoegde vorm, vermenigvuldigers; de lineaire differentievormen met getallen-coëfficiënten; machtreeksen van het symbool  $\theta$ ).
11. De lineaire differentiaalvormen (algebra van de lineaire differentiaalvormen; de lineaire differentiaalvergelijkingen; rationaliteitsgebieden, herleidbaarheid, invarianten; toegevoegde vorm, vermenigvuldigers; omkeering van een lineairen differentiaalvorm met behulp van de reeks van  $D^{-1}$ ).
12. Normale lineaire differentiaalvormen (grondvergelijking, groep van monodremie; normale bijzondere punten, bepalende vergelijking; vormen en vergelijkingen van

Frichs). 13. Transformatie der bewerkingen (algemeene beschouwingen; de transformeerende bewerkingen; transformeerende bewerkingen van vermenigvuldiging en differentiatie, transformatie van Laplace; bewerkingen, die met de transformatie van Laplace analoog zijn; de differentiatie met willekeurige index, de transformatie van Euler). 14. De lineaire substitutievormen (algemeene beschouwingen; de grenspunten; de eenvoudigste functies der substitutierekening; homogene lineaire substitutievergelijkingen, vergelijkingen met getallen coëfficiënten; vergelijkingen met willekeurige coëfficiënten; de omgekeerde bewerking; de wortelgrepen van een vorm; grondstelsels van wortels). 15. Uitbreiding van de eigenschap van den determinant van Wronsky. 16. Over de meetkunde der lineaire functieruimten (homogene coördinaten, ontaarde homografie van eerste en tweede klasse; vlakken en lineaire vlakkenruimten; krommen T;  $\infty^1$  doorlopende groepen van bewerkingen). Noten (1. Bibliografie van de theorie der distributieve bewerkingen. 2. De functioneele vergelijking  $f(x+y) = f(x) + (y)$ . 3. De theorie der elementaire deelaars. 4. De distributieve bewerkingen van meer functies en van een functie met meer veranderlijken. 5. De niet-distributieve bewerkingen). Alfabetische naamlijst. S\*.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Theil: Differential-Rechnung von Dr. Ludwig Kiepert, Geheimer Regierungsrath, Prof. der Math. an der technischen Hochschule zu Hannover. Neueste vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegmann. Een deel in 8<sup>o</sup>, 750 blz., 171 figuren in den tekst. Hannover, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, 1901.

In de negende druk van dit uitstekende werk, dat zijn plaats in de wiskundige litteratuur reeds sedert langen tijd veroverd heeft, zijn verschillende veranderingen aangebracht. Zoo is de bepaling van den restterm der reeks van Taylor en de theorie der convergentie van reeksen geheel omgewerkt en zijn voor het eerst hoofdstukken gewijd aan het onderzoek der hyperbolische functies, aan de interpolatieformule van Lagrange, aan de benaderingsmethoden bij de numerieke oplossing van algebraïsche vergelijkingen opgenomen. Daardoor is de differentiaalrekening, die eerst slechts twee deelen met 16 hoofd-

stukken en 140 paragrafen bevatte, uitgedijld tot drie deelen met 21 hoofdstukken en 161 paragrafen; van deze drie deelen omvat het tweede die algebraïsche onderzoekingen, welke voor den toekomstigen technicus van belang zijn. Bovendien is nu een tafel voor het gebruik der hyperbolische functies als ahangsel aan het werk toegevoegd. En aan het slot bevindt zich weer een „Tabelle der wichtigsten Formeles aus der Differential-Rechnung”; deze twee vel druks beslaande tabel is ter kennisneming gratis te verkrijgen. S’.

Rapports présentés au Congrès International de Physique, réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société française de Physique, rassemblés et publiés par CH.-ÉD. GUILLAUME et L. POINCARÉ, Secrétaires généraux du Congrès. Drie deelen in gr. 8°, T. I (XV, 698 p.), T. II (570 p.), T. III (619 p.). Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Oorspronkelijk stelden de ontwerpers van dit Congres zich slechts voor een discussie te doen plaats hebben, die zou kunnen leiden tot het vaststellen van internationale eenheden voor verschillende in de natuurkunde voorkomende grootheden; natuurlijk op den grondslag van het metriek stelsel, en verband houdende met de reeds in de Electrotechniek vastgestelde eenheden. De belangstelling in het Congres bleek evenwel zoo groot te zijn (binnen korten tijd meldden zich over de duizend deelnemers aan) dat men het plan uitbreidde en besloot, een bespreking voor te bereiden van alle belangrijke vragen van de tegenwoordige natuurkunde.

De voorbereiding bestond hierin dat men, na vaststelling van een aantal onderwerpen, aan de leden van de Société française de Physique, en aan natuurkundigen van alle landen die zich op een of ander gebied een naam verworven hadden, opdroeg over die onderwerpen een Rapport uit te brengen.

Het resultaat van den gezamenlijken arbeid ligt thans voor ons in den vorm van drie lijvige boekdeelen; een vierde deel, de discussies en enkele nagekomen rapporten bevattende, is in uitzicht gesteld. In de inleiding wijzen de uitgevers er op, hoe ten slotte een nog hooger doel de ontwerpers voorzweefde: men wilde een werk scheppen, dat zou weergeven den stand van de natuurkunde op het einde der negentiende eeuw — het geheel van denkbeelden en hypothesen, waardoor

men tegenwoordig de samenstelling der natuur en de wetten die haar beheerschen tracht te verklaren.

Het zou ondoenlijk zijn in het kader van deze aankondiging een slechts eenigermate volledig overzicht van den inhoud der rapporten te leveren. We zullen daarom trachten een indruk van het werk te geven door de bespreking van enkele bijzondere punten.

Uit den aard der zaak is een groot deel van de rapporten (36 van de 79) door Franschen geschreven. Overigens is de deelneming zeer internationaal geweest: buiten Frankrijk zijn nog 13 landen door een of meer schrijvers vertegenwoordigd. Zelfs Japan ontbreekt niet in de rij, terwijl van de Europeesche landen alleen Spanje, Portugal en enkele Balkan-Statens gemist worden. Nederland is waardig vertegenwoordigd door de namen DU BOIS, VAN 'T HOFF, LORENTZ en VAN DER WAALS. Alleen Duitschland en Engeland leverden een grooter aantal (7) schrijvers, Rusland en Zweden-Noorwegen een gelijk aantal.

Het pleit zeker voor het hooge peil waarop de studie der natuurwetenschappen in Frankrijk staat, dat ondanks het buiten verhouding groote getal Fransche medewerkers, slechts weinige hunner rapporten den lezer doen betreuren, dat ze niet door een of ander bekend geleerde buiten Frankrijk zijn geschreven.

Een opmerking waartoe de rapporten bijna zonder uitzondering aanleiding geven, betreft den vooruitgang in nauwkeurigheid en gevoeligheid der instrumenten. Een goed beeld hiervan geeft het rapport van BENOÎT, (I, 30—77) „Over de nauwkeurigheid in de lengtebepaling bij metrologie”. Beginnende met de „toise du Pérou” in Frankrijk, waar tusschen de „toise à bouts” en de „toise à points” een verschil van  $\pm \frac{1}{10}$  mm. bestond, eindigt hij met het resultaat van de vergelijking der standaardmeters voor de landen der Meter-conventie, gevende voor de waarschijnlijke fout van een dier meters  $0,04\mu$ , terwijl de werkelijke fout misschien  $0,1\mu$  bedragen kan, of  $\frac{1}{10000}$  mm. En merkwaardig: men is begonnen met een natuurlijke eenheid als grondslag, heeft daarna met verwerping van de oorspronkelijke definitie zich aan de toevallige lengte van den „mètre des Archives” gehouden — thans zou men er bijna toe kunnen overgaan, weer een natuurlijke eenheid aan te nemen. De vergelijking van lengten door de interferentieele methode heeft thans n.l. een zoo hoogen trap bereikt, dat de



lengte van den meter in golfengten (de roode Cadmiumlijn bijv.) met een onzekerheid van niet meer dan  $1\mu$  bepaald is, terwijl BENÖFT meent, dat deze nauwkeurigheid nog wel verhoogd kan worden. Het rapport van MACÉ DE LÉPINAY over dit onderwerp (I, 103—130) kan beschouwd worden als een hoogst interessant geval van oplossing van onbepaalde vergelijkingen.

Een ander sprekend voorbeeld van nauwkeurigheid geeft het rapport van EÖTVÖS (III, 371—393) over niveaувlakken en plaatselijke veranderingen van de zwaartekracht. Hier wordt een instrument beschreven, waarmede de schrijver de niveaувlakken bepaalde, zooals ze door de wanden van een kamer gewijzigd worden, en de wet van NEWTON verifieerde, wat betreft de onafhankelijkheid der gravitatiekracht van den aard der stof en van tusschengelegen massa's, het eerste tot op  $\frac{1}{100.000}$ , het laatste tot op  $\frac{1}{100.000.000}$ !

Van de bekende gevoeligheid van galvanometrische waarnemingen vindt men o.a. een voorbeeld in het rapport van RUBENS, waar hij, om de gevoeligheid van den radiomicrometer van BOYS aan te geven, mededeelt, dat deze de door een hollen spiegel terug gekaatste straling van een kaars nog aantoot, wanneer die op een afstand van 2,8 kilometer geplaatst is.

Natuurlijk zou men zonder moeite het aantal dezer voorbeelden kunnen vermeerderen met behulp van de artikelen over de verschillende onderdeelen der metrologie, die, overeenkomstig het oorspronkelijk doel van het Congres, in het eerste deel een vrij ruime plaats innemen.

Dit deel begint met een bewonderenswaardig artikel van H. POINCARÉ (1—29) over de betrekking tusschen de experimenteele en de mathematische physica. Aan deze laatste kent hij de rol toe van bibliothecaris in de bibliotheek die de experimenteele physica aanlegt, en wijst haar als eerste taak aan de eenheid der natuur in 't licht te stellen, waarbij een verstandige zuinigheid met hypothesen moet worden betracht. Van uit dit gezichtspunt beschouwt hij den oorsprong der mathematische physica, het voorbijgaande karakter der physieke theoriën, den drang dien velen gevoelen om elke verklaring ten slotte tot een mechanisme terug te brengen, en besluit een overzicht van den tegenwoordigen stand der wetenschap met de woorden:

„Tout compte fait, on s'est rapproché de l'unité; on n'a

pas été aussi vite qu'on l'espérait il y a cinquante ans, on n'a pas toujours pris le chemin prévu; mais, en définitive, on a gagné beaucoup de terrain."

Een illustratie van verschil van opvatting bij het zoeken naar de eenheid der natuur geeft de vergelijking van twee belangrijke rapporten, dat van LORD KELVIN, met den ietwat paradoxaalen titel „Over de beweging van een vast elastisch medium, waarin zich een lichaam verschuift, dat er aantrekkend of afstootend op werkt" (II, 1—22) en dat van V. BJERKNES „Over hydrodynamische werking op afstand naar de theorie van C. A. BJERKNES" (I, 251—276). De eerste gaat ter verklaring van de electrische aantrekking tussehen electrons weer terug tot de directe werking op afstand, waardoor de ether bevrijd wordt van „de onmogelijke taak om gelijktijdig de electrostatische en de magnetische kracht voort te planten." Het geheele rapport van den tweeden is gewijd aan een poging om door hydrodynamische contact-krachten *schijnbare* werking op afstand te verklaren, waarbij een volledige analogie met electrische en magnetische krachten ontwikkeld wordt.

Van de rapporten die de meest waarschijnlijke waarde van een of andere constante bespreken, kiezen we die over voortplantingssnelheden. J. VIOLLE (I, 228—246) behandelt de snelheid van het geluid in de lucht, een onderwerp, waarover hij zelf de nieuwste en nauwkeurigste proeven heeft genomen. Zijn eindresultaat,  $331,36 \text{ M.} \pm 0,03 \text{ M.}$ , niet zoo heel veel afwijkende van de uitkomst van Moll en van Beek,  $332,8 \text{ M.}$ , is natuurlijk veel nauwkeuriger, wat echter eerst in den laatsten tijd bereikt is. Des te meer moet men het waardeeren, dat, volgens het rapport van CORNU (II, 225—246) de metingen van de snelheid van het licht, voerende tot de uitkomst  $300130 \text{ K.M.} \pm 270 \text{ K.M.}$ , dus een slechts tienmaal grootere onzekerheid laten. MICHELSON en NEWCOMB meenen zelfs met hun methode bij een uitkomst  $299860 \text{ K.M.}$  een onzekerheid van niet meer dan  $30 \text{ K.M.}$  te moeten aannemen; CORNU's ruimere schatting steunt op het vermoeden van een systematische fout.

Over de voortplantingssnelheid der eerst zoo kort bekende electrische golven handelt een omvangrijk rapport van BLONDLOT en GUTTON (II, 268—283). De middelwaarde, door de schrijvers niet bepaald wegens de moeilijkheid, aan de omstreeks

1 % uiteenlopende uitkomsten juiste relatieve gewichten te geven, moet zeer dicht bij de lichtsnelheid liggen. Zooals men weet was dit door de theorie van MAXWELL voorspeld. Deze voorspelling hield bovendien in, dat de verhouding van de electromagnetische tot de electrostatische eenheid van electriciteit gelijk aan de lichtsnelheid moest zijn. Die verhouding heeft het onderwerp uitgemaakt van vele onderzoeken van den laatsten tijd, die in het rapport van ABRAHAM (II, 247—267) besproken worden. De middelwaarde, evenals de lichtsnelheid tot het luchtledige herleid, is  $300100 \text{ KM} \pm 300 \text{ KM}$ . — dus reeds dezelfde zekerheid als in de bepaling der lichtsnelheid, en de beide uitkomsten binnen de grenzen der waarnemingsfout gelijk.

Behalve deze directe verificaties zouden nog tal van andere rapporten als bevestiging van de electromagnetische lichttheorie beschouwd kunnen worden. Onder deze vormt het rapport van RUBENS over het infrarode spectrum (II, 141—174) als 't ware de brug tusschen electriciteit en licht. Zeer instructief is in dit opzicht een schema, waarin RUBENS de golflengten naar octaven afteekent, en waarin tusschen de kleinste elektrische golven en de grootste warmte-golven slechts 5 octaven ontbreken, terwijl aan beide zijden ongeveer 10 octaven waargenomen zijn.

Een zeer bevredigend geheel vormen de rapporten van WIEN, over de theoretische stralingswetten (II, 23—40) en LUMMER, over de straling der zwarte lichamen (II, 41—99). In 't eerste wordt nagegaan hoe men, uitgaande van de wet van KIRCHHOFF, de tweede wet der mechanische warmte-theorie in 't algemeen en de kinetische gastheorie, achtereenvolgens de wet van STEFAN (totaalstraling evenredig met de 4<sup>e</sup> macht der absolute temperatuur) en de wet van WIEN ( $\lambda_{\text{max}}$  omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur) en zelfs de verdeling der energie over de verschillende golflengten kan afleiden, wat op geheel verschillende wijze door WIEN en PLANCK is verricht. In het rapport van LUMMER vindt men de experimenteele bevestiging dezer wetten — wat de energiekromme aangaat met beperking tot matige golflengten, daar in tegenstelling met RUNGE en PASCHEN door LUMMER en PRINGSHEIM bij grootere golflengten vrij sterke afwijkingen gevonden zijn. De vooruitgang in de thermometrie en pyrometrie waarop de rapporten

van CHAPPUIS en BARUS betrekking hebben (I, 131—147 en 148—177) heeft zeker veel tot het slagen dezer verificatie bijgedragen.

Minder eenvoudig zijn de wetten van de straling der gassen, die door PRINGSHEIM behandeld wordt (II, 100—132). Het is vrij zeker, dat hierop, althans bij lijnenspectra en overal waar fluorescentie of elektrische ontlading in 't spel komt, de wet van KIRCHHOFF niet toepasselijk is. De theorie van deze straling is nog niet ver ontwikkeld; men mag echter hopen, dat de onderzoeken van serie-spectra, door RYDBERG behandeld (II, 200—224) den weg zullen aanwijzen. Noemt men de spectra met RYDBERG de taal der atomen, dan leeren deze onderzoeken onder anderen, dat elke groep van verwante elementen zijn eigen tongval heeft.

Het ruime gebied van de evenwichten van gassen en vloeistoffen wordt behandeld in de rapporten van AMAGAT (eenvoudige stoffen, I, 551—582) en VAN DER WAALS (mengsels, I, 583—614). AMAGAT, wiens onderzoeken het waarnemingsgebied belangrijk verruimd hebben, heeft daardoor kunnen constateeren, dat tot nu toe geen formule met weinig constanten dat gebied beheerscht, en bepaalt zich daarom tot het aangeven van een aantal experimenteele regels. Aan het slot toont hij evenwel aan, van hoe groot belang de formule van VAN DER WAALS is voor de wetten der overeenstemmende toestanden. VAN DER WAALS zelf leidt de toestandsvergelijking voor mengsels hoofdzakelijk uit theoretische beschouwingen af, die echter reeds in vele gevallen bevestiging gevonden hebben door de onderzoeken van, bijna uitsluitend Nederlandsche, physici. Tevens wordt duidelijk aangewezen, wat nog verificatie noodig heeft. De methoden ter onderzoek van het meest merkwaardige gebied, dat der kritische toestanden, worden in afzonderlijke rapporten van MATHIAS (I, 615—648) en GALITZINE en WILIP (I, 668—681) besproken.

De eigenlijke grondslag van de theorieën op dit gebied is, naast de wetten der mechanische warmtetheorie, de kinetische gastheorie. Het is daarom eenigszins jammer, dat deze theorie zelf geen eigenlijke bespreking gevonden heeft; slechts een onderdeel, de diffusie van gassen, en daarvan nog slechts een enkel punt, wordt door BRILLOUIN besproken (I, 512—530). Dit is te meer te betreuren, waar wel plaats is gegeven aan

een oppervlakkig betoog van LIPPMANN (I, 548—550) om te bewijzen, dat de kinetische gas-theorie in strijd is met de meervermelde tweede wet — MAXWELL'S „demon" redivivus, thans in de gedaante van een electromagneet! Ook wat betreft andere onderdeelen der natuurkunde heeft de kinetische theorie het niet gelukkig getroffen. Wel wordt de electrolytische dissociatie der oplossingen zeer gelukkig door ARRHENIUS behandeld (II, 385—389), maar terwijl men had mogen verwachten de theorie van den osmotischen druk en wat daarmede samenhangt door VAN 'T HOFF behandeld te zien, geeft deze een overzicht van de — overigens zeer belangrijke — verschijnselen van kristallisatie bij constante temperatuur (I, 464—477), dat noodzakelijkerwijze hoofdzakelijk empirisch is. De osmotische druk wordt door PERRIN behandeld (I, 531—555), die zich sinds een paar jaar aan dit gedeelte der natuurkunde wijdt en een min of meer populair overzicht heeft geleverd.

Ook bij de verschijnselen in vaste stoffen ziet men reeds meer en meer aanduidingen van het doordringen van kinetische theorieën. De rapporten van SPRING (I, 402—431) en van ROBERTS AUSTEN en STANSFIELD (I, 363—401) zijn daar om de grenzen tusschen vast en vloeibaar uit te wischen: beide hanteren over ontwijfelbaar bewezen inwendige bewegingen in vaste lichamen, terwijl aan den anderen kant SCHWEDOFF (I, 478—486) in sommige vloeistoffen eigenschappen van vastheid ontdekt heeft. Het zijn zeker niet in de laatste plaats de electriche en magnetische verschijnselen, die van de invoering van kinetische beschouwingen zouden profiteeren. Voorloopig treffen de rapporten over deze onderwerpen voornamelijk door het geweldige materiaal van feiten. Die van DU BOIS over de magnetische eigenschappen der ponderabele stof (II, 460—508) en WARBURG over een enkel onderdeel van 't voorgaande, de hysteresis, (II, 509—531) beslaan samen 72 pagina's, bijna zonder dat er sprake is van theorie. Bij de contact-electriciteit, bijna het oudste onder de electriche verschijnselen, wordt blijkens het rapport van CHRISTIANSEN (II, 390—402) nog heftig over de feiten zelf gestreden en staan de voornaamste theorieën nog onverzoenlijk tegenover elkaar.

Nu zijn wel in de laatste jaren theorieën op dit gebied verschenen, die gebruik maken van kinetische beschouwingen, maar deze worden, waarschijnlijk als te jong en onzeker, in

de rapporten bijna niet genoemd. DRUDE, die op dit gebied zeker wel thuis is, geeft van zijn eigen theorie alleen dat gedeelte dat op de dispersie van het licht in metalen betrekking heeft (III, 34—46) terwijl J. J. THOMSON (III, 188—151) met gebruikmaking van vrij gewaagde, onzes insiens soms onwaarschijnlijke hypothesen, en zonder veel acht te slaan op zijn voorgangers op dit gebied, enkele toepassingen maakt van de theorie der electrons op de geleiding in metalen, diamagnetisme en verwante verschijnselen.

Naast de merkwaardige ontdekkingen op het gebied der kathodenstralen, door VILLARD behandeld (III, 115—137) heeft ongetwijfeld de ontdekking door ZEEMAN van den invloed van een magneetveld op de uitzending van licht veel bijgedragen tot het doordringen van deze electron-theorie. Het rapport van LORENTZ over dit onderwerp (III, 1—33) geeft een treffend voorbeeld van gelukkige samenwerking van experiment en theorie: moge de theorie nog niet in staat zijn, van alle bijzonderheden rekenschap te geven, aan den anderen kant was ze reeds ver genoeg in het wezen der verschijnselen doorgedrongen om op belangrijke punten de proefnemers te kunnen voorlichten. Zonder dit was het hoge peil, waartoe thans de kennis dezer verschijnselen gestegen is niet te bereiken geweest.

We moesten ons beperken tot de bespreking van deze onderwerpen, die tot de meest bekende behooren, en onvermeld laten de rapporten over de nieuwe stralensoorten en die over verwante vakken als meteorologie, kosmische physica, astro-physica en physiologie, die het grootste gedeelte van het derde deel vullen.

Men kan van meening verschillen over de meerdere of mindere waarde van de afzonderlijke rapporten en met de uitgevers betreuren, dat sommige hoofdstukken der natuurkunde geen bewerker hebben gevonden. Stellig evenwel is men aan de Société française de Physique, en in 't bijzonder aan de H.H. GUILLAUME en POINCARÉ, grooten dank verschuldigd voor hun aandeel aan een werk, dat waarschijnlijk nog lang de aandacht trekken zal als een monument op den drempel eener nieuwe eeuw.

E. VAN EVERDINGEN JR.

G. BIGOURDAN, *Astronome titulaire à l'observatoire de Paris.*  
*Le système métrique des poids et mesures, son établissement et sa propagation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme.*  
 In 8<sup>o</sup>, 458 p., 17 fig., 3 pl., 7 portr., Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Wanneer men let op de verrassende snelheid, waarmee in onzen tijd de geheele natuurwetenschap zich ontwikkelt en de techniek zich van haar vruchten meester maakt om ze onmiddellijk ten gerieve van de menschheid te verwerken, moet het op den eersten aanblik verbazing wekken dat de ontwikkeling en algemeene invoering van een eenvormig stelsel van maten en gewichten — een zaak van zoo onbetwistbaar belang — een episode vormt in de geschiedenis van beschaving en wetenschap, die zich reeds over meer dan een eeuw uitstrekt en zelfs thans nog haar einde niet heeft gevonden. In wetenschap en techniek zijn het echter steeds begrippen en voorstellingen van een betrekkelijk zeer kleine fractie der menschheid, op wier kneedbaarheid het aankomt, en dan nog juist begrippen en voorstellingen, die in 't gebied van ieders eigen bijzondere ontwikkeling liggen en, bij het meerendeel, van den aanvang af opzettelijk vlottend worden gehouden. Bij de invoering van 't metriek stelsel daarentegen zijn het geheele natiën, die in een nieuw spoor moeten worden geleid, en bij de bijna oneindig groote massa moet dat wel zeer veel arbeid kosten. In 't begin der groote Fransche Revolutie ondernomen, op een oogenblik dus dat de volksgeest meer dan ooit geneigd was ouds overboord te werpen en nieuws te aanvaarden, vond nog die arbeid den heerschenden hervormingsgeest niet opgewassen tegen de kracht der gewoonte, waar het betrof het niet geheel onmiddellijk op het volkswelzijn ingrijpende gebruik van maten en gewichten. Met taaie volharding hebben nochtans Frankrijks geleerden en bewinds mannen het werk zoover gebracht, dat een goede uitslag is verzekerd; met talent ook hebben de eersten daarbij de talrijke moeilijkheden overwonnen, die het kiezen en vervaardigen van de grondmaten, alsmede de geodetrische, physische en chemische onderzoekingen ter voorbereiding, hebben met zich gebracht.

Het is zeker een verdienstelijk werk van den schrijver geweest, van dit geheele brokstuk geschiedenis met zijn eng in

elkaar grijpen van politieke gebeurtenissen, maatschappelijke toestanden en wetenschappelijke belangen een eenigszins uitvoerig overzicht te hebben gegeven, waarmee menigeen met voldoening zal kennis maken. Hoewel de schrijver er blijkbaar en met vrucht naar heeft gestreefd geheel objectief te blijven, heeft hij het niet versmaad hier en daar meer leven aan zijn beschrijving bij te zetten door een frissche verscheidenheid ook van persoonlijke bijzonderheden te bieden — zeer tot verhooging van de leesbaarheid van het boek, dat uit den aard der zaak overigens wel voor een groot deel moest bestaan uit een mededeeling van rapporten, decreten, reglementen enz..

Het meest aangenaam te lezen is in dat opzicht het eerste gedeelte, handelende over het werk bovenal van Delambre, maar verder ook van Méchain, Borda, Coulomb, Lagrange, Laplace, Van Swinden e. a. tot het verkrijgen der gewenschte standaardmaten en -gewichten en de wettelijke invoering daarvan (1803). Minder verkwikkend is de dan volgende beschrijving van de moeite en inspanning, die men zich tot 1869 heeft moeten getroosten om het nieuwe stelsel ook inderdaad ingang te doen vinden. In dit jaar begint de medewerking van de regeeringen en geleerden der andere Europeesche Staten en wordt het vraagstuk internationaal, en het is aan een geheel zakelijk overzicht van de werkzaamheden van de Internationale Commissie (1869—1872), de Diplomatieke Conferentie van 1875 en het Internationale Bureau des Poids et Mesures, dat een groot gedeelte van het geheele boek is gewijd. De onderzoekingen van Michelson tot het reduceeren van den lengtestandaard tot golflengten van het Cadmiumlicht bleven niet onvermeld. Een bibliographie van de uitgaven van de Commission Internationale du Mètre en van het Comité International des Poids et Mesures (1870—1900), voorts een naar het schijnt zeer volledige chronologische tabel van wetten, decreten, belangrijke feiten enz. in zake het metrieke stelsel, een naamregister en eindelijk een gedetailleerd inhoudsoverzicht besluiten het vooral uit een historisch oogpunt belangrijke werk, tot welks samenstelling de schrijver uit de meest authentieke bronnen heeft kunnen putten. W.

HENRI BÉNARD, ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé des Sciences physiques. Les tourbillons cellu-



lares dans une nappes liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Thèse. In 8°, 88 p., 28 fig., Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Wanneer van een vlakke schaal met vloeistof de bodem horizontaal is en op een standvastig aantal graden boven de temperatuur der omgeving wordt gehouden, treden er in de vloeistof wervelbewegingen op, eerst van een labiel karakter, na verloop van tijd echter — indien de vloeistof een voldoende mate van viscositeit bezit — overgaande in een stationair régime. De schrijver, die vroeger reeds deze wervelbewegingen in hun labiele stadium heeft bestudeerd, deelt hier de uitkomsten mee van een experimenteel onderzoek der stationair geworden wervels. De vloeistof was spermaceti en werd onderzocht bij temperaturen tusschen 50 en 100° C. van den bodem der schaal, terwijl de dikte der vloeistoflaag werd gevarieerd tusschen 0.4 en 1.2 mm.

*De stationaire toestand blijkt zich te kenmerken door een verdeling van de laag in gelijke regelmatig-zeshoekig-zuilvormige cellen, waarvan elk één wervel bevat met opstijging in het midden en neerdaling aan de kanten.* Noemen wij  $e$  de dikte der laag en  $\lambda$  de zijde van de zeshoekige doorsnede der cellen, dan is het de verhouding  $\frac{e}{\lambda}$  voornamelijk welke,

onder verschillende omstandigheden, door schrijver is bestudeerd. De meest in 't oog springende zijner daarbij verkregen uitkomsten is wel deze, dat die verhouding slechts in geringe mate afhankelijk is van de dikte der laag; zij was steeds bijna 0.3 en hing eeniszins van de temperatuur af. De wervelcellen werden meestal fotografisch opgenomen en dan wel na door het inbrengen van een onoplosbaar poeder in de vloeistof zichtbaar gemaakt te zijn of met behulp van diverse optische methoden, daarop gebaseerd, dat het vloeistofoppervlak boven elke wervelcel een inzinking bezit (van de orde van 0.5  $\mu$ ). De bij subjectieve waarneming geschatte lineaire snelheden in de wervels bedragen tot 0.2 cm p. sec.

De schrijver vermoedt, dat de studie van soortgelijke verschijnselen als deze in een homogene vloeistof enkel onder den invloed van temperatuursverschillen en viscositeit optredende cellulaire structuur misschien licht zal kunnen werpen op zekere fundamenteele biologische quaesties.

W.

EEN GEVAL VAN VLOEISTOFBEWEGING ZONDER WERVELING  
IN TWEE AFMETINGEN,

DOOR

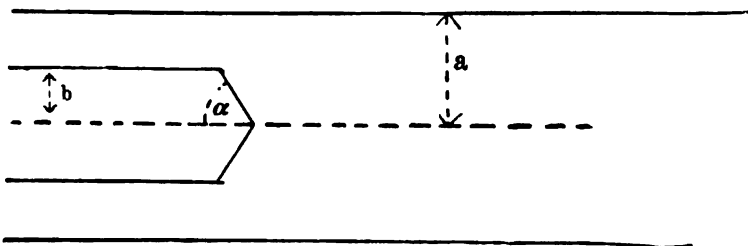
W. A. WYTHOFF.

(Amsterdam.)

(Oplossing van Prijsvraag no. 6 voor het jaar 1900.)

De opgave luidde aldus:

Vloeistof stroomt zonder wrijving en zonder werveling door een kanaal van gelijkmatige diepte en van de gedaante aange-



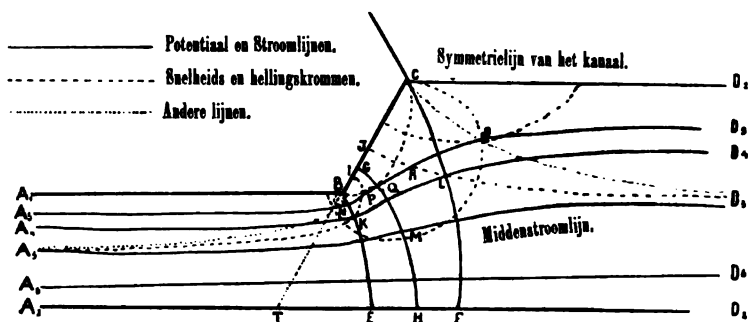
geven in bovenstaande figuur. In het oneindige is de snelheid aan beide zijden gelijkmatig en bedraagt respectievelijk  $U$  en  $\frac{a-b}{a} U$ . Men vraagt naar de snelheidspotential dezer vloeistofbeweging, en wenscht, zooveel mogelijk, eene discussie der banen door de vloeistofdeeltjes afgelegd. Voorts wordt gevraagd te onderzoeken, of de in LAMB's *Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids*, (editie 1879, Vraagstuk No. 13, p. 254) voor het geval  $\alpha = 90^\circ$  gegeven oplossing juist is. In die oplossing wordt voor de snelheidspotential aangegeven:

$$\frac{a-b}{a} Ux + \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} e^{-\frac{n\pi z}{a}}.$$

## I. Grondslagen.

1. Uit de symmetrie der figuur is het duidelijk, dat de symmetrielyn van het kanaal een stroomlijn is, en dat aan weerszijden van die symmetrielyn de vloeistofbeweging dezelfde is, ook wat de snelheidspotentiaal betreft. Wij hebben dus slechts de beweging in een der beide helften na te gaan, waarvoor ik de onderste kies; zie Fig. 1.

Fig. 1 (z-vlak).



2. Noemen wij  $z = x + iy$  de complexe coördinaat, waardoor een punt in het vlak bepaald wordt en passen wij de transformatiemethode van SCHWARZ <sup>1)</sup> toe, zoo is het mogelijk de figuur zoo te transformeeren, dat de lijnen  $D_1C$ ,  $CB$ ,  $BA_1$ ,  $A_2D_2$  in opeenvolgende stukken van een rechte lijn overgaan met behulp van een transformatieformule van den vorm

$$z = c \int (t - p_1)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (t - p_2)^{\frac{\alpha}{\pi}} (t - p_3)^{-1} dt,$$

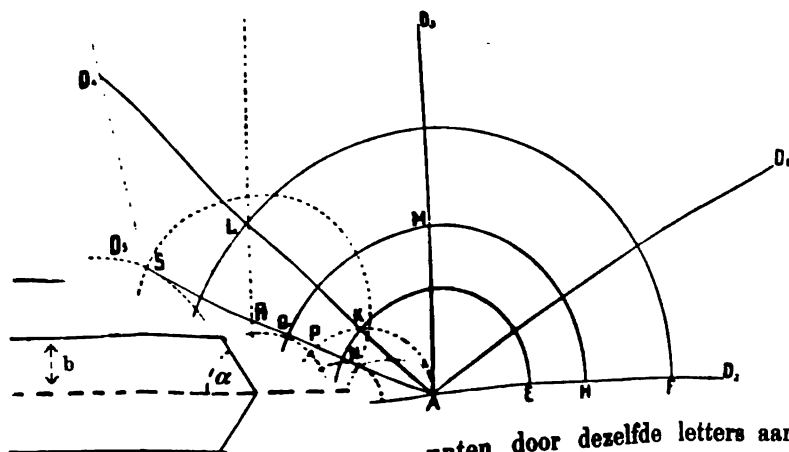
waarin  $p_1 < p_2 < p_3$ . Van deze grootheden  $p_1$ ,  $p_2$  en  $p_3$  kunnen wij er nog twee willekeurig aannemen, mits aan de opgegeven ongelijkheid voldoende. Wij maken hiervan gebruik om  $p_1 = -1$  en  $p_3 = 0$  te stellen en weten dan dat  $p_2$  tusschen 0 en  $-1$  moet liggen en door de gegevens in het  $z$ -vlak bepaald is.

<sup>1)</sup> Ik ontleen deze methode aan J. J. Thomaon, Notes on recent researches in Electricity and Magnetism; Chapter 3, §§ 230 en volgende. Oxford, the Clarendon press, 1893.

Wij stellen nu  $p_2 = -p$ , waarin  $p$  een positief getal  $< 1$  is, en schrijven voorts ter vereenvoudiging  $\alpha = m\pi$ , door  $m$  eveneens een positief getal  $< 1$  voorstellende. Onze transformatieformule gaat daardoor over in

$$z = c \int \frac{1}{t} \left( \frac{t+p}{t+1} \right)^m dt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

3. Fig. 2 stelt het  $t$ -vlak voor <sup>1)</sup>. In beide figuren zal ik Fig. 2 ( $t$ -vlak).



...nten door dezelfde letters aan-  
de indices  $z$  of  $t$  van elkaar  
ransformatie is het duidelijk,  
geven in bovenstaande figuur. In het on-  
aan beide zijden gelijkmatig en bedraagt  $r$  er-  
 $\frac{a-b}{a}$  U. Men vraagt naar de snelheidspoten-  
stofbeweging, en wenscht, zooveel mogelijk, de  
der banen door de vloeistofdeeltjes afgelegd. V-  
gevraagd te onderzoeken, of de in LAMB's *Treatise on* het punt A de  
*matical theory of the motion of fluids*, (editie 1879,  
stuk No. 13, p. 254) voor het geval  $\alpha = 90^\circ$  gegeven op-  
juist is. In die oplossing wordt voor de snelheidspoten-  
aangegeven:

$$\frac{a-b}{a} Ux + \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} e^{-\frac{n\pi x}{a}} . \quad \text{ange-} \quad 19)$$

de onderste integratiegrens niet aan te geven laten wij den coördinatenoorsprong in het  $z$ -vlak voorloopig onbepaald.

De beschouwde helft van het kanaal wordt nu conform afgebeeld in de helft van het  $t$ -vlak boven de abscissen-as  $D_1 D_2$  gelegen. Desverlangd kunnen wij ons de andere helft van het  $t$ -vlak voorstellen verwant te zijn met de andere helft van het kanaal, indien wij nl. overeenkomen de abscissenas bij het integreeren niet anders dan links van het punt  $C$  te overschrijden.

5. De verwante vloeistofbeweging in het  $t$ -vlak is nu een strooming van uit het punt  $A$  als bron, waarbij de stroomlijnen van  $A$  uitgaande rechte lijnen zijn en de potentiaallijnen concentrische cirkels die  $A$  tot middelpunt hebben.

Noemen wij  $\phi$  de potentiaal en  $\psi$  de stroomfunctie en stellen wij  $w = \phi + i\psi$ , dan geldt voor deze eenvoudige beweging de formule

$$t = e^{kw} \quad \text{of} \quad w = \frac{1}{k} l(t) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

6. Thans moet nog het verband worden vastgesteld tusschen de grootheden  $c$ ,  $p$ ,  $m$  en  $k$  en de gegevens van het vraagstuk  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  en  $U$ .

Daartoe bedenken wij, dat, zoo wij de integratie volbrengen van een punt van  $AD_2$  boven om  $A$  heen naar een punt van  $AB$ , wij als resultaat het verschil der  $z$ 's tusschen de overeenkomstige punten van het  $z$ -vlak moeten vinden, en dat daarvan het imaginaire deel  $(a - b)i$  is. Volbrengen wij deze integratie in een half cirkeltje zeer dicht om  $A$  heen, zoo vinden wij

$$cp^m \pi i = (a - b)i$$

en dus

$$c\pi p^m = a - b.$$

Kiezen wij als beginpunt van den integratieweg een punt van  $AD_2$  en als eindpunt een van  $CD_1$ , dan moet evenzoo het imaginaire deel van de integraal  $ai$  worden. Deze integratie volbrengende langs een oneindig grooten halven cirkel die  $A$  tot middelpunt heeft, vinden wij

$$c\pi i = ai$$

$$c\pi = a.$$

Daarenboven weten wij nog, dat bij beide vloeistofbewegingen

de totale strooming even groot moet zijn. Dit geeft ons de betrekking

$$\frac{\pi}{k} = (a - b) U.$$

7. Wij hebben dus de volgende formules die  $c$ ,  $p$ ,  $m$  en  $k$  in de gegevens van het vraagstuk uitdrukken:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{a}{\pi}; \\ p &= \left( \frac{a - b}{a} \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} m &= \frac{\alpha}{\pi} \\ k &= \frac{\pi}{(a - b) U} \end{aligned} \quad . . . (3)$$

Omgekeerd:

$$\left. \begin{aligned} a &= c\pi; \\ b &= c\pi (1 - p^m); \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= m\pi \\ U &= \frac{1}{ckp^m} \end{aligned} \quad . . . . (4)$$

Bij de hier volgende beschouwingen maak ik in den regel gebruik van de grootheden  $c$ ,  $p$ ,  $m$  en  $k$ .

8. Wij kunnen nu nog uit (1) en (2) de hulpgrootheid  $t$  elimineeren en vinden dan

$$z = ck \int \left( \frac{e^{kw} + p}{e^{kw} + 1} \right)^m dw, \quad . . . . . (5)$$

waardoor het verband is vastgesteld tusschen potentiaal en stroomfunctie in een willekeurig punt van het kanaal en de coördinaten van dat punt.

Hieruit volgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{ck} \left( \frac{e^{kw} + 1}{e^{kw} + p} \right)^m = \frac{1}{ck} \left( \frac{t + 1}{t + p} \right)^m \quad . . . (6)$$

Deze  $\frac{dw}{dz}$  geeft de snelheid van een vloeistofdeeltje in richting en grootte aan, met dien verstande dat wij om de juiste richting te vinden van het imaginaire deel het teeken moeten omkeeren, of wel aan den modulus van  $\frac{dw}{dz}$  (die de juiste grootte van de snelheid aangeeft) de richting van  $\frac{dz}{dw}$  moeten toekennen.

9. In de tot nu toe gegeven formules liggen alle eigenschappen der te behandelen vloeistofbeweging in beginsel opgesloten. In het nu volgende stel ik mij voor:

1<sup>o</sup>. de eigenschappen van stroomlijnen, potentiaallijnen enz. na te gaan op grond van de meetkundige verwantschap van de  $z$ - en de  $t$ -figuur;

2<sup>o</sup>. formules te geven betreffende potentiaal en stroomfunctie;

3<sup>o</sup>. Lamb's formule voor het geval  $m = \frac{1}{2}$  te controleeren.

## II. Stroomlijnen, potentiaallijnen enz.

10. Reeds werd opgemerkt, dat de stroomlijnen in het  $t$ -vlak rechte lijnen zijn van A uitgaande. Een van hen, de lijn  $AD_3$ , die door A loodrecht op  $D_1D_2$  kan worden getrokken, zal in de hier volgende beschouwingen meermalen genoemd moeten worden; ik zal haar den naam van *middenstroomlijn* geven. Zij heeft de eigenschap dat de totale strooming aan weerszijden er van gelijk is. Hieruit volgt, in aanmerking nemende dat de snelheid in het kanaal aan beide zijden in het oneindige gelijkmatig is, dat de *middenstroomlijn*  $A_3D_3$  in het  $z$ -vlak naar links asymptotisch loopt aan de rechte lijn evenwijdig aan  $A_1B$  en  $A_2D_2$  midden tusschen beide in getrokken, en evenzoo naar rechts asymptotisch aan een evenwijdige lijn midden tusschen  $A_2D_2$  en  $CD_1$ .

11. De snelheid van een vloeistofdeeltje in het kanaal wordt in richting en grootte bepaald door  $\frac{1}{ck} \left( \frac{t+1}{t+p} \right)^m$ , zie § 8.

Hierin stellen  $t+1$  en  $t+p$  de afstanden van het verwante punt in het  $t$ -vlak tot  $C_t$  en  $B_t$  voor, beide als complexe grootheden opgevat.

Hieruit volgt: 1<sup>o</sup>. dat de grootte van de snelheid in elk punt de  $m^{\text{de}}$  macht is van de verhouding der afstanden van het verwante punt tot  $C_t$  en  $B_t$  vermenigvuldigd met de constante  $\frac{1}{ck}$  d. i. met de eindsnelheid (zij is dus 0 in C en  $\infty$  in B); 2<sup>o</sup>. dat de helling der baan in elk punt gelijk is aan  $m$ -maal den hoek waaronder het stuk  $B_tC_t$  van uit het verwante punt gezien wordt.

Daar voorts van de lijnen die het verwante punt met  $B_t$  en  $C_t$  verbinden de eerste altijd met de wijzers van het uurwerk

moet worden gedraaid om met de laatste samen te vallen, zien wij, dat de helling der stroomlijnen in de beschouwde helft van het kanaal overal denzelfden zin heeft en wel positief is (zie § 8). In de andere helft van het kanaal is zij natuurlijk negatief.

De gezichtshoek waaronder BC in het  $t$ -vlak gezien wordt, kan niet grooter zijn dan  $\pi$ . De helling der stroomlijnen in het  $z$ -vlak kan dus niet grooter zijn dan  $m\pi = \alpha$ ; dit is de helling van de lijn BC.

12. Twee merkwaardige stelsels van krommen worden ons door deze beschouwingen aan de hand gedaan, nl.:

1°. *krommen van gelijke snelheid* (snelheidskrommen). Volgens een bekende planimetrische eigenschap zijn dit in het  $t$ -vlak cirkels die alle hun middelpunt op  $D_1D_2$  hebben en het stuk BC harmonisch verdeelen; de rechte lijn die BC loodrecht middendoor deelt inbegrepen. Te zamen vormen zij een cirkelbundel, die B en C tot verdwijnpunten heeft.

2°. *krommen van gelijke helling* of bewegingsrichting (hellingskrommen). In het  $t$ -vlak zijn dit cirkelbogen die B met C verbinden. Te zamen vormen zij een cirkelbundel met B en C tot basispunten.

Beide stelsels van cirkels snijden elkaar in elk punt van het  $t$ -vlak loodrecht en daar bij de transformatie van de  $t$ - tot de  $z$ -figuur alle hoeken onveranderd blijven (behalve alleen in de punten A, B, C en D), volgt hieruit, dat ook in de  $z$ -figuur de snelheids- en hellingskrommen elkaar in alle punten loodrecht zullen snijden <sup>1)</sup>.

13. De snelheidskrommen gaan alle van een punt van de lijn BC uit, en zijn in drie afdeelingen te splitsen naar gelang zij hun eindpunt hebben op BA (in het  $z$ -vlak  $BA_1$ ),  $AD_2$  ( $z$ -vlak  $A_2D_2$ ) of  $D_1C$ . Die van de eerste afdeeling behooren bij snelheden grooter dan de beginsnelheid, nl. tusschen  $\infty$  (het punt B) en  $\frac{1}{ckp^m} = U$ ; die van de tweede afdeeling bij snelheden

---

<sup>1)</sup> Dit is een algemeene eigenschap der vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen. Wij zien dit in, indien wij bedenken, dat van  $l \left( \frac{dw}{ds} \right)$  het bestaanbare gedeelte uitsluitend van de snelheid, het onbestaanbare gedeelte van de bewegingsrichting afhangt (zie § 8).



kleiner dan de begin- doch groter dan de eindsnelheid, nl. tusschen  $\frac{1}{ckp^m} = U$  en  $\frac{1}{ck} = \frac{a-b}{a} U$ ; die van de laatste eindelijk bij snelheden kleiner dan de eindsnelheid, nl. tusschen  $\frac{1}{ck}$  en 0 (het punt C). Die van de middelste afdeeling snijden de middenstroomlijn  $AD_3$  ( $z$ -vlak  $A_3D_3$ ), de overige snijden deze niet.

De overgangen tusschen deze drie afdeelingen worden in het  $t$ -vlak gevormd door den cirkel  $IKA$  en de rechte  $JL$ . De overeenkomstige krommen in het  $z$ -vlak,  $IA_3$  en  $JD_3$ , loopen asymptotisch aan de middenstroomlijn.

14. Trekken wij in het  $t$ -vlak de cirkels die  $A$  tot middelpunt hebben en door  $B$  en  $C$  gaan (potentiaallijnen), zoo snijden deze den cirkel  $IKA$  en de rechte  $JL$  in de punten  $K$  en  $L$ , waarvan wij planimetrisch gemakkelijk aantoonen, dat ze met  $A$  in één rechte liggen.

De verwante punten  $K$  en  $L$  in het  $z$ -vlak, waarin de snelheidskromme  $IA_3$  en  $JD_3$  de potentiaallijnen  $BE$  en  $CF$  snijden, liggen dus op dezelfde stroomlijn  $A_4D_4$ .

15. De hellingskrommen zijn in het  $t$ -vlak cirkelbogen die van  $B$  naar  $C$  loopen; zij zullen dus ook in het  $z$ -vlak hun uiteinden in  $B$  en  $C$  hebben. Die welke bij de grootste helling,  $m\pi$ , behoort, is de lijn  $BC$  zelf; bij afnemende helling verwijdt zich de kromme meer en meer van  $BC$ ; nadert de helling tot 0, zoo legt zich ten slotte de hellingskromme tegen de rechte lijnen  $BA_1$ ,  $A_2D_2$  en  $D_1C$  aan; voor de helling 0 bestaat de kromme uit deze drie rechte lijnen, waarvan men zich aan de eene zijde in het oneindige de uiteinden  $A_1$  en  $A_2$  en aan de andere zijde  $D_1$  en  $D_2$  verbonden kan denken.

16. Denken wij ons in het  $t$ -vlak een willekeurige stroomlijn, b.v.  $AD_5$ , en gaan wij van  $A$  uitgaande het beloop van den hoek na, waaronder van een punt dier lijn uit het stuk  $BC$  gezien wordt, dan blijkt het, dat deze hoek in  $A$  van 0 uitgaat, daarna groter wordt, een maximum bereikt in een punt  $Q$  waar de lijn raakt aan een door  $B$  en  $C$  gaanden cirkelboog, vervolgens weder afneemt en in het oneindige 0 wordt.

Dit overbrengende op de  $z$ -figuur vinden wij, dat elke

stroomlijn met toenemende helling begint (holle zijde naar de pier gekeerd), daarna één buigpunt heeft en vervolgens met afnemende helling (tegengestelde kromming) voortgaat. De limiethelling is aan beide zijden 0.

17. Wat de plaats van het punt Q betreft, hebben wij in het  $t$ -vlak:

$$AQ^2 = AB \cdot AC$$

en dus

$$AQ = \sqrt{p}.$$

De meetkundige plaats van het punt  $Q_t$  is dus een cirkel die  $A_t$  tot middelpunt heeft, en dus een potentiaallijn. Wij zien echter gemakkelijk in, dat deze cirkel tevens het stuk BC harmonisch verdeelt en dus snelheidskromme is.

De meetkundige plaats van het buigpunt Q ( $z$ -vlak) der stroomlijnen is dus een kromme GH die tegelijkertijd potentiaallijn en snelheidskromme is.

De bij deze kromme behorende snelheid is gemakkelijk te berekenen. Wij vinden nl. voor de verhouding  $QB : QC$  ( $t$ -vlak)  $\sqrt{p}$ . Hieruit volgt, dat de snelheid middenevenredig is tusschen de begin- en de eindsnelheid of wel gelijk is aan

$$\frac{1}{ckp^{im}} = U \sqrt{\frac{a-b}{a}};$$

en daar deze snelheid overal loodrecht op de kromme GH gericht is, weten wij ook, dat de lengte dezer kromme middenevenredig is tusschen de begin- en de eindbreedte van het halve kanaal, of wel:

$$\text{lengte } G_s H_s = c\pi p^{im} = \sqrt{a(a-b)}.$$

18. Gaan wij thans na welk beloop de snelheid heeft, indien wij een bepaalde stroomlijn volgen. Wij hebben ons daartoe in het  $t$ -vlak het stelsel der snelheidscircels voor te stellen en te zien welke dier circels door de stroomlijn achtereenvolgens worden gesneden of geraakt.

Hierbij doet zich een belangrijk verschil voor, naarmate de stroomlijn aan de eene of aan de andere zijde van de middenstroomlijn gelegen is.

Ligt de stroomlijn tusschen  $AD_2$  en  $AD_3$  ( $t$ -vlak), b.v.  $AD_6$ , zoo raakt zij geen enkelen snelheidscirkel. De verhouding der

afstanden tot C en B is voortdurend afnemende van  $\frac{1}{p}$  af tot 1 toe. Dit laatste geldt ook voor de lijn  $AD_3$  zelf.

Dit overbrengende in de  $z$ -figuur zien wij, dat, indien een vloeistofdeeltje een stroomlijn  $A_6D_6$  volgt, buiten de middenstroomlijn gelegen (of wel zich langs deze zelf beweegt), de snelheid voortdurend afneemt van de beginsnelheid af tot de eindsnelheid toe.

Ligt de stroomlijn aan de andere zijde van de middenstroomlijn, b.v.  $AD_3$  ( $t$ -vlak), zoo zijn er twee snelheidscircels die er aan raken in de punten N en S. De verhouding der afstanden tot C en B is toenemende van A tot N, afnemende van N tot S en daarna weer toenemende van S tot in het oneindige.

Overgaande tot de  $z$ -figuur vinden wij het volgende. Indien een vloeistofdeeltje een stroomlijn  $A_3D_3$  volgt binnen de middenstroomlijn gelegen, zoo is de snelheid eerst toenemende, bereikt een maximum in een punt N, neemt daarna af tot zij in een punt S een minimumwaarde bereikt, kleiner dan de eindsnelheid, waarna zij verder weder toenemende tot de eindsnelheid nadert.

19. Planimetrisch is gemakkelijk aan te toonen, dat de raakpunten N en S ( $t$ -vlak) de snijpunten zijn van  $AD_3$  met een cirkel die zijn middelpunt R op  $AD_3$  heeft en door B en C gaat. Deze cirkel is hellingekromme. Hieruit volgt ( $z$ -vlak), dat elke stroomlijn in haar punten van maximum en minimumsnelheid evenwijdige raaklijnen heeft.

20. De meetkundige plaats van  $N_t$  is een kromme die van B naar A loopt, geheel binnen den cirkel IKA ligt en in B en A raaklijnen heeft loodrecht op  $AD_1$ . Die van  $S_t$  is een kromme die van C uitgaat, geheel aan denzelfden kant van JL ligt en een asymptoot heeft evenwijdig aan  $AD_3$  <sup>1)</sup>.

De overeenkomstige meetkundige plaatsen  $BA_3$  en  $CD_3$  in het  $z$ -vlak loopen beide asymptotisch aan de middenstroomlijn.

---

<sup>1)</sup> Stellen wij  $t = \xi + i\eta$ , dan is de vergelijking dezer beide meetkundige plaatsen:

$$(\xi^2 + \eta^2)(1 + p + \xi) + p\xi = 0,$$

die van de asymptoot:

$$\xi = -(1 + p).$$

21. De helling van een stroomlijn in een punt van het  $z$ -vlak ten opzichte van de  $x$ -as is tevens die van de potentiaallijn ten opzichte van de  $y$ -as. De hellingskrommen die wij gebruikt hebben om de eigenschappen der stroomlijnen na te gaan, kunnen dus tevens dienen om te onderzoeken hoe de helling der potentiaallijnen is en of deze buigpunten hebben.

Wij hebben daartoe na te gaan welke der hellingscirkels in het  $t$ -vlak door de potentiaallijnen, d. i. door de cirkels die  $A$  tot middelpunt hebben, worden gesneden of geraakt. Wij kunnen deze potentiaalcirkels in drie afdeelingen splitsen, nl. 1°. die waarvan de straal kleiner is dan  $p$  (of  $AB$ ), 2°. die waarvan de straal tusschen  $p$  en 1 (of  $AC$ ) ligt, 3°. die waarvan de straal grooter dan 1 is.

Die van de middelste afdeeling raken aan geen enkelen hellingscirkel en snijden alle hellingscirkels. De overeenkomstige  $z$ -lijnen hebben dus geen buigpunt. Zij loopen van punten van de lijn  $BC$  naar punten van een stuk  $EF$  van de lijn  $A_2D_2$  en ontmoeten deze beide lijnen loodrecht.

De overige potentiaalcirkels in het  $t$ -vlak raken alle aan één der hellingscirkels, terwijl aan beide zijden van dit raakpunt de hellingsverandering tegengesteld is. De overeenkomstige  $z$ -krommen hebben dus alle één buigpunt.

22. Op planimetrische gronden zien wij gemakkelijk in, dat in alle punten in het  $t$ -vlak waarin een potentiaallijn aan een hellingscirkel raakt, tevens een stroomlijn aan een snelheids-cirkel raakt. In elk buigpunt eener potentiaallijn in het  $z$ -vlak is dus tevens de snelheid langs de stroomlijn die daardoor gaat maximum of minimum <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Dit is weder een algemeene eigenschap der vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen, welke is af te leiden uit de algemeene eigenschap, vermeld bij § 12. Daar immers de snelheids- en hellingskrommen elkaar in elk punt van het vlak loodrecht snijden, weten wij dat de snelheidskrommen en de stroomlijnen elkaar raken in alle punten waarin een potentiaallijn aan een hellingskromme raakt en dat dus in die punten de snelheid langs de stroomlijn maximum of minimum, of althans stationair is. Als bijzonder geval zou het kunnen gebeuren, dat in alle punten van een stroomlijn de daardoor gaande potentiaallijnen buigpunten hebben; in dat geval moet de stroomlijn tevens snelheidskromme en dus de snelheid daarlangs constant zijn.

Omgekeerd zien wij op dezelfde wijze in, dat in het algemeen de snelheid maximum of minimum is in die punten der potentiaallijnen waarin de stroomlijnen

De reeds vermelde krommen  $BA_3$  en  $CD_3$  (§ 20) vormen dus de meetkundige plaats van de buigpunten der potentiaallijnen.

23. Het beloop der snelheid langs de potentiaallijnen blijft nog te onderzoeken over.

Het blijkt, dat de potentiaalcirkels in het  $t$ -vlak behalve in punten van de lijn  $D_1D_2$  de snelheidscircels niet aanraken. Voor die welke binnen den cirkel  $GMH$  liggen, blijkt de snelheid afnemende te zijn van het uiteinde der potentiaallijn op  $AG$  gelegen tot dat op  $AH$  toe. Voor de overige is de snelheid toenemende van af het uiteinde der potentiaallijn op  $GD_1$  gelegen tot dat op  $HD_2$  toe.

Dit overbrengende op de  $z$ -figuur zien wij, dat op alle potentiaallijnen links van  $GH$  gelegen de snelheid aan den middenkant van het kanaal het grootst is en afneemt naar den buitenkant, terwijl dit rechts van  $GH$  juist andersom is. Den overgang tusschen beide gevallen vormt de lijn  $GH$  waar de snelheid in alle punten even groot is.

24. Ik voer nu een nieuwe hulpgrootheid  $u$  in bepaald door de vergelijking

$$u = \frac{t + p}{t + 1}, \quad \dots \dots \dots (7)$$

waaruit volgt:

$$t = - \frac{u - p}{u - 1}. \quad \dots \dots \dots (8)$$

Deze  $u$  staat volgens § 8 in eenvoudig verband tot de snelheid en de bewegingsrichting. Is nl.  $\sigma$  de snelheid en  $\vartheta$  de hoek die de raaklijn aan de stroomlijn met de  $x$ -as in het  $z$ -vlak maakt, dan is

$$u^m = (ck\sigma)^{-1} e^{\vartheta i}$$

en dus

$$u = (ck\sigma)^{-\frac{1}{m}} e^{\frac{\vartheta}{m} i} = e^{-\frac{1}{m} l(ck\sigma) + \frac{\vartheta}{m} i}. \quad \dots \dots (9).$$

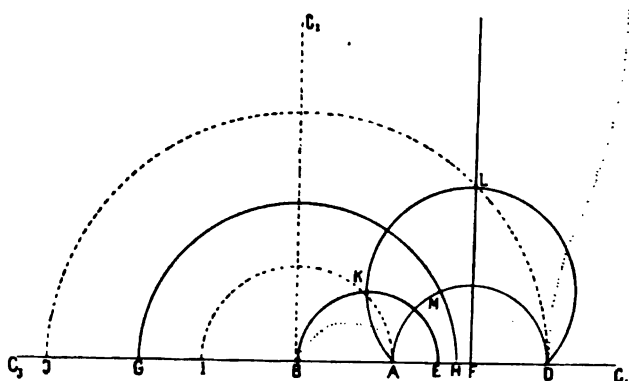
---

buigpunten hebben, terwijl, indien zich het bijzondere geval voordoet dat alle punten eener potentiaallijn tevens buigpunten van stroomlijnen zijn, deze potentiaallijn tevens snelheidskromme is. Dit laatste bijzondere geval doet zich voor bij de potentiaallijn  $GH$ .

Deze grootheid  $u$  had ik even goed als  $t$  kunnen gebruiken om de eigenschappen van de stroomlijnen enz. na te gaan.

25. Beelden wij het kanaal in een  $u$ -vlak (Fig. 3) af, dan

Fig. 3 ( $u$ -vlak).



vinden wij uit de formules (7) en (8) gemakkelijk :

1°. voor de snelheidskrommen concentrische cirkels met het punt  $B_*$  (den oorsprong) tot middelpunt;

2°. voor de hellingskrommen rechte lijnen die door  $B_*$  gaan;

3°. voor de stroomlijnen cirkelbogen die de punten  $A$  ( $u=p$ ) en  $D$  ( $u=1$ ) verbinden;

4°. voor de potentiaallijnen cirkels die  $AD$  harmonisch verdeelen.

26. Slaan wij nu het  $u$ -vlak om de lijn  $BC_2$  (de ordinatenas) om, en leggen wij het daarna op het  $t$ -vlak, dan zien wij, dat het mogelijk is de potentiaallijnen, stroomlijnen, snelheids- en hellingskrommen van het  $u$ -vlak te doen samenvallen met de snelheidskrommen, hellingskrommen, potentiaallijnen en stroomlijnen van het  $t$ -vlak, zoo dat telkens met toenemende potentiaal afnemende snelheid en met toenemende stroomfunctie afnemende helling overeenkomt.

Hieruit volgt, dat er volledige overeenkomst moet bestaan tusschen de eigenschappen van potentiaal en stroomfunctie

eenerzijds en die van snelheid en helling anderzijds, zoodat wij uit eigenschappen van de eene onmiddellijk eigenschappen van de andere kunnen aflezen.

Zoo volgt b.v. uit het beredeneerde in § 18, dat er evenals een middenstroomlijn ook een „middenhellingskromme” moet bestaan, waardoor de hellingskrommen in twee groepen verdeeld worden, die verschillende eigenschappen bezitten, indien wij het beloop van de potentiaal daarlangs nagaan.

En evenzoo geven ons §§ 21—23 eigenschappen van de snelheidskrommen betrekking hebbende op de verandering van de stroomfunctie en de potentiaal daarlangs.

27. Onafhankelijk van deze meetkundige beschouwingen hadden wij dit kunnen afleiden uit de formules (7), (9) en (2). Hieruit toch blijkt, dat bij elk punt van het kanaal steeds een ander punt te vinden is, zoo dat de grootheden  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $\mathfrak{S}$  in beide punten door de volgende betrekkingen aan elkaar verbonden zijn:

$$\left. \begin{aligned} k\phi' &= -\frac{1}{m} l(ck\sigma), \\ k\phi &= -\frac{1}{m} l(ck\sigma'), \\ \frac{1}{m} \mathfrak{S}' &= \pi - k\psi, \\ \frac{1}{m} \mathfrak{S} &= \pi - k\psi'. \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

Deze betrekkingen stellen een tegengesteld-conforme afbeelding van het kanaal in zichzelf vast, waarbij telkens twee punten wederkeerig in elkaar overgaan, terwijl verder potentiaallijnen en snelheidskrommen, stroomlijnen en hellingskrommen verwisseld worden.

De meetkundige plaats der punten die in zichzelf worden afgebeeld is in het  $\iota$ -vlak een cirkel die C tot middelpunt heeft en  $\sqrt{1-p}$  tot straal, in het  $u$ -vlak een cirkel die D tot middelpunt heeft en  $\sqrt{1-p}$  tot straal. In het  $z$ -vlak is het een kromme die van een punt van  $CD_1$  naar een punt

van  $BA_1$  loopt. Zij bevat de punten K en L en snijdt de middenstroomlijn niet.

De krommen  $CD_3$  en  $BA_3$  (§ 20) worden afgebeeld langs zichzelf.

### III. Snelheidspotentiaal en stroomfunctie.

28. Alvorens formules te geven waardoor de grootte  $w$  (en dus ook  $\phi$  en  $\psi$ ) in  $z$  (en dus in  $x$  en  $y$ ) wordt uitgedrukt, ga ik eerst  $w$  en  $z$  beide in een daartoe geschikte hulpgrootte uitdrukken. Hiertoe biedt zich de grootte  $u$  aan (§ 24), bepaald door

$$u = \frac{t + p}{t + 1} = \frac{e^{tw} + p}{e^{tw} + 1} \dots \dots \dots (11).$$

Wij vinden hieruit onmiddellijk

$$w = \frac{1}{k} l \left( -\frac{p - u}{1 - u} \right) \dots \dots \dots (12).$$

Ter bepaling van  $z$  als functie van  $u$  hebben wij in (1) te substitueeren

$$t = -\frac{p - u}{1 - u}.$$

Tevens is het nu wenschelijk een bepaalden coördinatenoorsprong aan te nemen. Ik kies daartoe het punt waar  $u = 0$  is, d. i. het punt B. Wij hebben dan:

$$\begin{aligned} z &= c \int_{-p}^t \frac{1}{t} \left( \frac{t + p}{t + 1} \right)^m dt = c \int_0^u \frac{(1 - p) u^m du}{(1 - u)(p - u)} \\ z &= c \int_0^u \frac{u^m du}{1 - u} - c \int_0^u \frac{u^m du}{p - u} \\ z &= c \int_0^u \frac{u^m du}{1 - u} - cp^m \int_0^{\frac{u}{p}} \frac{v^m dv}{1 - v} \dots \dots \dots (13). \end{aligned}$$

Hierdoor is  $z$  uitgedrukt in het verschil van twee integralen van denzelfden vorm.



29. Is voor  $m$  de een of andere meetbare breuk gegeven, zoo kunnen bovenstaande integralen worden uitgewerkt. Ten einde echter het algemeene geval te blijven omvatten, is het noodig de functie  $\int_0^u \frac{u^m du}{1-u}$  nader te behandelen.

Ontwikkelen wij  $\frac{u^m}{1-u}$  naar de opklimmende of afdalende machten van  $u$ , dan vinden wij door rechtstreeksche integratie twee bijzondere waarden voor de onbepaalde integraal  $\int \frac{u^m du}{1-u}$ , waarvan de eene geldig is voor punten in het  $u$ -vlak binnen den convergentiecircle mod.  $u = 1$ , de tweede voor punten buiten dien circle.

Voor deze beide reeksontwikkelingen kunnen wij schrijven  $u^m K_1(u)$  en  $u^m K_2(u)$ , waarin door  $K_1(u)$  en  $K_2(u)$  — of meer volledig geschreven  $K_1(m, u)$  en  $K_2(m, u)$  — worden voorgesteld de reeksen

$$K_1(u) = \frac{u}{1+m} + \frac{u^2}{2+m} + \frac{u^3}{3+m} + \dots \quad (14)$$

en

$$K_2(u) = \frac{1}{-m} + \frac{1}{(1-m)u} + \frac{1}{(2-m)u^2} + \dots \quad (15)$$

Deze beide functies  $K_1$  en  $K_2$  zijn éénwaardig, en bestaanbaar voor bestaانبare waarden van  $u$ . Voor punten van den convergentiecircle mod.  $u = 1$  zijn beide reeksen convergent behalve alleen voor het punt  $u = 1$ .

Het is duidelijk, dat  $u^m K_1(u)$  nul wordt voor  $u = 0$ . Wij hebben dus voor mod.  $u < 1$

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = u^m K_1(u), \quad (16)$$

en moeten nu nog een constante  $C$  zóó bepalen, dat voor alle punten buiten den convergentiecircle

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = C + u^m K_2(u)$$

wordt. Hiertoe substitueeren wij de waarde van  $u$  voor een

punt van den convergentiecircle (waarvoor beide reeksen moeten doorgaan), en stellen dus  $u = e^{i\omega}$ . Wij moeten dan hebben

$$e^{mi\omega} K_1(e^{i\omega}) = C + e^{mi\omega} K_2(e^{i\omega}),$$

en dus

$$K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) = C e^{-mi\omega}$$

Volbrengen wij de substitutie  $u = e^{i\omega}$  in de reeksen (14) en (15), dan vinden wij

$$\begin{aligned} K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) &= \frac{1}{m} - \frac{2m}{1^2 - m^2} \cos \omega - \frac{2m}{2^2 - m^2} \cos 2\omega \dots + \\ &+ i \left\{ \frac{2 \cdot 1}{1^2 - m^2} \sin \omega + \frac{2 \cdot 2}{2^2 - m^2} \sin 2\omega + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Wetende dat dit tot den vorm  $C e^{-mi\omega}$  moet kunnen worden herleid, herkennen wij in deze reeksen gemakkelijk de ontwikkeling volgens Fourier van  $\frac{\pi}{\sin m\pi} \cos m(\pi - \omega)$  en van  $\frac{\pi}{\sin m\pi} \sin m(\pi - \omega)$  en vinden wij dus

$$K_1(e^{i\omega}) - K_2(e^{i\omega}) = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{mi(\pi - \omega)},$$

waaruit volgt

$$C = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i}.$$

Wij hebben dus ten slotte voor mod.  $u > 1$

$$\int_0^u \frac{u^m du}{1-u} = \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + u^m K_2(u) \dots \dots (17)$$

30. Substitueeren wij in (13) voor de integralen de daarvoor in (16) en (17) gevonden waarden, zoo hebben wij  $z$  voor alle gevallen volgens de machten van  $u$  ontwikkeld. Daarbij zijn drie gevallen te onderscheiden:

1°. mod.  $u < p$ , gebied  $A_3 KIBA_1$  ( $z$ -vlak):

$$z = cu^m \left\{ K_1(u) - K_1\left(\frac{u}{p}\right) \right\}; \dots \dots (18)$$

2°.  $p < \text{mod. } u < 1$ , gebied  $A_2 D_2 D_3 L J I K A_3$ :

$$z = -\frac{c\pi p^m}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + cu^m \left\{ K_1(u) - K_2\left(\frac{u}{p}\right) \right\}, \dots (19).$$

Letten wij op de beteekenis der letters  $c$ ,  $p$  en  $m$ , dan zien wij, dat de eerste term hiervan in richting en grootte de lijn BT aangeeft, die den oorsprong B verbindt met het snijpunt van  $A_2 D_2$  en het verlengde van BC.

3°.  $\text{mod. } u > 1$ , gebied  $D_1 C J L D_3$ :

$$z = \frac{c\pi(1-p^m)}{\sin m\pi} e^{m\pi i} + cu^m \left\{ K_2(u) - K_2\left(\frac{u}{p}\right) \right\} \dots (20).$$

De eerste term hiervan stelt in richting en grootte de lijn BC voor.

Wij kunnen met behulp van deze formules de plaats van alle merkwaardige punten in het  $z$ -vlak bepalen.

31. Ik ga thans de waarde van  $z$  in  $u$  uitgedrukt nog in een anderen vorm brengen meer geschikt tot verdere verwerking en voer daartoe ter bekorting der formules de schrijfwijze  $\mathfrak{E}(u)$  of meer volledig  $\mathfrak{E}(m, u)$  in voor de bepaalde integraal

$$\mathfrak{E}(u) = \int_0^u \frac{1-u^m}{1-u} du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ter berekening van  $\mathfrak{E}(u)$  hebben wij:

1°. voor het geval  $\text{mod. } u < 1$ :

$$\mathfrak{E}(u) = -l(1-u) - u^m K_1(u),$$

2°. voor het geval  $\text{mod. } u > 1$ :

$$\mathfrak{E}(u) = -l(1-u) - \frac{\pi}{\sin m\pi} e^{m\pi i} - u^m K_2(u)$$

of

$$\mathfrak{E}(u) = -l(u-1) - \pi \cot m\pi - u^m K_2(u).$$

Deze reeksontwikkelingen zijn echter niet zeer geschikt voor waarden van  $u$  die dicht bij 1 liggen en bovendien niet van toepassing op het geval  $u = 1$ , waarvoor  $\mathfrak{E}(u)$  niet  $\infty$  wordt.

Voor deze gevallen is de volgende reeks bruikbaar volgens de machten van  $u-1$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(u) = \mathfrak{E}(1) + \frac{m}{1} \cdot \frac{u-1}{1} - \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(u-1)^2}{2} + \\ + \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(u-1)^3}{3} - \dots\end{aligned}$$

geldig voor het geval mod.  $(u-1) \leq 1$ .

Hierin moet nog de beginterm  $\mathfrak{E}(1)$  bekend zijn. De voorwaarde  $\mathfrak{E}(0) = 0$  geeft ons hiervoor de waarde

$$\mathfrak{E}(1) = \frac{m}{1} + \frac{m(1-m)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m(1-m)(2-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \dots,$$

van welke reeks de convergentie gemakkelijk bewijsbaar is <sup>1)</sup>.

Bovenstaande reeks voor  $\mathfrak{E}(u)$  kan worden opgevat als een ontwikkeling volgens Taylor en geeft dus tevens de waarden der opeenvolgende afgeleiden voor  $u = 1$ .

32. De voor  $z$  gevonden formule (13) is nu te herleiden tot

$$z = -c l(1-u) + cp^m l\left(1 - \frac{u}{p}\right) - c \mathfrak{E}(u) + cp^m \mathfrak{E}\left(\frac{u}{p}\right). \quad (22).$$

Het  $\infty$  worden van  $z$  voor  $u = 1$  en voor  $u = p$  wordt hierin uitsluitend veroorzaakt door een der beide logarithmische termen.

<sup>1)</sup> Iets sneller wordt de waarde van  $\mathfrak{E}(1)$  benaderd door de volgende reeks, waarvan ik het bewijs ter bekorting weglaat:

$$\mathfrak{E}(1) = m \left\{ \frac{1}{1(1+m)} + \frac{1}{2(2+m)} + \frac{1}{3(3+m)} + \dots \right\}.$$

Nemen wij van deze reeks  $n$  termen, zoo kan van den restterm  $R_n$  bewezen worden:

$$\frac{m}{n+1} < R_n \left\{ \begin{array}{l} < \frac{m}{n} \\ < \frac{mn+1+m}{(n+1)(n+2)} \end{array} \right.$$

Door dus bij  $n$  termen van de reeks  $\frac{m}{n+1}$  als slotterm toe te voegen wordt de overblijvende fout nog aanzienlijk verkleind.

Ten slotte kan aangaande  $\mathfrak{E}(1)$  nog worden opgemerkt, dat deze grootheid niets anders is dan

$$\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + C,$$

waarin  $C = 0,577 \dots$ , en dat hieruit ook bovenstaande reeksontwikkeling is af te leiden. Zie b.v. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. t. 2, p. 180.

33. Het gelukte mij in het algemeen aan te geven hoe de snelheidspotential in reeksen ontwikkelbaar is voor twee kanaalvakken, nl.:

I. voor dat deel van het kanaal dat gelegen is links van de  $y$ -as, d. i. van de loodlijn uit B op  $A_2D_2$  neergelaten (zonder echter voor het geval  $m > \frac{1}{2}$  het driehoekige stuk mee te rekenen, dat dan bij C links van die lijn komt te liggen);

II. voor dat deel van het kanaal dat gelegen is rechts van de loodlijn uit C op  $A_2D_2$  neergelaten, of, voor het geval  $m > \frac{1}{2}$  rechts van de  $y$ -as.

Voor het geval  $m = \frac{1}{2}$  vormen deze beide vakken te zamen het geheele kanaal. Voor  $m < \frac{1}{2}$  blijft nog een trapezium-vormig, voor  $m > \frac{1}{2}$  een driehoekig stuk over.

34. Ik begin met vak I.

Het is duidelijk, dat wij ons aan dit kanaalstuk aan weerszijden, nl. aan  $A_1B$  en aan  $A_2E$  een even breed kanaal kunnen denken aan te sluiten, waarin de beweging symmetrisch is aan die in het beschouwde kanaalstuk. Dit zoo voortzettende krijgen wij een voorstelling van een vloeistofbeweging in het geheele gebied links van de ordinatenas gelegen. Wij komen tot deze zelfde voorstelling uit formule (1) door bij de integratie het passeeren van de abscissenas in het  $t$ -vlak rechts van het punt B en daarmede het rondloopen om den oorsprong naar willekeur toe te laten.

Letten wij op geen andere waarde van  $u$  dan bij de aldus beschreven beweging behoort en beperken wij ons tot waarden van  $z$  behoorende bij punten links van de ordinatenas gelegen, dan kunnen wij nu  $u$  als een periodieke functie van  $z$  beschouwen met de periode  $2c\pi p^m i$ .

De functie

$$s = e^{\frac{z}{cp^m}} \dots \dots \dots (23)$$

heeft deze zelfde periode, waaruit blijkt, dat  $u$  als éénwaardige functie van  $s$  kan worden opgevat.

Formule (23) stelt een transformatie voor, waarbij het beschouwde kanaalvak vervormd wordt tot de helft van een cirkel (in een  $s$ -vlak) met het punt  $s = 0$  tot middelpunt en een straal 1. Een daarmede symmetrisch stuk vloeistofoppervlakte in het  $z$ -vlak wordt vervormd tot de andere helft van den cirkel.

35. De grootheid  $u$  voldoet nu aan alle eischen om binnen dezen cirkel naar de opklimmende machten van  $s$  te kunnen worden ontwikkeld. Dat dit daarbuiten niet kan, komt doordat B ( $s = 1$ ) een kritisch punt is.

Uit (22) vinden wij

$$s = e^{\frac{s}{p^m}} = \left(1 - \frac{u}{p}\right) (1 - u)^{-\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^m} \mathfrak{X}(u) + \mathfrak{X}\left(\frac{u}{p}\right)}. \quad (24)$$

Bij de ontwikkeling van  $u$  wordt de bekende term de waarde van  $u$  voor  $s = 0$ , dus  $p$ . Stellen wij verder

$$u = p + a_1 e^{\frac{s}{p^m}} + a_2 e^{\frac{2s}{p^m}} + \dots \quad (25)$$

dan hebben wij volgens de formule van Bürmann

$$a_n = \frac{1}{n!} \lim_{u=p} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ \frac{(u-p)^n}{\left(1 - \frac{u}{p}\right)^n} (1-u)^{\frac{n}{p^m} - \frac{n}{p^m} \mathfrak{X}(u) - n \mathfrak{X}\left(\frac{u}{p}\right)} \right\}$$

of

$$a_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ (-p)^n (1-u)^{\frac{n}{p^m} - \frac{n}{p^m} \mathfrak{X}(u) - n \mathfrak{X}\left(\frac{u}{p}\right)} \right\} \right]_{u=p}$$

of

$$a_n = \frac{(-1)^n p}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left\{ (1-pv)^{\frac{n}{p^m} - \frac{n}{p^m} \mathfrak{X}(pv) - n \mathfrak{X}(v)} \right\} \right]_{v=1} \dots \quad (26)$$

Wij hebben nu voor het beschouwde kanaalvak  $u$  in  $z$  uitgedrukt in een convergente reeks, waarvan wij de coëfficiënten zoover wij dit verlangen berekenen kunnen <sup>1)</sup>. Deze coëfficiën-

<sup>1)</sup> De berekening der coëfficiënten kan ook als volgt geschieden.

Vooreerst is  $a_1 = \lim_{s=0} \frac{u-p}{s}$  en dus volgens (24):

$$a_1 = -p(1-p)^{p^{-m}} e^{p^{-m} \mathfrak{X}(p) - \mathfrak{X}(1)}.$$

Vervolgens hebben wij volgens (23) en (13) de differentiaalvergelijking

$$\frac{1-p}{p^m} s \frac{du}{ds} = \frac{(1-u)(u-p)}{u^m} = -pu^{-m} + (1-p)u^{-m+1} - u^{-m+2}.$$

Hierin substitueerende  $u = p + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$  vinden wij de identiteit

$$(1-p)p^{-m}(a_1 s + 2a_2 s^2 + 3a_3 s^3 + \dots) = -p(p + a_1 s + \dots)^{-m} + (1+p)(p + a_1 s + \dots)^{-m+1} - (p + a_1 s + \dots)^{-m+2}.$$

De coëfficiënten van het eerste en die van het tweede lid aan elkaar gelijkstellende vinden wij  $a_1, a_2$  ens. uitgedrukt in  $m, p$  en  $a_1$ .

Ben dergelijk methode is natuurlijk ook te volgen voor kanaalvak II § 38.

ten zijn bestaanbare grootheden. Substitutie der gevonden waarde van  $u$  in (12) zou een middel zijn tot berekening van  $\phi$  en  $\psi$ .

36. Wenschen wij  $w$  rechtstreeks in  $s$ , en dus in  $z$ , uit te drukken, dan stuiten wij op het bezwaar, dat voor  $s = 0$ ,  $w = -\infty$  wordt, zoodat de ontwikkeling van  $w$  naar de opklimmende machten van  $s$  niet mogelijk is. Wij heffen dit bezwaar op door vooraf van  $w$ , waarvoor wij volgens (12) hebben

$$w = \frac{1}{k} \{l(p) + \pi i\} + \frac{1}{k} l\left(1 - \frac{u}{p}\right) - \frac{1}{k} l(1 - u),$$

zooveel maal de in den vorm (22) gebrachte waarde van  $z$  af te trekken, dat de termen met  $l\left(1 - \frac{u}{p}\right)$ , waardoor in het punt  $s = 0$  het oneindig worden zoowel van  $w$  als van  $z$  veroorzaakt wordt, tegen elkaar wegvallen. Wij vinden dan

$$\begin{aligned} w - \frac{z}{ckp^m} - \frac{1}{k} \{l(p) + \pi i\} = \\ = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l(1 - u) + \frac{1}{kp^m} \mathfrak{E}(u) - \frac{1}{k} \mathfrak{E}\left(\frac{u}{p}\right) \dots (27) \end{aligned}$$

Mechanisch komt deze bewerking hierop neer, dat wij aan de gegeven vloeistofbeweging een beweging van de geheele vloeistofmassa in de  $x$ -richting van rechts naar links hebben toegevoegd van zoodanige snelheid, dat beide bewegingen elkaar in het oneindige opheffen.

Wij kunnen nu de verkregen functie van  $u$  naar de opklimmende machten van  $s$  volgens de reeks van Bürmann ontwikkelen.

Stellen wij  $s = 0$  en dus  $u = p$ , dan verkrijgt de functie de waarde

$$\frac{1}{k} \left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l(1 - p) + \frac{1}{kp^m} \mathfrak{E}(p) - \frac{1}{k} \mathfrak{E}(1).$$

Wij hebben dus:

$$w = \frac{z}{ckp^m} + \frac{1}{k} \{l(p) + \pi i\} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{p^m} - 1\right) l(1 - p) +$$

$$+ \frac{1}{kp^m} \mathfrak{E}(p) - \frac{1}{k} \mathfrak{E}(1) + b_1 e^{\frac{z}{cp^m}} + b_2 e^{\frac{2z}{cp^m}} + \dots \quad (28)$$

waarin wij voor de coëfficiënten vinden :

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{u=p} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left[ \left\{ \frac{1}{k(1-u)} \left( 1 - \frac{u^m}{p^m} \right) - \frac{1}{kp} \cdot \frac{1 - \left( \frac{u}{p} \right)^m}{1 - \frac{u}{p}} \right\} \cdot \frac{(u-p)^n}{\left( 1 - \frac{u}{p} \right)^n} \cdot (1-u)^{\frac{n}{p^m}} e^{\frac{u}{cp^m}} \mathfrak{E}(u) - u^n \mathfrak{E}\left(\frac{u}{p}\right) \right],$$

of

$$b_n = \frac{(-1)^n}{kn!} \lim_{v=1} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left[ \left\{ \frac{p(1-v^m)}{1-pv} - \frac{1-v^m}{1-v} \right\} \cdot (1-pv)^{\frac{n}{p^m}} \cdot e^{\frac{pv}{cp^m}} \mathfrak{E}(pv) - v^n \mathfrak{E}(v) \right] \dots \quad (29).$$

Ik laat hierin het woord *lim.* staan om aan te wijzen, dat wij bij de substitutie  $v = 1$  aan onbepaalde vormen als  $\frac{1-v^m}{1-v}$  de zoogenaamde „ware” waarde moeten toekennen (d. i. hier  $m$ ). Wij kunnen ook voor  $\frac{1-v^m}{1-v}$  als afgeleide der  $\mathfrak{E}$ -functie den vorm  $\mathfrak{E}'(v)$  schrijven en bij de substitutie  $v = 1$  de afgeleiden der  $\mathfrak{E}$ -functie bepalen op de wijze aangegeven in § 31, laatste alinea.

37. Ten slotte kunnen wij nog in beide leden van (28) het bestaanbare en het onbestaanbare scheiden, en vinden dan voor de *snelheidspotential*:

$$\phi = \frac{x}{ckp^m} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{p^m} - 1 \right) l(1-p) + \frac{1}{kp^m} \mathfrak{E}(p) - \frac{1}{k} \mathfrak{E}(1) + b_1 e^{\frac{z}{cp^m}} \cos \frac{y}{cp^m} + b_2 e^{\frac{2z}{cp^m}} \cos \frac{2y}{cp^m} + \dots \quad (30)$$



en voor de *stroomfunctie*:

$$\psi = \frac{y}{ckp^m} + \frac{\pi}{k} + b_1 e^{\frac{\pi}{cp^m}} \sin \frac{y}{cp^m} + b_2 e^{\frac{2\pi}{cp^m}} \sin \frac{2y}{cp^m} + \dots \quad (31).$$

38. Ik kom nu tot vak II van het kanaal (§ 33) en onder stel dus  $x$  positief en grooter dan  $c\pi(1 - p^m) \cot m\pi$ .

Evenals in § 34 beschreven werd, vormen wij ons de voorstelling van een vloeistofbeweging die het geheele aan rechts gelegen deel van het  $z$ -vlak omvat. Bij de integratie (1) in het  $t$ -vlak wordt dan het overschrijden van de abscissen-as toegelaten zoowel rechts van A als links van C.

De grootheid  $u$  is nu als periodieke functie van  $z$  op te vatten met de periode  $2c\pi i$  en dus in periode overeenkomende met  $e^{\frac{z}{c}}$ . Wij zouden verder de redeneering van §§ 34 en 35 geheel kunnen volgen en  $u$  ontwikkelen naar de opklimmende machten van  $e^{-\frac{z}{c}}$  en evenzoo  $w$  na voorafgaande aftrekking van  $\frac{z}{ck}$ . Doen wij dit echter, dan stuiten wij op de moeielijkheid dat de coëfficiënten der verkregen reeksen gebroken machten van een negatieve grootheid bevatten, hetgeen de splitsing van  $w$  in  $\phi$  en  $\psi$  i bezwaarlijk maakt.

Wij voorkomen dit bezwaar door te gaan ontwikkelen volgens

$$s' = e^{-\frac{z}{c} + \pi(1 - p^m)i} \quad 1).$$

Formule (22) geeft ons

$$s' = (u - 1) \left( \frac{u}{p} - 1 \right)^{-p^m} e^{\Re(u) - p^m \Re\left(\frac{u}{p}\right)}.$$

1) Dit komt op hetzelfde neer als verplaatsing van den oorsprong naar het snijpunt van  $CD_1$  met de  $y$ -as;  $e^{\frac{z}{c} - p^m \pi i}$  was even goed bruikbaar geweest maar minder in analogie met het voorafgaande.

De waarde van  $u$  voor  $s' = 0$ , d. i. in het oneindige aan rechts is  $u = 1$ . Wij vinden dus:

$$u = 1 + a'_1 e^{-\frac{z}{c} + \pi(1-p^n)i} + a'_2 e^{-\frac{2z}{c} + 2\pi(1-p^n)i} + \dots, \quad (32)$$

waarin:

$$a'_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ \left( \frac{u}{p} - 1 \right)^{np^n} e^{-u \mathfrak{Z}(u) + np^n \mathfrak{Z}\left(\frac{u}{p}\right)} \right\} \right]_{u=1} \dots \quad (33)$$

39. Ter berekening van  $w$  volgen wij § 33. Slechts hebben wij te zorgen, dat uit  $w$  niet de term met  $l\left(1 - \frac{u}{p}\right)$  maar die met  $l(1 - u)$  wegvalt.

Wij vinden dan:

$$w = \frac{z}{ck} - \frac{1}{k} l(p) = \frac{p^n}{k} \pi i + \frac{1-p^n}{k} l\left(\frac{u}{p} - 1\right) + \frac{1}{k} \mathfrak{Z}(u) - \frac{p^n}{k} \mathfrak{Z}\left(\frac{u}{p}\right).$$

Voor  $u = 1$  wordt dit

$$\frac{p^n}{k} \pi i + \frac{1-p^n}{k} l\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{k} \mathfrak{Z}(1) - \frac{p^n}{k} \mathfrak{Z}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Wij hebben dus:

$$w = \frac{z}{ck} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{p^n}{k} \pi i + \frac{1-p^n}{k} l\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{k} \mathfrak{Z}(1) - \frac{p^n}{k} \mathfrak{Z}\left(\frac{1}{p}\right) + b'_1 e^{-\frac{z}{c} + \pi(1-p^n)i} + b'_2 e^{-\frac{2z}{c} + 2\pi(1-p^n)i} + \dots \quad (34)$$

waarin:

$$b'_n = \frac{1}{kn!} \lim_{u=1} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left[ \left\{ \frac{1-u^n}{1-u} - \frac{u^n-1}{u-p} \right\} \left( \frac{u}{p} - 1 \right)^{np^n} e^{-u \mathfrak{Z}(u) + np^n \mathfrak{Z}\left(\frac{u}{p}\right)} \right] \dots \quad (35).$$

40. Bij splitsing van (34) in een bestaanbaar en een onbestaanbaar gedeelte vinden wij voor de *snelheidspotential*:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1-p^m}{k} l\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{k} \mathfrak{E}(1) - \frac{p^m}{k} \mathfrak{E}\left(\frac{1}{p}\right) + \\ + b'_1 e^{-\frac{x}{c}} \cos\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-p^m)\right\} + b'_2 e^{-\frac{2x}{c}} \cos\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-p^m)\right\} + \dots (36)$$

en voor de *stroomfunctie*:

$$\psi = \frac{y}{ck} + \frac{p^m \pi}{k} + b'_1 e^{-\frac{x}{c}} \sin\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-p^m)\right\} + \\ + b'_2 e^{-\frac{2x}{c}} \sin\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-p^m)\right\} + \dots \dots (37)$$

#### IV. Het geval $m = \frac{1}{2}$ .

41. Formule (13) wordt voor dit geval

$$z = c \int_0^u \frac{\sqrt{u} \cdot du}{1-u} - c \sqrt{p} \int_0^{\frac{u}{p}} \frac{\sqrt{v} \cdot dv}{1-v},$$

en dus

$$z = c \left\{ l \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} - \sqrt{p} \cdot l \frac{1 + \sqrt{\frac{u}{p}}}{1 - \sqrt{\frac{u}{p}}} \right\},$$

of

$$z = cl \left\{ \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{\frac{u}{p}}}{1 + \sqrt{\frac{u}{p}}} \right)^{\sqrt{p}} \right\} \dots \dots (38)$$

waardoor de reeksontwikkelingen (18), (19) en (20) overbodig zijn.

Verder hebben wij:

$$\mathfrak{E}(u) = \int_0^u \frac{1 - \sqrt{u}}{1-u} du = \int_0^u \frac{du}{1 + \sqrt{u}} = 2\sqrt{u} - 2l(1 + \sqrt{u}) \quad (39)$$

42. Beschouwen wij nu eerst het linkse kanaalvak, dan vinden wij hiervoor volgens (30):

$$\phi = \frac{x}{ck\sqrt{p}} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{\sqrt{p}} - 1 \right) l(1-p) - \frac{2}{k\sqrt{p}} l(1+\sqrt{p}) + \\ + \frac{2}{k} l(2) + b_1 e^{\frac{\pi}{c\sqrt{p}}} \cos \frac{y}{c\sqrt{p}} + b_2 e^{\frac{2\pi}{c\sqrt{p}}} \cos \frac{2y}{c\sqrt{p}} + \dots, \quad (40)$$

en volgens (31):

$$\psi = \frac{y}{ck\sqrt{p}} + \frac{\pi}{k} + b_1 e^{\frac{\pi}{c\sqrt{p}}} \sin \frac{y}{c\sqrt{p}} + b_2 e^{\frac{2\pi}{c\sqrt{p}}} \sin \frac{2y}{c\sqrt{p}} + \dots, \quad (41)$$

waarin wij ons gesubstitueerd moeten denken volgens (29):

$$b_n = \frac{(-1)^n}{kn!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \left( \frac{p(1-\sqrt{v})}{1-pv} - \frac{1}{1+\sqrt{v}} \right) (1+\sqrt{v})^{2n} \left( \frac{1-\sqrt{pv}}{1+\sqrt{pv}} \right)^{\frac{n}{\sqrt{p}}} \right]_{v=1} \dots (42)$$

Men zal vinden:

$$b_1 = \frac{-2}{k} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{p}}}; \\ b_2 = \frac{5-p}{k(1-p)} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{\frac{2}{\sqrt{p}}} \text{ enz.}$$

43. Voor het andere kanaalgedeelte hebben wij volgens (36):

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{1}{k} l(p) + \frac{1-\sqrt{p}}{k} l\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \\ + \frac{2\sqrt{p}}{k} l\left(1 + \sqrt{\frac{1}{p}}\right) - \frac{2}{k} l(2) + b'_1 e^{-\frac{\pi}{c}} \cos\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-\sqrt{p})\right\} + \\ + b'_2 e^{-\frac{2\pi}{c}} \cos\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-\sqrt{p})\right\} + \dots \quad (43)$$

en volgens (37):

$$\psi = \frac{y}{ck} + \frac{\pi\sqrt{p}}{k} + b'_1 e^{-\frac{\pi}{c}} \sin\left\{-\frac{y}{c} + \pi(1-\sqrt{p})\right\} + \\ + b'_2 e^{-\frac{2\pi}{c}} \sin\left\{-\frac{2y}{c} + 2\pi(1-\sqrt{p})\right\} + \dots, \quad (44),$$

waarin volgens (35):

$$= \frac{1}{kn!} \left[ \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ \left( \frac{1}{1+\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}-1}{u-p} \right) (1+\sqrt{u})^{2n} \left( \frac{\sqrt{u}-\sqrt{p}}{\sqrt{u}+\sqrt{p}} \right)^n \sqrt{p} \right\} \right]_{u=1} \quad (45).$$

Men zal vinden:

$$b'_1 = \frac{2}{k} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{\sqrt{p}};$$

$$b'_2 = \frac{5p-1}{k(1-p)} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{2\sqrt{p}}; \text{ enz.}$$

44. De formule door LAMB voor dit geval gegeven (door dezen aan C. NIVEN ontleend) wordt opgegeven geldig te zijn alleen voor dit laatste gedeelte van het kanaal. Wij hebben dus haar juistheid te toetsen aan formule (43). Daarbij hebben wij nog te bedenken, dat voor LAMB's formule een andere oorsprong werd gekozen, nl. het punt C, en een ander nulpunt van potentiaal. Dit laatste is nl. zoo gekozen, dat de gemiddelde potentiaal in de  $y$ -as 0 is.

Deze zelfde bijzonderheden in formule (43) invoerende, gaat zij over in:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{2}{k} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{\sqrt{p} - \frac{x}{c}} e^{-\frac{x}{c}} \cos \frac{y}{c} +$$

$$+ \frac{5p-1}{k(1-p)} \left( \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} \right)^{2\sqrt{p} - \frac{2x}{c}} e^{-\frac{2x}{c}} \cos \frac{2y}{c} + \dots$$

(voor  $b'_1$  en  $b'_2$  voer ik hier hun waarden in).

Drukken wij nu in LAMB's formule  $a$ ,  $b$  en  $U$  in  $c$ ,  $k$  en  $p$  uit, zoo gaat deze over in:

$$\phi = \frac{x}{ck} + \frac{2}{k\pi\sqrt{p}} \sin \{\pi(1-\sqrt{p})\} e^{-\frac{x}{c}} \cos \frac{y}{c} +$$

$$+ \frac{2}{4k\pi\sqrt{p}} \sin \{2\pi(1-\sqrt{p})\} e^{-\frac{2x}{c}} \cos \frac{2y}{c} + \dots$$

Het is echter duidelijk, dat de ontwikkeling van  $\phi$  volgens termen met  $e^{-\frac{nx}{c}} \cos \frac{ny}{c}$  (overeenkomende met de ontwikkeling van  $w - \frac{z}{ck}$  naar de opklimmende machten van  $e^{-\frac{x}{c}}$ ) niet op

meer dan één wijze kan geschieden, zoodat uit het niet overeenkomen der eerste coëfficiënten de onjuistheid van een der beide formules voldoende blijkt.

45. Ik zal echter nog nader doen zien, dat Lamb's formule niet juist kan zijn, en daarbij tevens den foutieven grondslag aanwijzen waarop zij vermoedelijk berust.

Ik bereken daartoe de stroomfunctie die bij de door Lamb gegeven snelheidspotential behoord. Daarvoor zal men vinden:

$$\psi = \frac{a-b}{a} Uy - \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi b}{a} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Wij zien nu, dat de lijnen  $CD_1$  en  $TD_2$  ook bij deze vloeistofbeweging naar behooren stroomlijnen zijn, terwijl ook de beweging in het oneindige tot een gelijkmatige beweging met snelheid  $\frac{a-b}{a} U$  nadert.

Stellen wij  $x=0$  om te onderzoeken wat de stroomfunctie wordt in punten der lijn  $TC^1)$ , dan vinden wij:

$$\psi = \frac{a-b}{a} Uy - \frac{2aU}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

Hierin blijkt de tweede term de ontwikkeling volgens een sinusreeks van Fourier voor te stellen van een periodieke functie met periode  $2a$ , die van  $-a$  tot  $-b$  wordt voorgesteld door:

$$F(y) = \frac{b}{a} U(a+y),$$

van  $-b$  tot  $+b$  door:

$$F(y) = -\frac{a-b}{a} Uy,$$

van  $b$  tot  $a$  door:

$$F(y) = -\frac{b}{a} U(a-y).$$

<sup>1)</sup> Ik blijf hier  $C$  als oorsprong,  $CD_1$  als  $x$ -as gebruiken. De onderstelling  $\alpha = 90^\circ$  maakt dat  $CT$  het negatieve deel der  $y$ -as wordt. Door letters met accenten,  $B'$ ,  $T'$  enz., zal ik de met  $B$ ,  $T$  enz. overeenkomstige punten in de andere kanaalhelft aanwijzen (hun symmetrische punten ten opzichte van  $CD_1$ ).

Wij hebben dus voor de stroomfunctie: van  $-a$  tot  $-o$ ,  
d. i. van T tot B:

$$\psi = (y + b)U,$$

van  $-b$  tot  $+b$ , d. i. van B tot B':

$$\psi = 0,$$

van  $b$  tot  $a$ , d. i. van B' tot T':

$$\psi = (y - b)U.$$

46. Hieruit zien wij, dat de stroomfunctie gelijkmatig toeneemt van T tot B, en van B tot C (naar behooren) constant blijft.

De onderstelling bij het opstellen der formule moet dus geweest zijn, dat alle elementen van de lijnen TB en T'B' evenredig aan hun lengte vloeistof zenden in het kanaalvak  $D_2TT'D_2'$ . Dat deze onderstelling foutief is, is uit het beloop der stroomlijnen links van BT onmiddellijk duidelijk. Uit den zin waarin deze gekromd zijn (§ 16) blijkt nl., dat de stroomfunctie in de nabijheid van T minder sterk zal toenemen dan dicht bij B, en dat dus b.v. de middenstroomlijn de lijn BT niet midden tusschen B en T maar dicht bij B zal snijden.

Slechts als wij aannemen, dat de beweging aan links niet alleen in het oneindige gelijkmatig is, maar ook tot aan de lijn BT toe gelijkmatig blijft, zou de stroomfunctie in de lijn BT de eigenschappen verkrijgen die wij haar volgens LAMB's formule moeten toekennen.

De opmerking in het vraagstuk voorkomende „the bridge<sup>1)</sup> being so broad that under it the fluid moves uniformly with velocity U” zou er misschien op wijzen, dat de opsteller daarvan werkelijk van deze zonderlinge onderstelling is uitgegaan.

---

<sup>1)</sup> De pier  $A_1BB'A_1'$  wordt hier n.l. opgevat als een pijler waarop een brug rust.

# INHOUD.

	Blz.
<b>V 6, 7.</b>	
<b>N. L. W. A. GRAVENAAR.</b> Stevin's Problemata Geometrica. ( <i>Vervolg</i> ) . . . . .	161.
<b>C 2 h, E 5</b>	
<b>W. KAPTEYN.</b> Sur la transformation d'une intégrale définie. . . . .	192.
Bibliographie . . . . .	194.
<b>HENRI BOSMANS.</b> Le traité des sinus de Michiel Coignet. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1901.	
<b>P. VAN GEER.</b> Grondslagen der synthetische meetkunde. Leiden, A. W. Sythoff, 1901.	
<b>ARTHUR VON OERTINGEN.</b> Elemente des geometrisch- perspektivischen Zeichnens. Leipzig, Wilhelm Engel- mann, 1901.	
<b>SALVATORE PINCHERLE.</b> Le operazioni distributive et le loro applicazioni all' analisi. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1901.	
<b>LUDWIG KIEPERT.</b> Grundriss der Differential- und In- tegral-Rechnung. Hannover, Helwingsche Verlags- buchhandlung, 1901.	
<b>CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ.</b> Rapports pré- sentés au Congrès International de Physique. Paris, Gauthier-Villars, 1900.	
<b>G. BIGOURDAN.</b> Le système métrique des poids et mesures. Paris, Gauthier-Villars, 1901.	
<b>HENRI BÉNARD.</b> Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Paris, Gauthier-Villars, 1901.	
<b>S 3 b a</b>	
<b>W. A. WYTHOFF.</b> Een geval van vloeistofbeweging zon- der werveling in twee afmetingen. . . . .	212.

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende  
gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie, Dr. J. C. KLUYVER  
te Leiden.

*Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA, Groningen.*



# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEEDE REEKS  
DEEL V  
DERDE STUK

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1901

2, 4, 5, 6, 7 en 3	osc. buiten	osc. bt.	// gel. en teg. ger.
2, 4, 5, 6, 7, 3 en 1	"	"	evenw. teg. ger.

Hierbij is ondersteld, dat  $R > r$  is, zoodat 6 niet kan worden afgesneden zonder 5, of 4 zonder 3.

9. Als de grootste der krukken oneindig lang wordt gedacht, dan is ook een der aangrenzende stangen oneindig lang, en men heeft dus  $R = \infty$  en  $d = \infty$ , of  $R = \infty$  en  $l = \infty$ . (Zie het genoemde Jaarverslag, Tabel III, en Fig. 12, Bijlage I). Elk van die beide gevallen kan behandeld worden zooals de gewone vierhoek in het voorgaande.

10.  $R = \infty$  en  $d = \infty$ . Wordt het eindige verschil van die stangen  $d'$  genoemd, dan worden

vergelijkingen (2) en (3) van § 1:  $d' = l + r$  (1),  
 " (5) en (7) " " :  $d' = l - r$  (2) of  $d' = r - l$  (3),  
 " (9) " " :  $d' = 0$  (4).

Verg. (11) blijft:  $l = r$  (5),  
 terwijl verg. (1), (4), (6), (8), (10), (12) en (13) vervallen, en daartegen de betrekkingen  $l = d'$  (6), en  $r = d'$  (7) optreden.

De nieuwe vergelijkingen (1) tot (7) moeten kunnen worden afgeleid op analoge wijze als de vergelijkingen van § 1.

Door projectie op  $d'$  vindt men:

$$l \cos \phi + r \cos \theta = d',$$

welke vergelijking voldoende is om den stand van het mechanisme te bepalen.

Noemt men weer  $\cos \phi = x$ ,  $\cos \theta = y$ , dan is

$$lx + ry = d'$$

een rechte lijn, waarvan elk punt overeenkomt met een stand van het mechanisme, en die van de positieve assen stukken afsnijdt, omgekeerd evenredig met  $l$  en  $r$ .

Voor verschillende verhoudingen van  $l$  en  $r$  verkrijgt men verschillende rechten, waarvan echter de punten, die buiten het vierkant vallen, dat door de lijnen  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  begrensd wordt, geen bestaansbare standen geven.

Elke lijn moet van de assen positieve stukken afsnijden om met een bestaansbaar mechanisme overeen te komen.

11. Doet men de stangen  $l$  en  $r$  van een mechanisme evenredig toe of afnemen, dan zal telkens als de lijn door een der hoekpunten van het vierkant gaat, een bijzondere betrekking tusschen  $l$ ,  $r$  en  $d'$  bestaan.

Voor een lijn gaande door het hoekpunt

$x$	$y$	heeft men de betrekking:
1	1	$d' = l + r$ (1)
1	- 1	$d' = l - r$ (2)
- 1	1	$d' = r - l$ (3)
- 1	- 1	$d' + r + l = 0$ ( $n$ ), (dus $d'=0, l=0, r=0$ ).

12. Schrijft men bij de hoekpunten van het vierkant de nummers van de betrekkingen, waartoe zij aanleiding geven, dan blijkt, dat (1) en ( $n$ ) tegenover elkander liggen, en dus evenzoo (2) en (3). De eerstgenoemden geven de betrekkingen aan, waarbij het mechanisme onbewegelijk is, de anderen die, waarbij  $l$ ,  $r$  en  $d'$  in één lijn kunnen liggen (wat overeenkomt met het samenvouwen zijn van den vierhoek  $l$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $d$ ).

13. Voor een lijn gaande door het punt:

$x$	$y$	heeft men de betrekking:
1	0	$l = d'$ (6),
0	1	$r = d'$ (7),

en voor een lijn, loodrecht op de lijn  $x = y$ :

$$l = r \text{ (5).}$$

14. Wordt een lijn zóo getrokken, dat ze alleen het hoekpunt (1) van het vierkant afsnijdt, dan kunnen  $x$  en  $y$ , d. w. z.  $\cos \phi$  en  $\cos \theta$ , wel  $+1$  worden, maar niet  $-1$ . Dus kan  $r$  wel op  $d'$  vallen, maar niet in het verlengde van  $d'$ , en kan  $l$  wel evenwijdig met  $d'$  worden in dezelfde richting, maar niet in tegengestelde richting.

Alzoo beweegt  $r$  over de steunpuntenlijn heen, en oscilleert aan de binnenzijde.

Bovendien kan  $\cos \phi = 0$ , of  $\cos \theta = 0$ , of kunnen beide tegelijk nul zijn (al naarmate de lijn binnen het vierkant een van beide, of beide assen snijdt), zoodat dan  $r \perp d'$ , of  $l \perp d'$  kan komen te staan, of wel achtereenvolgens beide  $\perp d'$  kunnen komen. Stang  $l$  is  $\perp d'$ , als  $l$  langs de leibaan valt.

15. Een lijn die de punten 1 en 2 afsnijdt geeft een mechanisme, waarbij  $\cos \phi$  de waarde  $+1$  of  $-1$  niet kan bereiken, terwijl  $\cos \theta$  zoowel  $+1$  als  $-1$  kan worden. Dus kan  $r$  geheel ronddraaien, terwijl  $l$  niet  $\parallel d'$  kan worden.

Een lijn, die de punten 1 en 3 afsnijdt geeft een mechanisme waarbij  $r$  over een boog oscilleert aan eene zijde van de steunpuntenlijn gelegen, terwijl  $l$  evenwijdig aan  $d'$  kan zijn, zoowel in dezelfde als in tegengestelde richting.

16. Voor de mechanismen, waarbij  $R = \infty$  en  $l = \infty$  gelden analoge beschouwingen. Noemt men het eindig verschil der stangen  $l'$ , dan heeft men de vergelijkingen:

$$l' = d + r \quad (1), \quad l' = d - r \quad (2), \quad l' = r - d \quad (3), \quad l' = 0 \quad (4);$$

$$d = r \quad (5), \quad d = l' \quad (6) \text{ en } r = l' \quad (7),$$

welke ook uit de vergelijking:

$$d \cos \phi + r \cos \theta = l', \text{ of } dx + ry = l',$$

met behulp van een vierkant zijn af te leiden.

17. Hoe langer het stuk is van een lijn, dat binnen het vierkant valt, des te meer standen kan het mechanisme achtereenvolgens innemen, en des te grooter is de *bewegelijkheid* van het stelsel. (Vergelijk het genoemde Jaarverslag.)

Men zou dus kunnen zeggen, dat lijnen van dezelfde lengte binnen het vierkant behooren bij mechanismen met gelijke bewegelijkheid. De lengte van het stuk zou als *maat* kunnen dienen voor de bewegelijkheid.

Bij den vierhoek met eindige stangen zou men de omtrekken van de kromlijnige doorsneden binnen den kubus moeten berekenen om twee mechanismen met elkander te kunnen vergelijken voor wat betreft den graad hunner bewegelijkheid.

ONTWIKKELINGSCOËFFICIËNTEN, DIE EENIGE OVEREENKOMST  
MET DE GETALLEN VAN BERNOULLI VERTOONEN,

DOOR

J. C. KLUYVER.

(Leiden.)

• \_\_\_\_\_

Wanneer de breuk

$$\frac{e^{\theta x} - 1}{e^x - 1}$$

naar opklimmende machten van  $x$  wordt ontwikkeld, is de coëfficiënt van  $x^k$  de  $k^{\text{de}}$  functie van Bernoulli

$$f_k(\theta) = \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^k}{k!} + \frac{B_1}{2!} \cdot \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{B_2}{4!} \cdot \frac{\theta^{k-3}}{(k-3)!} + \dots$$

Dientengevolge is

$$\frac{x e^{\theta x}}{e^x - 1} = 1 + \sum_1^{\infty} f'_k(\theta) x^k$$

en heeft men voor  $\theta = a : b$ ,  $x = by$ ,

$$\frac{b y e^{ay}}{e^{by} - 1} = 1 + \sum_1^{\infty} b^k f'_k \left( \frac{a}{b} \right) y^k = 1 + \sum_1^{\infty} C_k \left( \frac{a}{b} \right) \frac{y^k}{k!}.$$

Voor  $a = 0$ ,  $b = 1$  gaan de in deze ontwikkeling voorkomende getallencoëfficiënten  $C_k$  van even rangnummer, wat hunne volstrekte waarde betreft, over in de getallen van Bernoulli; wij willen nu aantoonen dat men, wanneer  $a$  en  $b$  voorstellen onderling ondeelbare geheele getallen, het gebroken gedeelte der getallen  $C_k$  op eenvoudige wijze kan bepalen; m. a. w., dat de stelling door Staudt en Clausen aangaande de getallen van Bernoulli bewezen, met eene kleine verandering voor de coëfficiënten  $C_k$  van kracht blijft.

Uit de definitie van  $C_k$ ,

$$C_k \left( \frac{a}{b} \right) = D_{y=0}^k \frac{by e^{ay}}{e^{by} - 1},$$

volgt

$$\begin{aligned} C_k \left( \frac{a}{b} \right) &= -D_{y=0}^k \frac{e^{ay}}{1 - e^{by}} \log [1 - (1 - e^{by})] = \\ &= \sum_{h=1}^{k=\infty} \frac{1}{h} D_{y=0}^k e^{ay} (1 - e^{by})^{h-1}. \end{aligned}$$

De reeks in het laatste lid herleidt zich blijkbaar tot de som der  $k + 1$  eerste termen. Men heeft

$$C_k \left( \frac{a}{b} \right) = \sum_{h=1}^{k+1} \frac{1}{h} D_{y=0}^k e^{ay} (1 - e^{by})^{h-1} = \sum_{h=1}^{k+1} \frac{1}{h} T_h$$

en  $C_k$  is voorgesteld als de som van  $k + 1$  gebroken getallen met de noemers 1, 2, 3, . . .  $k + 1$ .

In de eerste plaats kan men nu inzien, dat het getal  $\frac{1}{h} T_h$  geheel is, wanneer  $h$  deelbaar is. Stel  $h = \lambda + \mu$ , dan is  $\lambda + \mu < h - 1$  (uitgezonderd voor  $h = 4$ ) en men heeft

$$\frac{1}{h} T_h = \frac{1}{h} D_{y=0}^k (1 - e^{by})^\lambda \times (1 - e^{by})^\mu \times \{e^{ay} (1 - e^{by})^{h-1-\lambda-\mu}\}.$$

Om de termen in de uitkomst der differentiatie te vinden, die niet nul worden, wanneer men  $y = 0$  stelt, moeten de beide eerste factoren van het product elk minstens ééns gedifferentieerd geweest zijn, en deze bewerking levert onmiddellijk den factor  $\lambda\mu$ , welke den noemer  $h$  doet wegvallen.

Duidt men dus door  $A \equiv B$  aan, dat het verschil  $A - B$  een geheel getal is, dan volgt hieruit

$$\frac{1}{h} T_h \equiv 0 \quad (h \text{ deelbaar, } > 4).$$

De termen  $\frac{1}{2} T_2$  en  $\frac{1}{4} T_4$  worden afzonderlijk onderzocht. Uit

$$\frac{1}{2} T_2 = \frac{1}{2} \{a^2 - (a + b)^2\}$$

volgt dadelijk

$$\frac{1}{2} T_2 \equiv \frac{1}{2} b.$$

Voor  $h = 4$  heeft men

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_4 &= \frac{1}{4}\{a^4 - 3(a+b)^4 + 3(a+2b)^4 - (a+3b)^4\} \\ &\equiv \frac{1}{4}\{a^4 + (a+b)^4 - (a+2b)^4 - (a+3b)^4\} \\ &\equiv -\frac{1}{4}kb\{a^{k-1} + (a+b)^{k-1}\}.\end{aligned}$$

Derhalve is voor even  $a$  en oneven waarden van  $k$  en van  $b$

$$\frac{1}{4}T_4 \equiv \frac{1}{4},$$

in alle andere gevallen is de term geheel.

Het gezochte gebroken gedeelte van  $C_k$  komt dus in hoofdzaak voort uit die termen, wier ranggetal  $h$  een priemgetal is.

Wij stellen

$$k = \rho(h-1) + \alpha. \quad (\alpha < h-1).$$

Naast

$$\frac{1}{h}T_k = \frac{1}{h}D_{y=0}^k e^{ay}(1 - e^{by})^{k-1},$$

geldt ook blijkbaar

$$0 = \frac{1}{h}D_{y=0}^\alpha e^{ay}(1 - e^{by})^{k-1},$$

zoodat men door aftrekking vindt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}T_k &= \frac{1}{h}[a^\alpha\{a^{\rho(k-1)} - 1\} - (h-1)_1(a+b)^\alpha\{(a+b)^{\rho(k-1)} - 1\} + \\ &\quad + (h-1)_2(a+2b)^\alpha\{(a+2b)^{\rho(k-1)} - 1\} + \dots + \\ &\quad + (a + \overline{h-1}b)^\alpha\{(a + \overline{h-1}b)^{\rho(k-1)} - 1\}].\end{aligned}$$

Aangezien men voor  $h$  ondeelbaar heeft

$$\frac{(-1)^n}{h}(h-1)_n \equiv \frac{1}{h},$$

kan men eindelijk schrijven

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}T_k &\equiv \frac{1}{h}[a^\alpha\{a^{\rho(k-1)} - 1\} + (a+b)^\alpha\{(a+b)^{\rho(k-1)} - 1\} + \\ &\quad + (a+2b)^\alpha\{(a+2b)^{\rho(k-1)} - 1\} + \dots + (a + \overline{h-1}b)^\alpha\{(a + \overline{h-1}b)^{\rho(k-1)} - 1\}].\end{aligned}$$

Twee gevallen zijn nu te onderscheiden. Ten eerste nemen wij aan, dat in  $k = \rho(h-1) + \alpha$  de rest  $\alpha$  niet nul is, wanneer  $h-1$  op  $k$  wordt gedeeld. Thans is voor alle waarden van  $n$

$$(a + nb)^\alpha\{(a + nb)^{\rho(k-1)} - 1\}$$

door  $h$  deelbaar en er volgt

$$\frac{1}{h}T_k \equiv 0 \quad (h \text{ ondeelbaar} > 2, h-1 \text{ niet deelbaar op } k).$$

In de tweede plaats kan  $\alpha = 0$  en  $k = \rho(h-1)$  zijn. Als dan kan nog

$$\frac{1}{h}T_k \equiv \frac{1}{h} [\{a^{\rho(h-1)} - 1\} + \{(a+b)^{\rho(h-1)} - 1\} + \dots + \{(a + \overline{h-1}b)^{\rho(h-1)} - 1\}]$$

geheel zijn, zoo slechts  $h$  is een deeler van  $b$  en dus geen deeler van een der getallen  $a, a+b, a+2b, \dots$ . Is echter  $h$  niet deelbaar op  $b$ , dan bevat één en niet meer dan één der getallen  $a, a+b, a+2b, \dots$  den factor  $h$ . In dat geval heeft men dus

$$\frac{1}{h}T_k \equiv -\frac{1}{h}. \quad (h \text{ ondeelbaar} > 2, h-1 \text{ deelbaar op } k, \\ h \text{ niet deelbaar op } b).$$

Alles te zamen nemende is er ten aanzien van de ontwikkeling

$$\frac{by e^{ay}}{e^{by} - 1} = 1 + \sum_1^{\infty} C_k \left(\frac{a}{b}\right) \frac{y^k}{k!}$$

bewezen:

Wanneer  $a$  en  $b$  onderling ondeelbare geheele getallen voorstellen, zijn de coëfficiënten van oneven rangnummer  $C_{2m+1} \left(\frac{a}{b}\right)$  geheel ( $m > 0$ ). Het gebroken gedeelte van den coëfficiënt van even rangnummer  $C_{2m} \left(\frac{a}{b}\right)$  is gelijk aan

$$-\sum \frac{1}{h},$$

waarin  $h$  achtereenvolgens aangeeft de priemgetallen niet deelbaar op  $b$  en van dien aard, dat  $h-1$  deelbaar is op  $2m$ <sup>1)</sup>.

Eene uitzondering levert de eerste coëfficiënt. Men heeft

$$C_1 \left(\frac{a}{b}\right) \equiv \frac{1}{2}b.$$

<sup>1)</sup> Voor oneven  $b$  is 2 het eerste der bedoelde priemgetallen.



De voorafgaande stelling is blijkbaar eene uitbreiding van de bekende eigenschap der getallen van Bernoulli, die door Staudt en door Clausen werd gevonden. Voor  $a = 0$ ,  $b = 1$  wordt

$$C_{2m}(0) = (-1)^m - 1 B_m$$

en men vindt

$$B_m \equiv (-1)^m \left( \frac{1}{2} + \sum \frac{1}{h} \right),$$

waarbij de som nu betrekking heeft op alle priemgetallen  $> 2$ , die voldoen aan de voorwaarde, dat  $h - 1$  deelbaar is op  $2m$ .

Uit het voorafgaande zijn nog eenige verdere gevolgtrekkingen te maken. De beide vergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{by e^{ay}}{e^{by} - 1} &= 1 + \sum_1^{\infty} C_k \left( \frac{a}{b} \right) \frac{y^k}{k!}, \\ \frac{by e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} &= 1 + \sum_1^{\infty} C_k \left( \frac{a_1}{b} \right) \frac{y^k}{k!} \end{aligned}$$

geven na eenige herleiding

$$b \frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^{\infty} \frac{C_{k+1} \left( \frac{a}{b} \right) - C_{k+1} \left( \frac{a_1}{b} \right)}{(k+1)} \times \frac{y^k}{k!},$$

en daar volgens de bewezen stelling

$$C_{k+1} \left( \frac{a}{b} \right) \equiv C_{k+1} \left( \frac{a_1}{b} \right),$$

besluit men, dat in de ontwikkeling

$$b \frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^{\infty} g_k \frac{y^k}{k!}$$

de coëfficiënt  $g_k$  na vermenigvuldiging met  $k + 1$  een geheel getal moet opleveren. Ten aanzien dezer coëfficiënten  $g_k$  is nog iets anders te vinden. Men heeft

$$g_k = b D_{y=0}^k \frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = b D_{y=0}^k \frac{e^{a_1 y} + e^{(a_1+1)y} + \dots + e^{(a-1)y}}{1 + e^y + e^{2y} + \dots + e^{(b-1)y}}$$

en daaruit volgt

$$g_k = \frac{A_k}{b^k},$$

waarin  $A_k$  een geheel getal beteekent.

Op deze wijze is ten aanzien der ontwikkeling

$$b \frac{e^{ay} - e^{a_1 y}}{e^{by} - 1} = (a - a_1) + \sum_1^{\infty} g_k \frac{y^k}{k!},$$

waarin  $a$  en  $a_1$  elk voor zich ondeelbaar zijn met  $b$ , de volgende uitkomst verkregen:

De coëfficiënt  $g_k$  is geheel, wanneer  $k + 1$  ondeelbaar is met  $b$ . Voor de andere coëfficiënten bestaat het gebroken gedeelte uit breuken, wier noemers gemeenschappelijke deelen zijn van  $k + 1$  en van  $b^k$ .

Voor  $a_1 = 0$  kan men weder invoeren de functie van Bernoulli  $f_k \left( \frac{a}{b} \right)$ . Voor deze functie geldt dan

$$b^{k+1} (k + 1)! f_k \left( \frac{a}{b} \right) \equiv 0$$

en verder

$$b^{k+1} k! f_k \left( \frac{a}{b} \right) \equiv 0,$$

als  $b$  en  $k + 1$  onderling ondeelbaar zijn.

---

DE CENTRALE BEWEGING EN DE FUNCTIËN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

De verschillende gevallen van centrale beweging, die in deel XIII van dit tijdschrift behandeld zijn door middel van de elliptische functien van Legendre en Jacobi, laten zich natuurlijk ook uitwerken in functiën van Weierstrass.

Daar deze in haar soort de eenvoudigste functiën zijn, is het te voorzien, dat de toepassing er van aanmerkelijke voordeelen zal opleveren.

Inderdaad springt dit reeds in 't oog uit het voorbeeld, dat ik hier ga behandelen, en waarbij de beweegkracht standvastig wordt ondersteld, zoowel door den meer geleidelijken en daardoor meer gemakkelijken gang van het onderzoek, als door de meerdere doorzichtigheid der formules.

In deel XIII heb ik de differentiaalvergelijkingen van de centrale beweging gebracht onder den volgende vorm:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{(2U+h)r^2-C^2}} &= \lambda du \\ \pm dt &= \lambda du \\ \pm d\theta &= \lambda C \frac{du}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots (A)$$

U stelt hierin voor de krachtfunctie;  $\frac{1}{2}C$  de sectorsnelheid;  $\frac{1}{2}h$  de totale energie van het bewegend punt, welks massa gelijk één gesteld wordt;  $d\theta$  is de differentiaal van den hoek, door den voerstraal van het punt beschreven en  $dt$  de differentiaal van den tijd;  $r$  is de lengte van den voerstraal van 't punt;  $u$  de nieuwe veranderlijke, die in de plaats van  $r$  treedt en  $\lambda$  een nog te bepalen standvastige.

Is de kracht, die op het bewegende punt werkt,  $\alpha$ , dan is de krachtfunctie  $U = \alpha r$ , en de differentiaalvergelijkingen (A) gaan over in

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}} &= \lambda du \\ \pm dt &= \lambda du \\ \pm d\theta &= \lambda C \frac{du}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots (B)$$

Om deze te integreeren, stellen we

$$r = pu - \frac{h}{6\alpha};$$

dan gaat  $\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}$  over in

$$\sqrt{\frac{1}{2}\alpha(4p^3u - g_2pu - g_3)} = p'u\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}, \quad \frac{dr}{\sqrt{2\alpha r^3 + hr^2 - C^2}} \text{ in } \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}},$$

waarin

$$g_2 = 3\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^2,$$

$$g_3 = \frac{2C^2}{\alpha} - \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3$$

zijn. De discriminant  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  gaat hier over in

$$\Delta = 108 \frac{C^2}{\alpha^2} \left( \left( \frac{h}{3\alpha} \right)^3 - \frac{C^2}{\alpha} \right).$$

Stellen we verder  $\frac{h}{6\alpha} = pa$ , dan is  $p'^2a = -\frac{2C^2}{\alpha}$ .

Voor  $\alpha > 0$  en  $\Delta > 0$  is  $pa > 0$ ,  $p'^2a < 0$ , bijgevolg ligt  $pa$  tusschen  $e_1$  en  $e_2$ , de beide grootste wortels van  $p'^2u = 0$ . Derhalve moet in dit geval  $\frac{h}{6\alpha} = p(\omega + ia)$  gesteld worden.

Is  $\alpha > 0$  en  $\Delta < 0$ , dan is  $g_3 > 0$ , dus ook  $e_2$ , de eenige bestaanbare wortel van  $p'^2u = 0$ , positief. Omdat  $p'^2a$  negatief is, moet  $a$  in  $p(a)$  den vorm  $ib$  aannemen.

We hebben dus de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\alpha > 0, \Delta > 0.$$

$$\alpha > 0, \Delta < 0.$$

$$\left. \begin{aligned} r &= pu - p(\omega + ia) \\ \sqrt{\frac{1}{2}\alpha} dt &= (pu - p(\omega + ia)) du \\ di\theta &= \frac{p'(\omega + ia) du}{pu - p(\omega + ia)} \end{aligned} \right\} (C)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= pu - pia \\ \sqrt{\frac{1}{2}\alpha} dt &= (pu - pia) du \\ di\theta &= \frac{p'ia du}{pu - pia} \end{aligned} \right\} (D)$$

In 't geval (C) heeft  $r$  de minimum-waarde  $p\omega - p(\omega + ia)$  of  $e_1 - \frac{h}{6\alpha}$  voor  $u = \omega$ ; dit is dus de perihelium-afstand.

Worden  $t$  en  $\theta$  gerekend van het oogenblik, dat het punt het perihelium van de baan passeert, dan zijn de integraalvergelijkingen van (C):

$$\alpha > 0, \Delta > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} r &= pu - p(\omega + ia) \\ \sqrt{\frac{1}{2}\alpha} t &= \zeta u - \zeta \omega + (u - \omega) p(\omega + ia) \\ i\theta &= \lg \frac{\sigma(u + \omega + ia)}{\sigma(u - \omega - ia)} \cdot \frac{\sigma(-ia)}{\sigma(2\omega + ia)} - 2(u - \omega) \zeta(\omega + ia) \end{aligned} \right\} (E)$$

Voor  $u = 0$  worden  $r$  en  $t$  beiden oneindig groot, terwijl dan  $\theta$  gegeven wordt door  $\theta i = \lg \frac{\sigma(ia)}{\sigma(2\omega + ia)} + 2\omega \zeta(\omega + ia) = i \left( (2n + 1)\pi - 2a\eta - 2\omega \bar{\zeta}a + \omega \frac{\bar{p}'a}{e_1 + \bar{p}a} \right).$

De baan heeft dus twee asymptoten, welke door het centrum gaan en een hoek  $2\Theta = 4a\eta + 4\omega \bar{\zeta}a - 2\omega \frac{\bar{p}'a}{e_1 + \bar{p}a}$  insluiten.

In 't geval (D) bereikt  $r$  de minimum-waarde  $p\omega_2 - pia$  of  $e_2 - \frac{h}{6\alpha}$  voor  $u = \omega_2$ . Worden ook hier  $t$  en  $\theta$  gerekend van het oogenblik, dat het punt het perihelium passeert, dan zijn de integraalvergelijkingen van (D):

$$\alpha > 0, \Delta < 0$$

$$\left. \begin{aligned} r &= pu - pia \\ \sqrt{\frac{1}{2}\alpha} t &= \zeta u - \zeta \omega_2 + (u - \omega_2) pia \\ i\theta &= \lg \frac{\sigma(u + ia)}{\sigma(u - ia)} \cdot \frac{\sigma(\omega_2 - ia)}{\sigma(\omega_2 + ia)} - 2(u - \omega_2) \zeta ia \end{aligned} \right\} (F)$$

Voor  $u=0$  worden  $r$  en  $t$  beiden oneindig groot, terwijl dan  $\theta$  gevonden wordt uit

$$i\theta = \lg -\frac{\sigma(\omega_2 - ia)}{\sigma(\omega_2 + ia)} + 2\omega_2 \zeta ia = i((2n+1)\pi - 2\eta_2 a - 2\omega_2 \bar{\zeta} a).$$

De baan heeft dus twee asymptoten, welke door het centrum gaan en een hoek  $2\Theta = 4a\eta_2 + 4\omega_2 \bar{\zeta} a$  insluiten.

Het bijzondere geval  $\alpha > 0$ ,  $\Delta = 0$ .

$$\text{Dan is } \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3 = \frac{C^2}{\alpha}; \quad g_2 = 3\left(\frac{h}{3\alpha}\right)^2; \quad g_3 = \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3 = e_1^3;$$

$$p u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{1}{3}\right); \quad p \omega = e_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{h}{3\alpha};$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = -\frac{h}{6\alpha};$$

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u; \quad \zeta \omega = \eta = \frac{\pi^2}{12\omega};$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6} \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega};$$

$$p(\omega + ia) = \frac{h}{6\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia)} - \frac{1}{3}\right);$$

dus

$$\sin^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia) = \frac{3}{2}; \quad \cos^2 \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia) = -\frac{1}{2}.$$

Hierdoor gaan de integraalvergelijkingen (E) over in

$$r = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\alpha} t = \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{\pi^2}{6\omega^2} (u - \omega)$$

$$i\theta = \lg \frac{\sin \frac{\pi}{2\omega}(u + \omega + ia)}{\sin \frac{\pi}{2\omega}(u - \omega - ia)} - 2(u - \omega) \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi}{2\omega}(\omega + ia)$$

$$\begin{aligned}
&= \lg - \frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi u}{2\omega} + i \sin \frac{\pi u}{2\omega}}{\sqrt{3} \cos \frac{\pi u}{2\omega} - i \sin \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{\pi}{\omega} (u - \omega) \frac{i}{\sqrt{3}} \\
&= i \left( (2n + 1)\pi - \frac{\frac{\pi u}{\omega} - \pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{bg} \operatorname{tg} \frac{\sin \frac{\pi u}{\omega}}{1 + 2 \cos \frac{\pi u}{\omega}} \sqrt{3} \right).
\end{aligned}$$

De hoek tusschen de asymptoten is dus

$$2\Theta = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \pi.$$

Deze uitkomst moet ook gevonden worden door rechtstreekse integratie van de differentiaalvergelijkingen, welke in dit geval zijn, omdat  $2ar^3 + hr^2 - C^2$  hier overgaat in  $2a \left(r + \frac{h}{3a}\right)^2 \left(r - \frac{h}{6a}\right)$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{\sqrt{2a} \left(r + \frac{h}{6a}\right) \sqrt{r - \frac{h}{6a}}} &= \lambda du \\
dt &= \lambda r du \\
d\theta &= \lambda C \frac{du}{r}.
\end{aligned}$$

Gaan we nu over tot de beschouwing van  $a < 0$ , dus tot het geval, dat de kracht aantrekkend is.

Is  $a < 0$ , dan moet  $h > 0$  en  $\Delta > 0$  zijn.

De differentiaalvergelijkingen (C) schrijven we nu als volgt:

$$\begin{aligned}
&a < 0. \\
&\left. \begin{aligned} r &= pu - \frac{h}{6a} \\ \sqrt{-\frac{1}{2}a} dt &= \left(pu - \frac{h}{6a}\right) diu \\ \frac{1}{C} \sqrt{-\frac{1}{2}a} d\theta &= \frac{diu}{pu - \frac{h}{6a}} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat  $u$  van den vorm  $iu + \omega$  standvastige moet genomen worden, en wel van den vorm  $iu + \omega$ , omdat  $r$  positief moet blijven. Stellen we weer  $\frac{h}{6a} = pa$ , dus  $p^2a = \frac{-2C^2}{a}$ , dan is  $pa < 0$  en  $p^2a > 0$ , bijgevolg zal  $p$  tusschen de kleinste wortels  $e_2$  en  $e_3$  van  $p^2u = 0$  gelegen zijn en  $a$  van den vorm  $\omega' + a$  wezen. De differentiaalvergelijkingen gaan dan over in

$$\left. \begin{aligned} r &= p(iu + \omega) - p(\omega' + a) \\ \sqrt{-\frac{1}{2}a} dt &= (p(iu + \omega) - p(\omega' + a)) du \\ d\theta &= \frac{-p'(\omega' + a) du}{p(iu + \omega) - p(\omega' + a)} \end{aligned} \right\}$$

$r$  verkrijgt voor  $iu = 0$  de maximum-waarde

$$p\omega - p(\omega' + a) = e_1 - \frac{h}{6a}$$

en voor  $iu = \omega'$  de minimum-waarde

$$p(\omega + \omega') - p(\omega' + a) = e_2 - \frac{h}{6a}.$$

De eerste is dus de aphelium-afstand, de tweede de perihelium-afstand.

Worden  $t$  en  $\theta$  gerekend van het oogenblik, dat een aphelium wordt gepasseerd, dan zijn de integraalvergelijkingen:

$$a < 0.$$

$$\begin{aligned} r &= p(iu + \omega) - p(\omega' + a) \\ \sqrt{-\frac{1}{2}a} t &= i\zeta(\omega + iu) + up(\omega' + a) - i\eta = \bar{\zeta}u + up(\omega' + a) + \frac{1}{2} \frac{\bar{p}'u}{\bar{p}u - \bar{p}i\omega} \\ \theta &= \frac{1}{i} \lg \frac{\sigma(\omega + iu + \omega' + a)}{\sigma(\omega + iu - \omega' - a)} \cdot \frac{\sigma(\omega - \omega' - a)}{\sigma(\omega + \omega' + a)} - 2u\zeta(\omega' + a). \end{aligned}$$

Voor  $iu = \omega'$  wordt het volgende perihelium bereikt; daartoe is noodig de tijd  $\tau$ , gegeven door

$$\sqrt{-\frac{1}{2}a}\tau = i\eta'' + \frac{\omega'}{i} p(\omega' + a) - i\eta = i\eta' + \frac{\omega'}{i} p(\omega' + a),$$

terwijl de voerstraal daarbij een hoek  $\Theta$  heeft beschreven, welke gegeven wordt door



$$\Theta = \frac{1}{i} \lg \frac{\sigma(\omega + 2\omega' + a)}{\sigma(\omega - a)} \cdot \frac{\sigma(\omega - \omega' - a)}{\sigma(\omega + \omega' + a)} - 2 \frac{\omega'}{i} \zeta(\omega' + a),$$

$$= 2a \frac{\eta'}{i} - 2 \frac{\omega'}{i} \left( \zeta a - \frac{1}{2} \frac{p'a}{e_2 - pa} \right).$$

De baan is dus geregeld gegolfd, de afstand van 't perihelium is  $e_2 - \frac{h}{6a}$ , die van het aphelium  $e_1 - \frac{h}{6a}$ .

Het bijzondere geval  $\Delta = 0$ .

Dan is  $g_3 = \frac{C^2}{a} < 0$ , dus  $e_2 > 0$ , bijgevolg  $e_2 = e_1 = -\frac{1}{2}e_3$ .

De perihelium- en de aphelium-afstanden worden onderling gelijk, de baan is dus een cirkel.

Dit volgt ook uit de differentiaalvergelijkingen (B), welke in dit geval overgaan in

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{\sqrt{-2a} \left( r + \frac{h}{3a} \right) \sqrt{\frac{h}{6a} - r}} &= \lambda du \\ dt &= \lambda r du \\ d\theta &= \lambda C \frac{du}{r} \end{aligned} \right\}$$

Omdat toch  $\frac{h}{6a} - r$  negatief is, kan aan de eerste vergelijking niet anders voldaan worden dan door  $r = -\frac{h}{3a} =$  standvastig.

OVER HET KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD VAN MEER  
DAN TWEE GETALLEN,

DOOR

E. D. J. DE JONGH JR.  
(Kampen.)

---

1. Bekend is de eigenschap, dat het K. G. V. van 3 getallen gelijk is aan het gedurig product van die getallen, vermenigvuldigd met hun G. G. D. en gedeeld door het gedurig product van de grootste gemeene deelen der getallen, 2 aan 2 genomen. — Deze eigenschap kan gemakkelijk bewezen worden.

Ook is bekend de eigenschap, dat het K. G. V. van 4 getallen gelijk is aan het gedurig product der getallen, vermenigvuldigd met het gedurig product van de grootste gemeene deelen der getallen, 3 aan 3 genomen en gedeeld door den G. G. D. der getallen, vermenigvuldigd met het gedurig product van de grootste gemeene deelen der getallen, 2 aan 2 genomen. — Het bewijs voor deze eigenschap is eenigszins ingewikkelder.

2. Nu doen deze eigenschappen de vraag rijzen, of men op soortgelijke wijze voort kan gaan en het vermoeden is niet ongewettigd, dat op dergelijke manier ook het K. G. V. bepaald kan worden van 5 en meer getallen. Het onderzoek hiernaar wordt echter — als men den gewonen elementairen weg inslaat, die voor 3 en 4 getallen gebruikelijk is — reeds voor 5 getallen al te ingewikkeld en voor meer getallen geheel onuitvoerbaar; het is daarom, dat ik getracht heb het bestaan van soortgelijke eigenschap algemeen aan te toonen, d. w. z. een algemeene formule te vinden om van  $n$  getallen het K. G. V. te bepalen, waarvan de formules, die de bovengenoemde eigenschappen voor 3 en 4 getallen uitdrukken, slechts bijzondere gevallen zijn.

Inderdaad is het mij mogen gelukken, de navolgende eigenschap te vinden en de waarheid daarvan aan te toonen:

„Het K. G. V. van  $n$  getallen is gelijk aan het gedurig product dezer getallen, maal het gedurig product van de grootste gemeene deelsers van de getallen 3 aan 3, 5 aan 5 enz. genomen en gedeeld door het gedurig product van de grootste gemeene deelsers van de getallen 2 aan 2, 4 aan 4, 6 aan 6 enz.”

### 3. Laat gegeven zijn de $n$ getallen

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n.$$

Stellen we den G. G. D. van  $a_i$  en  $a_k$  voor door  $g_{ik}$ , verder het gedurig product van de grootste gemeene deelsers van de getallen,  $k$  aan  $k$  genomen, door  $G_n^k$ , het K. G. V. van de eerste  $n - 1$  getallen door  $K_{n-1}$  en dat van alle  $n$  getallen door  $K_n$ , dan wordt bovenstaande eigenschap uitgedrukt door de formule

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (G_n^3 G_n^5 G_n^7 \dots G_n^{n-1})}{G_n^2 G_n^4 G_n^6 \dots G_n^n}$$

voor 't geval  $n$  even is en door

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (G_n^3 G_n^5 G_n^7 \dots G_n^n)}{G_n^2 G_n^4 G_n^6 \dots G_n^{n-1}}$$

voor 't geval  $n$  oneven is.

### 4. Alvorens de waarheid van deze formules aan te toonen, zullen we eerst een hulpeigenschap bewijzen, nl.

„De G. G. D. van het K. G. V. van een groep van  $n - 1$  getallen en een ander getal is gelijk aan het K. G. V. van de grootste gemeene deelsers van elk der  $n - 1$  getallen van de groep en het andere getal.”

Of, met inachtneming van de aangenomen notaties:

„De G. G. D. van  $K_{n-1}$  en  $a_n$  is gelijk aan het K. G. V. van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots g_{(n-1)n}$ .”

Bewijs.  $K_{n-1}$  is deelbaar door elk der getallen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  en is dus ook deelbaar door  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$ .  $a_n$  is ook deelbaar door  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$ .

En daar een gemeene deeler van twee getallen deelbaar is op hun G. G. D., is de G. G. D. van  $K_{n-1}$  en  $a_n$  een gemeen veelvoud van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$ . Blijft nog over te bewijzen, dat deze G. G. D. van  $K_{n-1}$  en  $a_n$  het *kleinste* gemeene veelvoud is van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$ .

Stellen we daartoe:

$$a_1 = g_{1n} \times a_1; a_2 = g_{2n} \times a_2; \dots a_{n-1} = g_{(n-1)n} \times a_{n-1},$$

dan kunnen we (omdat  $K_{n-1}$  en  $a_n$  beide deelbaar zijn door  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$ ) zeggen:

$$K_{n-1} = (\text{K. G. V. van } g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n})$$

vermenigvuldigd met een zekeren factor  $\beta$

en

$$a_n = (\text{K. G. V. van } g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n})$$

vermenigvuldigd met een zekeren factor  $a_n$ .

Of, als we het K. G. V. van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$  voorstellen door  $K_{(n-1)}$ :

$$K_{n-1} = K_{(n-1)} \times \beta$$

en

$$a_n = K_{(n-1)} \times a_n.$$

Omdat nu  $K_{(n-1)}$  alle factoren van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, \dots, g_{(n-1)n}$  bevat maar geen andere, bevat  $\beta$  enkel factoren, die voorkomen in  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  en geen andere.

$a_n$  daarentegen bezit geen enkelen factor, die voorkomt in  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ , want indien b.v.  $a_k$  en  $a_n$  een factor gemeen hadden, zou de G. G. D. van  $a_k$  en  $a_n$  *niet*  $g_{kn}$  zijn, maar  $g_{kn}$  vermenigvuldigd met dien factor.

$\beta$  en  $a_n$  zijn dus onderling ondeelbaar en hieruit volgt de waarheid van de hulpeigenschap:

*De G. G. D. van  $K_{n-1}$  en  $a_n$  is  $K_{(n-1)}$ .*

5. Na deze uitweiding keeren wij terug tot onze eigenschap, in § 2 genoemd en in § 3 geformuleerd, en gaan nu aantoonen, dat als deze eigenschap waar is voor  $n - 1$  getallen, zij ook doorgaat voor  $n$  getallen.

Nemen we nu voor een oogenblik aan, dat de waarheid van onze eigenschap bewezen is voor de getallen

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1},$$

dat dus bewezen is

$$K_{n-1} = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}) \times (G_{n-1}^3 G_{n-1}^5 G_{n-1}^7 \dots G_{n-1}^{n-1})}{G_{n-1}^3 G_{n-1}^4 G_{n-1}^6 \dots G_{n-1}^{n-2}},$$

waarbij — zonder dat dit aan de algemeenheid te kort doet — *n even* ondersteld is, en waarbij voor nu en 't vervolg wel in 't oog gehouden moet worden, dat even als bij  $K_{n-1}$  ook bij  $G_{n-1}^k$  de aanwijzer  $n-1$  *niet* ziet op  $n-1$  *willekeurige* getallen uit de gegevene, maar wel degelijk op de *eerste*  $n-1$  getallen — nemen we nu, zeg ik, deze formule als bewezen aan, dan krijgen we  $K_n$  door het K. G. V. te zoeken van  $K_{n-1}$  en  $a_n$  en dit is gelijk aan

$K_{n-1} \times a_n$  gedeeld door den G. G. D. van  $K_{n-1}$  en  $a_n$ .

Volgens de hulpeigenschap van § 4 is echter deze G. G. D. gelijk aan  $K_{(n-1)}$ , zoodat we hebben:

$$K_n = \frac{K_{n-1} \times a_n}{K_{(n-1)}}.$$

Indien de formule voor  $K_{n-1}$  waar is, hebben we analoog (indien we door  $G_{n-1}^{(k)}$  voorstellen het gedurig product van de grootste gemeene deelen van  $g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} \dots g_{(n-1)n}$ , *k* aan *k* genomen)

$$K_{(n-1)} = \frac{(g_{1n} g_{2n} g_{3n} \dots g_{(n-1)n}) \times (G_{n-1}^{(3)} G_{n-1}^{(5)} G_{n-1}^{(7)} \dots G_{n-1}^{(n-1)})}{G_{n-1}^{(3)} G_{n-1}^{(4)} G_{n-1}^{(6)} \dots G_{n-1}^{(n-2)}}.$$

De formule

$$K_n = \frac{K_{n-1} \times a_n}{K_{(n-1)}}$$

gaat dan over in:

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (G_{n-1}^3 G_{n-1}^5 G_{n-1}^7 \dots G_{n-1}^{n-1})}{G_{n-1}^3 G_{n-1}^4 G_{n-1}^6 \dots G_{n-1}^{n-2}} \times \\ \times \frac{G_{n-1}^{(3)} G_{n-1}^{(4)} G_{n-1}^{(6)} \dots G_{n-1}^{(n-2)}}{(g_{1n} g_{2n} g_{3n} \dots g_{(n-1)n}) \times (G_{n-1}^{(3)} G_{n-1}^{(5)} \dots G_{n-1}^{(n-3)} G_{n-1}^{(n-1)})}.$$

6. Laat ons trachten deze formule te herleiden.

De G. G. D. van de  $m$  getallen

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_p \text{ en } a_n$$

is dezelfde als de G. G. D. van de  $m - 1$  getallen

$$g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} \dots g_{pn},$$

m. a. w. de G. G. D. van  $m$  getallen, waaronder  $a_n$  voorkomt, is dezelfde als de G. G. D. van  $m - 1$  getallen, die — elk op zijn beurt — weer de grootste gemeene deelen zijn van  $a_n$  en elk der andere getallen.

De grootste gemeene deelen van de getallen

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n,$$

3 aan 3, 4 aan 4, 5 aan 5, . . . .  $m$  aan  $m$  genomen, krijgt men dus door bij de grootste gemeene deelen van

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1},$$

3 aan 3, 4 aan 4, 5 aan 5, . . . .  $m$  aan  $m$  genomen, te voegen de grootste gemeene deelen van

$$g_{1n}, g_{2n}, g_{3n} \dots g_{(n-1)n},$$

2 aan 2, 3 aan 3, 4 aan 4, . . . .  $m - 1$  aan  $m - 1$  genomen, dus ook:

$$G_n^m = G_{n-1}^m \times G_{n-1}^{(m-1)}.$$

Schrijven we nu de in § 5 voor  $K_n$  gevonden formule als

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (G_{n-1}^3 G_{n-1}^{(3)}) \times (G_{n-1}^4 G_{n-1}^{(4)}) \times \dots \times (G_{n-1}^{n-2} G_{n-1}^{(n-2)})}{(G_{n-1}^2 \times g_{1n} g_{2n} \dots g_{(n-1)n}) \times (G_{n-1}^4 G_{n-1}^{(3)}) \times (G_{n-1}^6 G_{n-1}^{(5)}) \times \dots \times (G_{n-1}^{n-2} G_{n-1}^{(n-3)}) G_{n-1}^{(n-1)}}.$$

passen we hierop de zoeven genoemde formule voor  $G_n^m$  toe en houden we tevens in het oog, dat

$$G_{n-1}^{(n-1)} = G_n^m,$$

dan krijgen we:

$$K_n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \times (G_n^3 G_n^4 G_n^5 \dots G_n^{n-1})}{G_n^2 G_n^4 G_n^6 \dots G_n^n}.$$

En hiermede is bewezen, dat als onze eigenschap waar is voor  $n - 1$  getallen, zij ook doorgaat voor  $n$  getallen.

Nu weten we, dat ze geldt voor 3 getallen; door het vorenstaande betoog is thans uitgemaakt, dat ze ook geldt

voor 4, 5 . . . . , in één woord voor een willekeurig aantal getallen.

Bovenstaande eigenschap uit de Rekenkunde, waarvan — voorzoover ik weet — nergens melding wordt gemaakt en die dus vóór dezen niet bekend schijnt geweest te zijn, is misschien belangrijk genoeg om haar niet der vergetelheid prijs te geven; vandaar, dat ik mij veroorloof haar langs dezen weg in wijderen kring bekend te maken.

---

DE OPVULLING DER RUIMTE DOOR REGELMATIGE EN HALF-  
REGELMATIGE LICHAMEN.

DOOR

F. J. VAES.

(Rotterdam.)

1. Men denke de ruimte opgevuld door kuben van gelijke afmeting, welker zijvlakken elkander twee aan twee volkomen bedekken, en beschouwe *acht* van zulke kuben, die één hoekpunt gemeen hebben, en die dus een kubus vullen van de dubbele afmeting.

Als nabij het gemeenschappelijk hoekpunt elk van deze acht wordt afgeknot door een plat vlak, dat van de ribben even-groote stukken afsnijdt, dan sluiten de acht zijvlakken een regelmatig achthoek in.

Bij elk hoekpunt van elk der kuben kan men die afknotting volvoerd denken.

Denkt men de afgesneden stukken van nul af grooter wordend, dan komt er een oogenblik, dat elk der kuben is overgegaan in het half-regelmatige lichaam  $\frac{6}{n}$ ,  $8^1$ ), dat dus de ruimte opvult met behulp van regelmatige achthoeken.

Daar van elken kubus acht stukjes afgaan, die samen een achthoek kunnen vormen, zijn er evenveel achthoeken aanwezig als lichamen  $\frac{6}{n}$ ,  $8$ .

2. Groeien de afgesneden stukken aan tot de helft der ribbe van den kubus, dan zijn andere half-regelmatige lichamen ont-

---

<sup>1)</sup> Deze notatie is ingevoerd in de Congreslezing van April 1899. Zij betekent dat de kubus (6-vlak) wordt afgeknot door een regelmatig 8-vlak op  $\frac{1}{n}$  der ribben, waarbij  $n$  niet gelijk 2 of 3 is, maar een onmeetbaar getal dat berekend moet worden.



staan, namelijk  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  (waarvan de hoekpunten de middelpunten zijn van de zijvlakken van een ruitentwaalfvlak), welke dus eveneens met behulp van een gelijk aantal achvlakken de ruimte opvullen. Telkens twee achvlakken hebben een hoekpunt gemeen, terwijl de hoofd diagonalen, door dat hoekpunt gaande, in elkanders verlengde liggen.

3. Bij verder aangroeien van de afgesneden stukken, dringen twee zulke achvlakken in elkander, zoodat elk ervan wordt afgeknot tot een veertienvlakkig lichaam, begrensd door vierkanten en (niet-regelmatige) zeshoeken, terwijl ook elk der kubus overgaat in een veertienvlakkig lichaam, begrensd door vierkanten en (niet-regelmatige) zeshoeken.

Een zijde van een op een afgeknot achvlak gelegen vierkant is ook zijde van een op een afgeknotten kubus gelegen zeshoek, en omgekeerd, zoodat als de op een achvlak gelegen vierkanten, door aangroeïing der van de ribben van den kubus afgesneden stukken, evengroot zijn geworden als die van den kubus, de zeshoeken op de achvlakken zoowel als die van de kubus gelijke zijden zullen hebben; en dus (wegens de symmetrie) regelmatig zullen zijn.

Blijkbaar zijn nu de veertienvlakkige lichamen 6,  $\frac{2}{3}$  aanwezig, waarmede Lord Kelvin de ruimte opvulde (*Nature*, April 1894), en waarvan het aantal dus gelijk is aan tweemaal het oorspronkelijk aantal kubus. Daaruit volgt onmiddellijk, dat de inhoud van zulk een lichaam de helft moet zijn van den kubus, waarin het geplaatst is <sup>1)</sup>.

4. Door verdere aangroeïing van de afgesneden stukken kan men elk der vierkanten op de kubus doen inkrimpen tot een punt, zoodat van elken kubus alleen het ingeschreven achvlak is overgebleven, doch dan zijn de veertienvlakkige lichamen, die uit de achvlakken ontstaan waren, aangegroeid tot de halfregelmatige  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ .

5. Door nog verdere aangroeïing ontstaan weer (kleinere) achvlakken met de halfregelmatige lichamen  $\frac{6}{11}$ , 8, en als men

---

<sup>1)</sup> Men zie de Verslagen der Kon. Acad. van Wet. 1894/95 deel III en Nieuw Archief, 2<sup>e</sup> reeks, 4<sup>e</sup> deel,

de achtvlakken tot een punt laat afnemen, verkrijgt men weer een opvulling met kuben, zoodanig dat de hoekpunten vallen in de middelpunten der oorspronkelijke, en omgekeerd.

Men heeft dus achtereenvolgens ruimte-opvulling door :

- I.  $p$  kuben.
- II.  $p$  lichamen  $\frac{6}{n}$ ,  $8 + p$  achtvlakken.
- III.  $p$  lichamen  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{8}{3} + p$  achtvlakken.
- IV.  $2p$  lichamen  $6$ ,  $\frac{8}{3}$ .
- V.  $p$  achtvlakken +  $p$  lichamen  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$ .
- VI.  $p$  achtvlakken +  $p$  lichamen  $\frac{6}{n}$ ,  $8$ .
- VII.  $p$  kuben.

6. Uit de in No. 2 aangegeven opvulling van achtvlakken met lichamen  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$  is onmiddellijk een andere opvulling af te leiden.

Als men namelijk de hoekpunten van een der laatstgenoemde lichamen met het middelpunt ervan verbindt, en door twee opeenvolgende verbindingslijnen vlakken brengt, dan verdeelen deze het lichaam in acht viervlakken en zes vierzijdige pyramiden, waarvan alle ribben even groot zijn (namelijk gelijk aan de halve oppervlak-diagonaal van den oorspronkelijken kubus), zoodat de viervlakken regelmatig zijn, en telkens twee vierzijdige pyramiden van twee aan elkander sluitende lichamen  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$  te samen een regelmatig achtvlak vormen.

Blijkbaar is de ruimte dus op te vullen met achtvlakken en viervlakken. Daar eerst  $p$  lichamen  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$  aanwezig waren en  $p$  achtvlakken, en elk der eerstgenoemde lichamen acht viervlakken levert, en zes halve, dus drie geheele, achtvlakken, zullen er aanwezig zijn  $4p$  achtvlakken en  $8p$  viervlakken.

7. Ten einde de voorstelling te verduidelijken, denke men een plat vlak (gemakshalve horizontaal), opgevuld met vierkanten van dezelfde afmeting, zoodanig dat de ribben doorlopende lijnen vormen, en beschouwe de zijden dier vierkanten als ribben van regelmatige achtvlakken, dan hebben dus telkens vier van die achtvlakken één hoekpunt gemeen, terwijl telkens twee hoofddiagonalen in elkanders verlengde vallen.

Men zal dan een vijfde en een zesde achthoekig vlak zóó kunnen plaatsen, dat een hoekpunt samenvalt met het gemeenschappelijke hoekpunt der eerste vier, terwijl zij telkens een ribbe gemeen hebben met een van die vier.

De voorstelling is misschien nog eenvoudiger, als men zich een aantal achthoekig vlakken naast elkander geplaatst denkt als aangegeven, dus zoodanig dat een plat vlak opgevuld wordt door vierkanten, gevormd door telkens vier der ribben van de achthoekig vlakken, en nu een tweede dergelijk samenstel op het eerste legt, zoodanig dat de hoekpunten der achthoekig vlakken, die zich onder het tweede horizontale vlak bevinden, samenvallen met de hoekpunten der vierkanten in het eerste vlak, en omgekeerd de hoekpunten van de achthoekig vlakken boven het eerste vlak, komen in de hoekpunten der vierkanten van het tweede vlak. Het valt onmiddellijk in het oog, dat tusschen twee achthoekig vlakken van het eerste samenstel, en twee van het tweede, welke twee aan twee een ribbe gemeen hebben, een ruimte overblijft, begrensd door één zijvlak van elk der vier achthoekig vlakken; en dus blijkbaar van den vorm van een regelmatig viervlak.

#### 8. De opvulling der ruimte door achthoekig vlakken en viervlakken

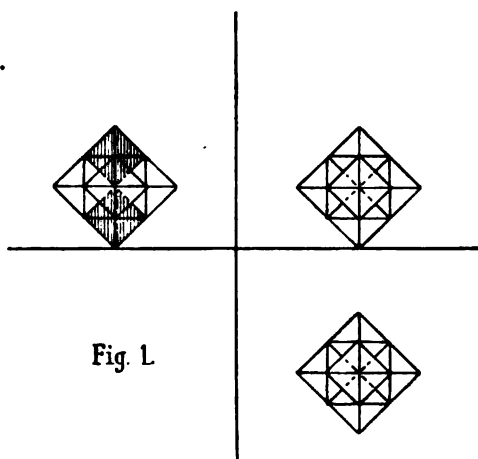


Fig. 1

blijkt ook uit een projectietekening (fig. 1), waarin de ge-

arceerde achtvlakken blijkbaar niet aansluiten tegen de andere, doch ruimten openlaten van den vorm van fig. 2.

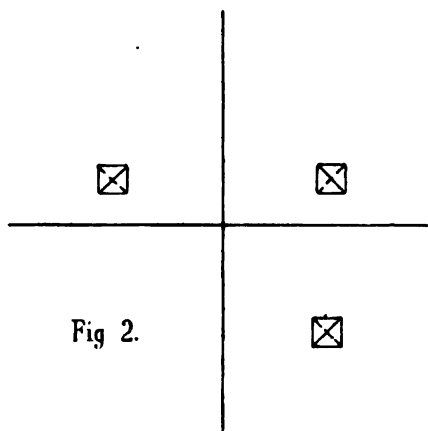


Fig 2.

9. Denkt men elk viervlak verdeeld in vier driezijdige pyramiden, die het middelpunt van het viervlak als top en de zijvlakken als grondvlak hebben, dan blijkt, dat tegen elk achtvlak acht zulke vierdedeelen van een viervlak aansluiten, zoodat bij elk achtvlak twee viervlakken behooren, zooals reeds in No. 6 op andere wijze was aangetoond.

(In het algemeen als  $p$ -vlakke lichamen met  $q$ -vlakke lichamen de ruimte opvullen, zoodanig dat elk zijvlak van een  $p$ -vlak aansluit tegen een zijvlak van een  $q$ -vlak, en omgekeerd, dan is de verhouding van het aantal  $p$ -vlakken tot het aantal  $q$ -vlakken als  $p : q$ . Als van de  $p$ -vlakken telkens  $r$  zijvlakken aansluiten tegen andere  $p$ -vlakken, en dus slechts  $(p - r)$  zijvlakken tegen  $q$ -vlakken, dan is de bedoelde verhouding als  $(p - r) : q$ . Enz.)

10. Zoowel uit de laatstbesproken opvulling der ruimte door achtvlakken en viervlakken als uit de oorspronkelijke opvulling door kuben, is een andere ruimtevvulling af te leiden, die (meetkundig) gesteld kan worden naast die van Lord Kelvin, namelijk door *ruitentwaalfvlakken*.

Want elk achtvlak vormt met de acht daaraan grenzende vierdedeelen der viervlakken een  $r_{12}$ , zooals gemakkelijk blijkt als men het  $r_{12}$  beschouwt als omhullende van het achtvlak <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Men zie de vermelde Congreslezing en de brochure „Het onderling verband der regelmatige lichamen en twee der half-regelmatige." Leiden Stijthoff 1899

11. Daar het  $r12$  ook te verkrijgen is door omhulling van een kubus, zal men ook van een beschouwing van een ruimteopvulling door kubus kunnen uitgaan. Denkt men tegen elk der zijvlakken van een kubus een even grooten kubus geplaatst, dan zijn de hoekpunten van den eersten en de middelpunten van de zes andere de hoekpunten van een  $r12$ . Dergelijke samenstellingen van zeven kubus denke men zoo geplaatst dat twee kubus van een der samenstellingen samenvallen met twee van eene andere. De middenkubus komen dan zoo te staan, dat telkens twee een ribbe gemeen hebben, en de diagonaalvlakken door de ribbe samenvallen.

Om elk der zes aansluitende kubus van een samenstel liggen dus zes middenkubus. Denkt men zich de middenkubus in hun geheel, en de andere kubus verdeeld in zes regelmatige pyramiden, waarvan de zijvlakken grondvlakken zijn, dan blijkt daaruit de opvulling der ruimte door  $r12$ .

12. Het voorgaande is korter te zeggen, wanneer men de benamingen invoert:

*aanliggende*, *omliggende* en *aangrenzende* kubus voor de zes, *twaalf* en *acht* kubus, die in een ruimtevulling door kubus met een gegeven kubus

*een zijvlak*, *een enkele ribbe* of *een enkel hoekpunt* gemeen hebben.

Want dan kan men het in No. 11 vermeldte als volgt in woorden brengen:

Omhult men een der kubus van een ruimteopvulling, en de twaalf omliggende; daarna de omliggende van elk der laatstgenoemde twaalf, enzoo voort, dan wordt elk der aanliggende kubus in zes deelen verdeeld zonder eenig overschot.

(De kubus, die hierbij als aanliggend beschouwd worden, zijn ten opzichte van elkander aangrenzend.)

Duidelijk blijkt, dat in de middelpunten der aanliggende kubus zes  $r12$  samenkomen, terwijl in de hoekpunten der omliggende vier van lichamen aaneensluiten, doordien zulk een hoekpunt tot vier omliggende kubus behoort.

13. Op nog twee andere wijzen kan men de opvulling der ruimte door  $r12$  aantonen. Vooreerst door op te merken, dat als men twee  $r12$  tegen elkander plaatst, zoodat twee

zijvlakken samenvallen, op elke ribbe van die zijvlakken nog een hoek van  $120^\circ$  overblijft (daar de standhoek van het  $r12$   $120^\circ$  is), waarin dus een derde  $r12$  kan geplaatst worden, zoodanig dat twee zijvlakken ervan samenvallen met een zijvlak van het eerste en een zijvlak van het tweede.

Ten tweede kan men het  $r12$  zóo projecteeren op drie onderling loodrechte vlakken, dat de drie projecties vierkanten zijn met de lijnen, die de middens der overstaande zijden verbinden (fig. 3).

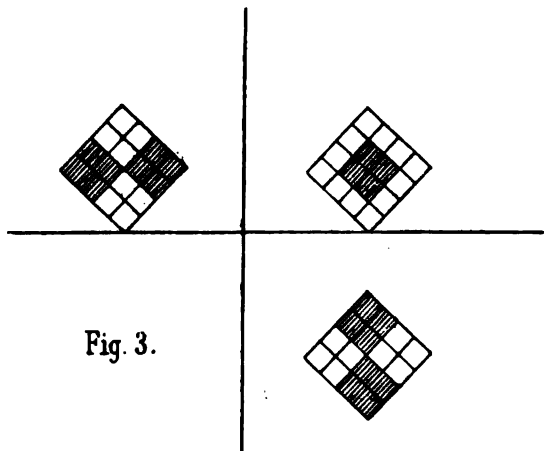


Fig. 3.

Plaatst men vier  $r12$  tegen elkander, zoodat elk ervan één zijvlak gemeen heeft met twee andere en één hoekpunt met een vierde, dan kunnen een vijfde en een zesde  $r12$  zoodanig geplaatst worden, dat één hoekpunt in het eerstgenoemde hoekpunt valt, en de vier zijvlakken samenvallen met een zijvlak van elk der eerste vier  $r12$ , zooals onmiddellijk blijkt uit de arceering.

14. Terwijl het  $r12$ , en het lichaam 6,  $\frac{3}{2}$  de eenige half-regelmatige lichamen zijn, waarmede de ruimte kan worden opgevuld, en een vijftal ruimtevullingen met twee soorten lichamen besproken werden, kunnen nog andere opvullingen met drie soorten lichamen worden aangegeven.

Bij de opvulling door achthoekvlakken en vierhoekvlakken komen in elk hoekpunt zes achthoekvlakken en acht vierhoekvlakken samen. Knot men deze af door vlakken, die van in één punt samenkommende ribben gelijke stukken afsnijden, dan sluiten deze vlakken het veertienhoekvlakkige lichaam  $\frac{14}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$  in (daar elk acht-

vlak een vierkant, en elk viervlak een driehoek als grensvlak geeft).

Wordt de afknotting bij elk hoekpunt uitgevoerd, en neemt men de afgesneden stukken gelijk aan een derde van de ribben, dan gaat elk achtvlak over in het lichaam  $6, \frac{2}{3}$  van Lord Kelvin, en elk viervlak in het half-regelmatige lichaam  $\frac{4}{3}, 4$  (begrensd door vier driehoeken en vier zeshoeken).

15. Om na te gaan hoeveel lichamen van elke soort aanwezig zijn, merke men op, dat bij de opvulling door achtvlakken en viervlakken het aantal hoekpunten gelijk moet zijn aan het aantal achtvlakken. Immers heeft elk achtvlak zes hoekpunten, en telkens zes hoekpunten komen samen, zoodat men van elk achtvlak één hoekpunt kan beschouwen als een punt van het samenstel, waarin vijf andere worden opgenomen zonder mede te tellen.

Daar er  $p$  achtvlakken waren met  $2p$  viervlakken, zullen er nu zijn:

$p$  lichamen  $\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + p$  lichamen  $6, \frac{2}{3} + 2p$  lichamen  $\frac{4}{3}, 4$ .

16. Als men bij de afknotting de deelvlakken door de middens der ribben legt, dan gaan de achtvlakken over in de lichamen  $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ , en de viervlakken in regelmatige achtvlakken, zoodat men de opvulling van No. 5 terugvindt, en wel:

$2p$  lichamen  $\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + 2p$  regelmatige achtvlakken.

17. Wanneer men bij de opvulling door  $r12$  deze afknot tot de halfregelmatige lichamen  $r12; \frac{2}{3}, 6$  (begrensd door achttien vierkanten, welke drie onderling loodrechte gordels ieder van acht vierkanten vormen, en acht driehoeken), dan ontstaan bij de punten, waar zes  $r12$  samenkomen, kuben, en bij de andere regelmatige viervlakken. In eerstgenoemde punten komen slechts *scherpe* hoeken van zijvlakken samen, in laatstgenoemde slechts *stompe* hoeken.

Omdat elk  $r12$  zes hoekpunten heeft waar scherpe hoeken samenkomen en telkens zes van zulke punten samenvallen, zal in verband met het in No. 11 besprokene het aantal van die hoekpunten juist gelijk zijn aan het aantal  $r12$ .

Omdat elk  $r12$  acht hoekpunten heeft, waarin stompe hoeken samenkomen, en telkens slechts vier daarvan samenvallen, zal

het aantal van zulke hoekpunten het dubbele zijn van het aantal  $r12$ .

Na de afknotting zal men dus hebben:

$p$  lichamen  $r12$ ;  $\frac{2}{3}$ ,  $6 + p$  kuben  $+ p$  viervlakken.

18. Wanneer men van 6 in één punt samenkomende  $r12$  twee overstaande laat aangroeien, zoodat ze in elkander dringen, en dus elkander afknotten, dan verkrijgt men eveneens lichamen  $r12$ ;  $\frac{2}{3}$ , 6, die nu echter op andere wijze geplaatst zijn dan in het voorgaande geval.

Om zich voor te stellen, wat er van de andere  $r12$  overblijft, is het gemakkelijker zich acht afgeknotte  $r12$  tegen elkander geplaatst te denken, zoodanig dat telkens twee kubus-vierkanten tegen elkander sluiten <sup>1)</sup>.

Dan ziet men, dat tusschen telkens vier der lichamen een kubus geplaatst kan worden, waarvan vier der zijvlakken aansluiten tegen  $r12$ -vierkanten, die met de acht eerste lichamen samen een ruimte insluiten, waaraan elke kubus een vierkant, en elk der andere lichamen een driehoek als grensvlak geeft, en welke dus een lichaam  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  kan bevatten.

Omdat elk der acht eerste lichamen twaalf kuben draagt, en elke kubus slechts aansluit tegen vier van de eerste lichamen, moet het aantal kuben een derde deel zijn van het aantal der andere lichamen.

Omdat elk der acht eerste lichamen acht driehoeken draagt, en elk lichaam  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  eveneens, zullen er evenveel lichamen van elke soort zijn. Men heeft dus

$p$  lichamen  $r12$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $6 + \frac{1}{3} p$  kuben  $+ p$  lichamen  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ .

---

<sup>1)</sup> In elk zijvlak van een  $r12$  kan men een vierkant beschreven denken. Tusschen telkens vier vierkanten bevindt zich dan een ander vierkant, gelegen op een kubusvlak van het afknottende veertienvlakkige lichaam van Lord Kelvin. en tusschen telkens drie vierkanten een driehoek, gelegen op een octaëder-vlak van het afknottende lichaam. De vierkanten kan men dus onderscheiden in  $r12$ -vierkanten, en in kubus-vierkanten. Zij onderscheiden zich van elkander daardoor, dat elk  $r12$ -vierkant begrensd wordt door twee driehoeken en twee vierkanten, en elk kubus-vierkant door vier vierkanten.



UEBER DIE GESTALT EINES SCHWEREN CYLINDERS, DER,  
AUF EINER HORIZONTALLEN EBENE ROLLEND,  
TAUTOCHRON SCHWINGT,

VON

F. SCHUH.  
(Göttingen.)

Die Bedingung des Tautochronismus bei  
einem Freiheitsgrad.

1. Sei  $\phi$  die allgemeine Coordinate,  $V$  die potentielle Energie, die wir beide in der Gleichgewichtslage als Null annehmen. Die lebendige Kraft  $T = \frac{1}{2} r_\phi \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$  wird, wenn wir die Coordinate  $z = \int_0^\phi \sqrt{r_\phi} d\phi$  einführen,  $T = \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2$ . Die endlichen

Schwingungen sind tautochron, wenn  $F_z = - \frac{dV}{dz} = - kz$ , d. h.

$\sqrt{\frac{2V}{k}} = z = \int_0^\phi \sqrt{r_\phi} d\phi$ , oder (nach  $\phi$  differentiiert):

$$F_\phi^2 = 2kV r_\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn  $F_\phi = - \frac{dV}{d\phi}$  bedeutet. Das ist die gesuchte Bedingung des Tautochronismus.

Aus  $F_z = - kz$  folgt für die Bewegungsgleichung  $\frac{d^2 z}{dt^2} = - kz$ , also  $C \sin(t\sqrt{k}) = z = \sqrt{\frac{2V}{k}}$  oder

$$\sin \frac{2\pi t}{\mathfrak{z}} = \sqrt{\frac{V}{\varepsilon}}, \quad \mathfrak{z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

unter  $\mathfrak{S}$  und  $\epsilon$  die Periode der Schwingungen, und die Gesamtenergie verstanden.

### Anwendung auf unseren speciellen Fall.

2. In der Fig. 1 ist der Cylinder gezeichnet in einer beliebigen Lage und in der Gleichgewichtslage, bei welcher letzteren die selben Buchstaben benützt sind mit dem Index 1 versehen. Sei  $G$  der Schwerpunkt, und weiter

$$\text{arc } PA = \text{arc } P_1A_1 = s$$

$$PB = P_1B_1 = \eta$$

$$BA = B_1A_1 = \xi$$

$$PG = P_1G_1 = l$$

$$GA = G_1A_1 = r$$

$$GC = y$$

$$P_1C = x.$$

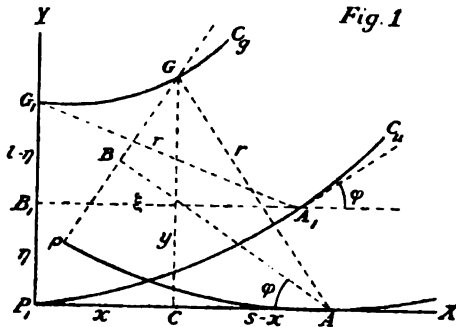


Fig. 1

$\xi$  und  $\eta$  sind die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes  $A_1$  der Umrisscurve  $C_u$ , die durch einen senkrechten Querschnitt des Cylinders in der Gleichgewichtslage erzeugt wird;  $x$  und  $y$  die Coordinaten eines Punktes  $G$  der Schwerpunktscurve  $C_g$ . Nun ist:

$$r^2 = (s - x)^2 + y^2. \quad (3)$$

Weil die Bewegung des Cylinders als eine momentane Rotation um  $A$  aufzufassen ist, so hat man, wenn  $\phi$ , der Winkel zwischen der Tangente in  $A_1$  und der X-axe, als die allgemeine Coordinate gewählt wird,

$$\frac{dy}{d\phi} = s - x \quad (4)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = y \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{2} r \phi \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m (a^2 + r^2) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

worin  $m$  die Masse,  $a$  den Trägheitsradius bedeutet. Die potentielle Energie, die wir in der Gleichgewichtslage zu Null annehmen, wird

$$V = mg(y - l) \dots \dots \dots (7)$$

Vermöge (4) ist also:

$$F_{\phi} = - \frac{dV}{d\phi} = - mg(s - x).$$

Aus (3), (4) und (5) folgt:

$$\frac{d(r^2)}{d\phi} = 2 \{ (s - x) \left( \frac{ds}{d\phi} - y \right) + y(s - x) \} = 2 \frac{ds}{d\phi} (s - x) = 2 \frac{ds}{d\phi} \frac{dy}{d\phi},$$

also:

$$\frac{d(r^2)}{dy} = 2 \frac{ds}{d\phi} \dots \dots \dots (8)$$

Jetzt die Bedingung (1) des Tautochronismus anwendend, finden wir

$$g(s - x)^2 = 2k(y - l)(a^2 + r^2)$$

oder  $n = \frac{g}{2k}$  einfürend ( $n$  hat die Dimension einer Strecke),

$$(a^2 + y^2)(y - l) = (s - x)^2(n + l - y) \dots \dots (9)$$

Das ist unsere Hauptrelation, aus der wir alles Weitere ableiten müssen.

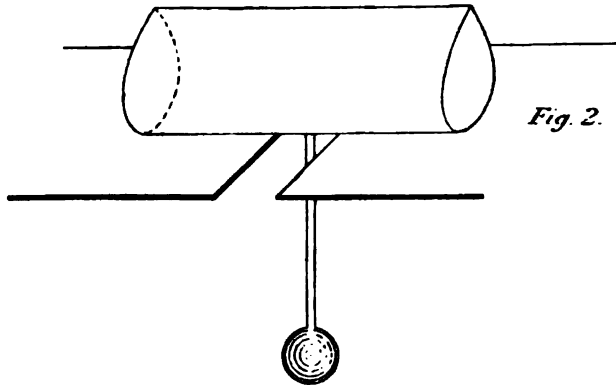
Für  $r$  finden wir daraus:

$$r^2 = \frac{a^2(y - l) + y^2n}{n + l - y} \dots \dots \dots (10)$$

Die Grösse  $n = \frac{g}{2k}$  hat eine einfache mechanische Bedeutung; sie ist nämlich die halbe reducierte Pendellänge des Cylinders, wie man sofort aus  $\mathfrak{z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2n}{g}}$  erkennt (Glg. (2)).

$n$  und  $a$  sind immer positive Grössen;  $l$  kann aber negativ werden z. B. wenn ein Cylinder, der mit seinen beiden Enden auf zwei Stücken einer Ebene aufliegt, in seiner Mitte ein

Pendel trägt, wie Fig. 2 andeutet. Man überzeugt sich leicht, dass dieser Umstand unsere Formeln nicht ändert.



Um zu finden wie  $G$  seine Bahncurve  $C_g$  durchläuft, haben wir Gleichung (2) anzuwenden. Vermöge (7) ist, wenn  $y_0$  der grösste Wert ist, den  $y$  erreicht:

$$\sin \frac{2\pi t}{S} = \sqrt{\frac{mg(y-l)}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{y-l}{y_0-l}}. \quad (11)$$

In dieser Gleichung tritt  $a$  nicht auf, so dass  $y$  sich ebenso mit der Zeit ändert, wie wenn  $a=0$  und  $G$  also als ein schwerer Punkt aufzufassen ist, der längs einer Cycloide schwingt.

### Die Schwerpunktscurve $C_g$ .

3. Aus (4) und (5) folgt  $s - x = y \frac{dy}{dx}$ ; also giebt Gleichung (9)

$$x = \int_l^y y \sqrt{\frac{n+l-y}{(y-l)(a^2+y^2)}} \cdot dy. \quad (12)$$

Das ist die Gleichung der Schwerpunktscurve  $C_g$  (die noch auf elliptische Integrale zu reducieren ist);  $n$  und  $a$  sind positiv, sonst sind  $n$ ,  $a$  und  $l$  beliebig. Die Gestalt der Curve hängt nur von den Verhältnissen von  $n$ ,  $a$  und  $l$  ab; ihre Grösse ist dann einer dieser Grössen proportional. Man sieht aus (12), dass  $y$  zwischen  $l$  und  $l+n$  gelegen sein muss.

Die Curve  $C_g$  ist durch eine Quadratur zu rectificieren.

Aus (12) findet man für die Bogenlänge  $s_1$  bis zum Punkte  $x = 0 \quad y = l$

$$s_1 = \int_l^y \sqrt{\frac{a^2(y-l) + y^2 n}{(y-l)(a^2 + y^2)}} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Für  $a = 0$  wird dies  $s_1 = 2 \sqrt{n(y-l)}$ .

Auch der Krümmungsradius ist leicht aus (12) zu bestimmen. Man findet dafür

$$\rho = \frac{2(n+l-y) \{a^2(y-l) + y^2 n\}^{\frac{3}{2}}}{ny^3 + a^2 \{2y^2 - (n+4l)y + 2l(n+l)\}} \quad . \quad . \quad (14)$$

Für  $a = 0$  giebt das  $\rho = 2 \sqrt{n(n+l-y)}$ . In dem tiefsten Punkte ( $y = l$ ) wird der Krümmungsradius:

$$\rho_1 = 2n \frac{l^2}{a^2 + l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

eine Formel die gültig bleibt bei beliebiger Gestalt des Cylinders, wenn  $n$  sich nur auf unendlich kleine Schwingungen bezieht.

4. Ist  $a = 0$ , befindet sich also alle Masse in einer Axe durch den Schwerpunkt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in dem Schwerpunkt, so ist:

$$x = \int_l^y \sqrt{\frac{l+n-y}{y-l}} \cdot dy,$$

und  $C_y$  ist also eine Cycloide, deren tiefster Punkt sich in der Gleichgewichtslage  $G_1$  des Schwerpunktes befindet, während der Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich  $n$ , die erzeugende Gerade  $y = n + l$  ist. Die Spitzen der Cycloide haben die Coordinaten  $\pm \frac{1}{2} \pi n$  und  $n + l$ . Wir werden sehen, dass diese Spitzen erst bei unendlich grossen Schwingungen durch den Schwerpunkt erreicht werden.

Dass für  $a = 0$  die Curve  $C_y$  eine Cycloide ist, war natürlich ohne unsere allgemeineren Betrachtungen sofort zu sehen, weil man für  $a = 0$  wesentlich nur mit den Schwingungen eines materiellen Punktes zu thun hat. Der Durchmesser des Kreises ist gleich der Hälfte des grössten Krümmungsradius der Cycloide, oder gleich der halben Pendellänge, also gleich  $n$ , wie wir auch oben fanden.

Es ist bemerkenswert, dass schon Christiaan Huygens sich mit diesem einfacheren Fall beschäftigt hat, worauf mich Herr Prof. D. J. Korteweg aufmerksam gemacht hat. Auf Seite 253 der Handschrift *Olim G* (nicht herausgegeben), wie aus den dort vorkommenden Datierungen hervorgeht, wahrscheinlich ungefähr Jan. 1670, stellt er sich die Frage nach der Schwingungszeit eines materiellen Punktes *A* befestigt an einer kreisförmigen Curve *FE*, welche über eine horizontale Gerade rollt. Er kommt zu dem folgenden Resultat (siehe

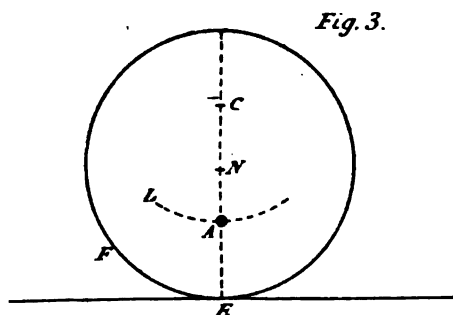


Fig. 3.

Fig. 3): „Si  $NE = d$   
„sit radius circumferen-  
„tiae *EF* quae super  
„plano volvitur, motu  
„reciproco, et  $EA = b$   
„distantia ponderis *A*  
„plano affixi, a puncto  
„*E*. Erit  $\frac{b \cdot b}{d - b} = CA$   
„longitudo penduli iso-  
„chroni oscillationibus

„ponderis *A* ita agitati, sive *CA* erit radius circonferentiae  
„maximae curvae *AL*, in qua pondus *A* fertur, intus tangentia.”  
Darauf geht er aber in folgender Weise weiter: „Potest *EF*  
„curva esse ejus figurae ut pondus *A* versetur in cava cycloide,  
„ve tunc oscillationes fient isochronae.” Er scheint sogar an  
eine Realisation eines derartigen Mechanismus gedacht zu haben,  
wenn er hinzufügt (siehe Fig. 4): „Saltem mechanice satis

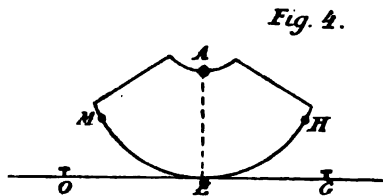


Fig. 4.

„prope inveniri poterit. Fila  
„seu fasciolae planae sunt  
„*MEG*, *HEO*. Altera affixa  
„in *M* et *G*, altera in *H* et *O*.  
„His retinebitur solidum vo-  
„lutatum. Ut sit portabile.”  
Gelegentlich werden wir  
noch erwähnen, was er

einige Seiten weiter über die Curve *EF* aussagt.

5. Betrachten wir jetzt den Fall, dass *a* nicht gleich Null ist, und anfänglich auch dass *l* positiv ist. Die Curve *C*, hat für  $y = l$  eine horizontale Tangente, für  $y = l + n$  eine Spitze

mit einer vertikalen Tangente; das sind (wenn  $l$  pos. ist) die einzigen Stellen, in denen die Tangente vertikal ist. Die vertikalen Linien durch die höchsten und niedrigsten Punkte sind Symmetrielinien von  $C_l$ . Für jedes  $y$  ist die Curve  $C_l$  steiler als die Cycloide mit demselben  $n$  und  $l$  für  $a = 0$ .

Um zu untersuchen ob  $C_l$  Wendepunkte hat, betrachten wir den Ausdruck für den Krümmungsradius, oder für  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . Man findet dass die Curve concav ist für

$$D \equiv ny^3 + a^2\{2y^2 - (n+4l)y + 2l(n+l)\} = ny(y^2 + a^2) - 2a^2(y-l)(l+n-y)$$

positiv und convex für  $D$  negativ (weil  $D = 2y^2(n+l-y)^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ ).

Die Gleichung 3<sup>ter</sup> Ordnung  $D = 0$  giebt die Wendepunkte. Weil aber  $D(l)$  und  $D(n+l)$  für  $l > 0$  beide positiv sind, so hat  $C_l$  keinen oder zwei Wendepunkte zwischen ihrem höchsten und ihrem tiefsten Punkt. Dass beide Fälle wirklich eintreten können (den Uebergangsfall hat man offenbar, wenn die Discriminante von  $D$  verschwindet), ist leicht zu zeigen. Denn für  $a = 0$  ist  $C_l$  eine Cycloide, und hat also keine Wendepunkte, während in dem anderen Grenzfall  $a = \infty$  (oder jedenfalls sehr gross)  $D = a^2\{2y^2 - (n+4l)y + 2l(n+l)\}$  wird. Dieser Ausdruck hat für  $y = l + \frac{1}{2}n$  (also zwischen  $y = l$  und  $y = l + n$ ) seinen kleinsten Wert  $na^2(l - \frac{1}{2}n)$ , so dass Wendepunkte existieren für  $n > 8l$ , nicht für  $n < 8l$ .

Die Curve  $C_l$  kann also für  $l > 0$  die beiden in Fig. 5 und 6

Fig. 5.

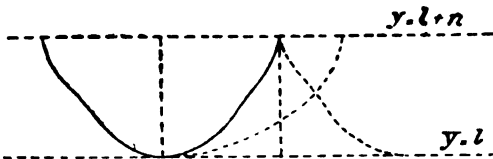
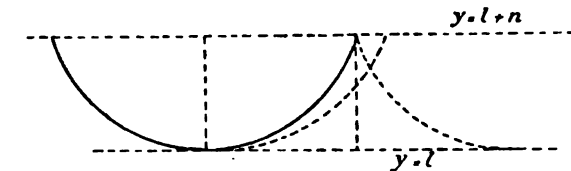


Fig. 6.

gezeichneten Formen annehmen (die punktierte Curve stellt die Cycloide für  $a = 0$  dar).

6. Sei jetzt  $l + n < 0$ , so dass die ganze Curve  $C$ , unter der horizontalen Ebene  $E$  liegt. Aus dem Ausdruck für  $D$  sieht man, dass  $D$  für  $l \leq y \leq n + l$  negativ wird, sodass  $C$ , keine Wendepunkte hat, und ungefähr die Gestalt der in Fig. 5 gezeichneten Curve annimmt.

7. Abweichend verhält sich die Sache, wenn  $l < 0 < l + n$ . Dann ist für  $y = 0$  (also in dem Schnittpunkt mit der Ebene  $E$ ) die Tangente vertikal. Die Curve ist concav für  $yD > 0$  und convex für  $yD < 0$ . Für  $y < 0$  hat man keine Wendepunkte, weil dann  $D$  immer negativ ist ( $y = 0$  giebt, obgleich dort  $yD = 0$  ist, keinen Wendepunkt; der Krümmungsradius

ist dort  $\rho_{y=0} = a \sqrt{\frac{-l}{n+l}}$  und also endlich). Weiter bemerken wir, dass die Gleichung  $D = 0$  in dem Falle  $l < 0 < l + n$  nur einen Zeichenwechsel hat, also eine positive reelle Wurzel, die (weil  $D(0)$  negativ und  $D(n+l)$  positiv ist) zwischen Null und  $l + n$  liegt.  $C$ , hat also einen und nur einen Wendepunkt, der zwischen der horizontalen Ebene  $E$  und der Spitze gelegen ist.

Die Curve kann noch zwei, wenn auch nicht wesentlich, verschiedene Gestalten annehmen, je nachdem der Teil unter oder der Teil über der Ebene  $E$  sich am meisten in horizontaler Richtung erstreckt. Man hat gewiss den ersten Fall wenn  $l + n$ , den zweiten, wenn  $l$  klein ist. Die Figuren 7

Fig. 7.

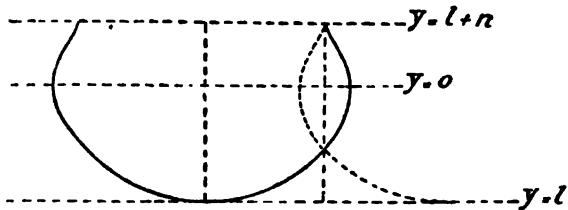
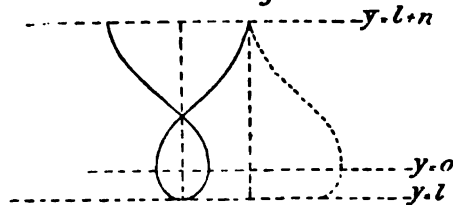


Fig. 8.



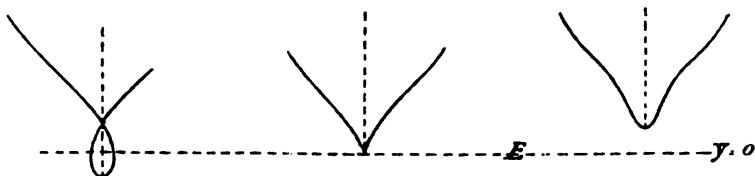
und 8 veranschaulichen für beide Fälle die Gestalt von  $C$ .



Dass  $C_1$  in dem Schnittpunkt mit  $E$  eine vertikale Tangente hat, folgt auch aus einer leichten geometrischen Ueberlegung. Befindet sich der Schwerpunkt in  $G$ , so findet man den Berührungspunkt des Cylinders mit  $E$  als Schnittpunkt  $A$  (siehe Fig. 1) der Normale der Curve  $C_1$  mit  $E$ ; weiter ist  $GA = r$ . Liegt aber  $G$  in der Ebene  $E$ , so ist  $GA$  auch Krümmungsradius von  $C_1$  (wofür wir also wie früher  $a \sqrt{\frac{-l}{n+l}}$  finden) und die Tangente in  $G$  steht senkrecht auf  $E$ .

8. Zwischen den betrachteten Fällen hat man zwei Uebergangsfälle. Erstens ist da der Fall  $l = 0$  (siehe Fig. 9) Dann

Fig. 9.



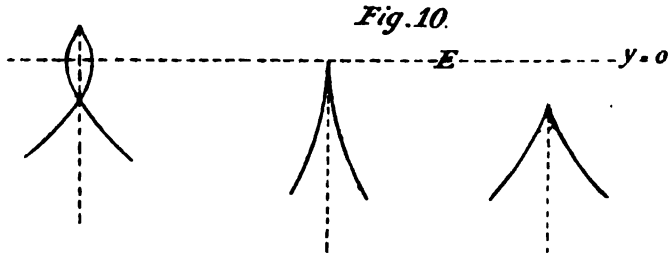
ist  $\rho_1 = 0$  und  $C_1$  hat für  $y = l = 0$  keine horizontale, sondern eine vertikale Tangente; sie hat dort eine gewöhnliche Spitze (wie zu erwarten war, weil jetzt  $G_1$  Berührungspunkt von  $C_1$  und  $E$  ist, und als solcher eine Spitze mit vertikaler Tangente beschreibt), und in der Nähe dieser Spitze ungefähr die Gestalt

der cubischen Parabel  $x = \frac{2\sqrt{n}}{3a} y^{\frac{3}{2}}$ . Die Curve  $C_1$  hat jetzt

eine obere ( $y = n$ ) und eine untere ( $y = 0$ ) Spitze, zwischen denen sich ein und nur ein Wendepunkt befindet. Die Gleichung  $D = 0$  hat eine Wurzel  $y = 0$ . Den Wendepunkt, der also in die untere Spitze hineingerückt ist, kann man durch klein und positiv gewähltes  $l$  wieder zum Vorschein bringen;  $C_1$  hat dann zwischen  $y = l$  und  $y = l + n$  zwei Wendepunkte, sodass man für beliebige  $n$  und  $a$  (nur nicht  $a = 0$ )  $l$  stets so klein und positiv wählen kann, dass  $C_1$  zwei Wendepunkte hat (dabei ist immer gemeint, dass man von den symmetrisch gelegenen Punkten absieht).

Einen anderen Uebergangsfall hat man für  $n + l = 0$  (siehe

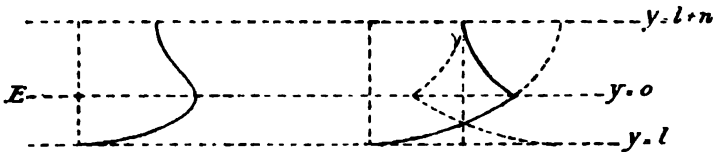
Fig. 10) Während  $C_1$  in dem höchsten Punkte sonst die Gestalt



einer cubischen Parabel hat, hat sie jetzt ungefähr die Gestalt der Curve  $x - c = \frac{2}{5a\sqrt{-l}}(-y)^{\frac{5}{2}}$  (wenn für  $y = 0$   $x = c$ ), also eine Spitze mit vertikaler Tangente und dem Krümmungsradius  $\infty$ ; diese Tangente schneidet  $C_1$  in der Spitze nicht, wie gewöhnlich in 3, sondern in 5 Punkten. Die Curve  $C_1$  hat jetzt keine Wendepunkte; diese entstehen aber sofort, wenn man  $n + l$  klein und positiv wählt.

9. Betrachten wir den Grenzfall, dass  $a$  der Null zustrebt. Ist  $l > 0$  oder  $l + n < 0$ , so geht  $C_1$  in eine Cycloide über. Ist aber  $l < 0 < l + n$  so geht  $C_1$  über in zwei cycloidale Bögen, die in  $E$  mit einer Ecke an einander stoßen. Der Teil oberhalb  $E$  ist das Spiegelbild der Fortsetzung des unterhalb  $E$  gelegenen Teils, wie Fig. 11 das zeigt. Wird  $a$  kleiner, so

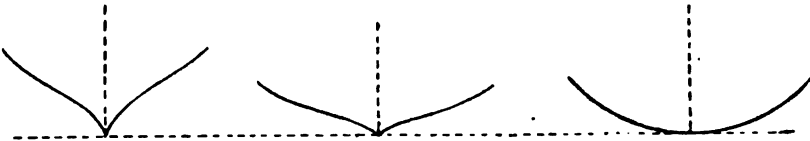
Fig. 11.



wird  $C_1$  in dem Schnittpunkt mit  $E$  immer schärfer; der Krümmungsradius  $a\sqrt{\frac{-l}{n+l}}$  in diesem Schnittpunkt nähert sich mit  $a$  der Null. Dennoch ist, für  $a = 0$ , der Krümmungsradius von  $C_1$  im Punkt  $y = 0$  nicht Null, sondern  $2\sqrt{n(n+l)}$  (Der Limes der Tangente und des Krümmungsradius ist nicht die Tangente und der Krümmungsradius des Limes).

Ist schliesslich  $l = 0$ , und lässt man  $a$  zu Null werden, so bekommt man einen Grenzübergang zur Cycloide, der in Fig. 12

Fig. 12.



ist abgebildet. Der Krümmungsradius des tiefsten Punktes, der vor dem Limes immer gleich Null ist, wird bei dem Limes plötzlich  $2n$ .

Die Umrissscurve  $C_n$ .

10. Aus den Gleichungen (5) und (12) folgt:

$$\phi = \int^y \sqrt{\frac{n + l - y}{(y - l)(a^2 + y^2)}} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Das ist die Gleichung der Umrissscurve  $C_n$  in Linienkoordinaten  $\phi$  und  $a$ . Hier ist  $\phi$  der Winkel, den die Tangente in einem Punkte  $A_1$  von  $C_n$  mit der X-axe bildet;  $y$  der Abstand des Schwerpunktes  $G_1$  von dieser Tangente, positiv gerechnet, wenn bei fortgesetzter Rollung, bis  $A_1$  Berührungspunkt mit  $E$  geworden ist,  $G$  oberhalb  $E$  zu liegen kommt. Aus (16) folgt, dass  $\phi$  immer mit  $y$  wächst (wie auch aus einer einfachen mechanischen Ueberlegung sofort klar ist), und, wenn  $a \neq 0$ , endlich bleibt, auch für  $y = l + n$ .

Man sieht leicht ein, dass die Curve  $C_n$  sich ins Unendliche erstreckt. Wir haben früher schon hervorgehoben, wie man aus der Schwerpunktslage  $G$  den zugehörigen Berührungspunkt  $A$  construirt ( $GA$  senkrecht auf  $C_1$ ). Durchläuft  $G$  die Curve  $C_1$  von  $G_1$  ab, so entfernt sich  $A$  von  $A_1$  (auch wenn  $C_1$  convex ist, wie mechanisch sofort klar ist); ist  $G$  in der Spitze ( $y = l + n$ ) angekommen, so ist  $A$  ins Unendliche gerückt, sodass  $C_n$  eine Asymptote hat, die den Abstand  $l + n$  von  $G_1$  hat. Der Schwerpunkt kan also nur den Teil der Curve  $C_1$  durchlaufen, der zwischen den beiden dem Punkt  $x = 0$   $y = l$  nächsten Spitzen gelegen ist; diese Spitzen selbst werden erst für unendlich grosse Schwingungen erreicht (also faktisch nicht erreicht).

Aus diesen Ueberlegungen folgt auch leicht eine angenäherte



oberhalb E befindet, wenn der betreffende Punkt Berührungspunkt geworden ist. Nun ist vermöge (8):  $R = \frac{ds}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dy}$ , also vermöge (10):

$$R = \frac{n \{a^2 + 2(n+l)y - y^2\}}{2(n+l-y)^2} = \frac{n}{2} \left[ \frac{a^2 + (n+l)^2}{(n+l-y)^2} - 1 \right] \dots (17)$$

Es wird R nur  $\infty$  für  $y = n + l$ , und zwar  $+\infty$ ; dann haben wir es aber mit dem unendlich weiten Punkt von  $C_u$  zu thun, so dass  $C_u$  keine Wendepunkte hat (wie auch mechanisch einzusehen ist). Wohl aber kann  $R = 0$  werden; R wechselt dann sein Vorzeichen, nicht weil  $d\phi$ , sondern weil  $ds$  sein Vorzeichen, wechselt; wir haben es also für  $R = 0$  mit einer Spitze von  $C_u$  zu thun. Das Verhalten von R ist also entscheidend für die Gestalt der Curve  $C_u$ .

Aus (17) sieht man sofort, dass R (wenn man das Vorzeichen beachtet) immer mit  $y$  wächst. R ist also minimal in dem Berührungspunkt  $P_1$  der Gleichgewichtslage, und wächst fortwährend (eventuell mit Passierung der Null), wenn man  $C_u$  durchläuft.

Nennen wir R in dem Punkte  $P_1$  ( $y = l$ )  $R_1$ , so ist:

$$R_1 = \frac{a^2 + l^2 + 2nl}{2n} = l + \frac{a^2 + l^2}{2n} \dots (18).$$

Hieraus findet man für die Periode  $\mathfrak{S} = 2\pi \sqrt{\frac{2n}{g}}$

$$\mathfrak{S} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + l^2}{g(R_1 - l)}} \dots (19),$$

eine Formel, die auch für einen beliebigen Cylinder, aber dann nur für sehr kleine Schwingungen, gültig bleibt. Man liest aus (19) sofort die Bedingung der Stabilität für einen beliebigen Cylinder ab, nämlich  $R_1 > l$ . Die Stabilitätsbedingung fordert also, dass in der Gleichgewichtslage das Krümmungscentrum des Cylinders oberhalb des Schwerpunkts liegt.

Für  $a = 0$  liefert (18)  $2n = \frac{l^2}{R_1 - l}$ , was auch für einen beliebigen Cylinder gültig ist (wenn nur  $a = 0$  und  $n$  sich auf kleine Schwingungen bezieht). Dies ist die Formel, die Huygens für den Fall, dass  $C_u$  ein Kreis ist, angegeben hat (§ 4).

12. Es besteht eine einfache Beziehung zwischen den Krümmungsradien  $\rho$  und  $R$  von  $C_1$  bzw.  $C_2$ . Diese Beziehung geht hervor aus der allgemeineren Formel, die den Krümmungsradius  $\rho$  der Bahncurve eines Punktes  $P$  durch  $\rho_1, \rho_2, r$  und  $y$  ausdrückt. Hier ist  $P$  ein Punkt an einer Curve  $C_1$  fest verbunden, die über eine feste Curve  $C_2$  rollt;  $\rho_1$  und  $\rho_2$  sind die Krümmungsradien von  $C_1$  und  $C_2$  in dem Berührungspunkt  $A$ ,  $r$  und  $y$  die Abstände des Punktes  $P$  von  $A$  resp. der gemeinschaftlichen Tangente in  $A$ . Diese Formel ist bekanntlich

$$\rho = r \frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{y}{r^2} - \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}.$$

Hierin ist  $r$  immer positiv zu rechnen, während  $\rho_1, \rho_2$  und  $y$  positiv sind, wenn die Krümmungscentra der beiden Curven und  $P$  an einer bestimmten verabredeten Seite der Tangente in  $A$  liegen.  $\rho$  wird positiv gerechnet in der Richtung von  $A$  nach  $P$ .

In unserem Fall ist nun  $\rho_2 = \infty$ ,  $\rho_1 = R$ , also bekommen wir:

$$\rho = \frac{r^3}{yR - r^2} \quad \dots \quad (20),$$

woraus mittelst (10) und (17) sofort Gleichung (14) hervorgeht. Schreibt man (20) in der Form  $r^2(\rho + r) = \rho R y$  so sieht man, dass  $\rho + r$ , der Abstand zwischen  $A$  und dem Krümmungscentrum von  $C_1$  (positiv gerechnet von  $A$  nach  $G$ ), das Vorzeichen von  $\rho R y$  hat, woraus man schliesst, dass sich der Punkt  $A$  (wie er aus der Curve  $C_2$  construiert wird) bei einer Rollung im Sinne des Uhrzeigers nach rechts oder nach links verschiebt, jenachdem  $R$  positiv oder negativ ist, ein Resultat das, wenn man an die Curve  $C_2$  denkt, sofort klar ist.

#### Discussion der verschiedenen Gestalten von $C_2$ .

13. Die Curve  $C_2$  nimmt zwei verschiedene Gestalten an, jenach dem  $R_1$  positiv oder negativ ist; im zweiten Falle hat

sie zwei Spitzen, im ersten Falle keine. Auch die Grösse von  $\phi$  für die Asymptote, d. h. des Maximalwertes

$$\phi_m = \int_l^{l+n} \sqrt{\frac{n+l-y}{(y-l)(a^2+y^2)}} \cdot dy \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

von  $\phi$  hat auf die sinnfällige Form Einfluss;  $\phi_m$  und  $l+n$  bestimmen die Asymptote. Für jeden Wert von  $y$  ist  $\phi$  kleiner als wenn  $a=0$  ( $l$  und  $n$  ungeändert).  $C_n$  ist also weniger stark gewunden als für  $a=0$ . Für  $a \neq 0$  ist  $\phi_m$  endlich.

Ist  $a=0$ , so lässt sich der Ausdruck für  $\phi$  leicht integrieren. Man findet für  $l > 0$

$$\phi = 2 \sqrt{\frac{n+l}{l}} \cdot \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{l(n+l-y)}{(n+l)(y-l)}} - 2 \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}}$$

also

$$\phi_m = \pi \left( \sqrt{\frac{n+l}{l}} - 1 \right).$$

Für  $n+l < 0$  ist ebenso

$$\phi = -2 \sqrt{\frac{n+l}{l}} \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{l(n+l-y)}{(n+l)(y-l)}} + 2 \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}}$$

also:

$$\phi_m = \pi \left( 1 - \sqrt{\frac{n+l}{l}} \right)$$

(unter arc. ctg. immer den Winkel zwischen Null und  $\frac{1}{2}\pi$  verstanden). Endlich ist für  $l < 0 < n+l$  und  $y < 0$

$$\phi = 2 \text{arc. ctg.} \sqrt{\frac{n+l-y}{y-l}} + 2 \sqrt{\frac{n+l}{-l}} \log \frac{\sqrt{(n+l)(y-l)} + \sqrt{-l(n+l-y)}}{\sqrt{-ny}}$$

In dem ersten Falle liegt  $\phi_m$  zwischen Null (für  $l$  sehr gross) und  $\infty$  (für  $l$  sehr klein und pos.) In dem zweiten liegt  $\phi_m$  zwischen Null (für  $l$  neg. und absolut sehr gross) und  $\pi$  (für  $n+l$  sehr klein). Im dem dritten Fall endlich wächst  $\phi$  über alle Grenzen, wenn  $y$  sich (von der negativen Seite) der Null nähert.

Ist gleichzeitig  $a=0$  und  $l=0$ , so ist  $\phi$  für alle  $y$  unendlich.

14. Betrachten wir etwas genauer den Fall, dass  $R_1$ , der Krümmungsradius von  $C_n$  in  $P_1$ , positiv ist. Dann ist  $R$  immer

positiv und wächst fortwährend und unbeschränkt, wenn wir uns von  $P_1$  entfernen; weil  $R = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dy}$ , so ist dasselbe auch mit  $r$  (dem Abstand von  $G_1$ ) der Fall.

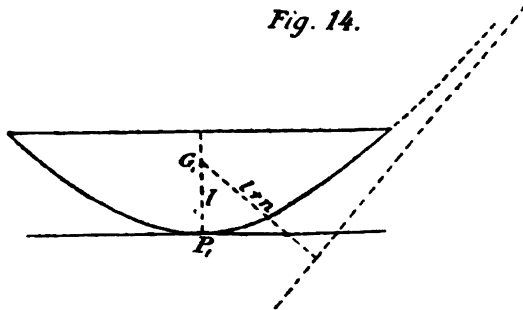
Die Richtung der Asymptote wird durch  $\phi_m$  (siehe Glg. (21)) gegeben. Ist  $a$  sehr gross, so wird  $\phi_m$  klein, und  $C_m$  verläuft flach. Ist  $l$  positiv oder negativ, so kann  $\phi_m$  noch beliebig gross werden, wenn nur  $a$  und  $l$  sehr klein sind, aber so dass noch  $R_1$  d. h.  $a^2 + l^2 + 2nl$  oder  $a^2 + 2nl$  positiv ist; für  $l$  negativ,  $l + n$  positiv hat  $C_m$  eine Tangente durch  $G_1$ . Für negatives  $l + n$  ist eine solche Tangente nicht möglich, so dass  $\phi_m$  immer  $< \frac{1}{2}\pi$  sein muss; man kann diese Grenze noch enger ziehen; man findet nämlich, dass in dem Falle  $R_1$  positiv,

$$l + n \leq 0, \quad \phi_m < \int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z)(1+z^2)}} dz = 0,3987\pi \text{ sein muss}$$

(dieser oberen Grenze nähert man sich an für  $l + n = 0$ ,  $a$  etwas grösser als  $n$ ;  $R$  ist dann positiv und klein); eine untere Grenze für  $\phi_m$  dagegen existiert nicht.

Fällt  $\phi \leq \frac{1}{2}\pi$  aus (was immer eintritt wenn  $l + n < 0$ ), so muss man den Cylinder noch durch eine unwesentliche Grenzfläche (worüber natürlich keine Rollung stattfinden darf) schliessen. Ist aber  $\phi > \frac{1}{2}\pi$ , so begrenzt die Curve  $C_m$  einen geschlossenen Cylinder. So entsteht ein Cylinder, bei dem alle endlichen Schwingungen tautochron sind, wenn die Schwingung nur nicht über die scharfe Kante hinausgeht, längs deren seine Begrenzungsfläche sich selbst durchdringt.

Fig. 14.

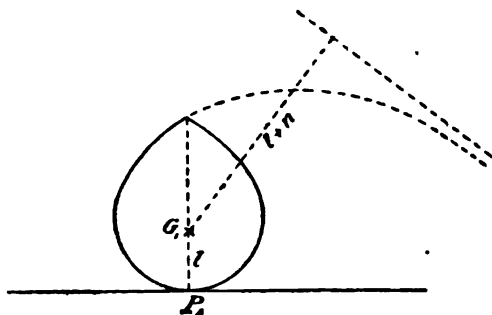


Die Figuren 14 und 15 geben die Gestalt von  $C_m$  für diese beiden Fälle an; hierbij ist  $l$  positiv angenommen, was aber



unwesentlich ist. Ist  $l$  negativ,  $l+n$  aber positiv, so geht

Fig. 15.



eine Tangente von  $C_n$  durch  $G_1$ ; dies ist nicht der Fall für  $l+n$  negativ.

15. Sei zweitens  $R_1$  negativ (dann muss  $a < n$  und  $0 > l > -2n$  sein). Da für  $y=l$   $R$  negativ ist, und für  $y=l+n$   $R=+\infty$ , hat  $C_n$  eine Spitze, und zwar vermöge (17) für  $y=n+l-\sqrt{a^2+(n+l)^2}$ , also für negatives  $y$ . Durchläuft man  $C_n$  von  $P_1$  ab, so nimmt  $r$  und der absolute Betrag von  $R$  erst ab; in der Spitze hat  $r$  ein Minimum und  $R$  ist Null; darauf nehmen  $r$  und  $R$  wieder zu, und zwar unbeschränkt.

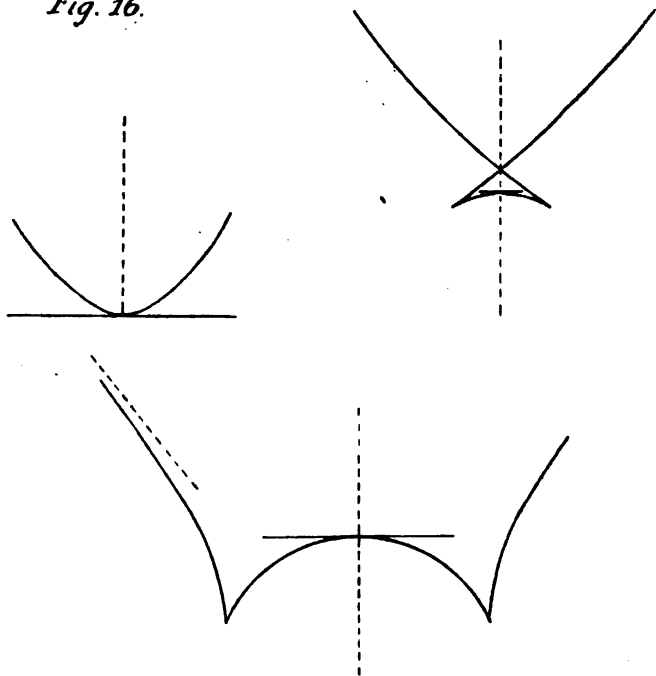
Ist  $R_1$  negativ aber klein, so liegen die beiden Spitzen nahe bei  $P_1$ . Lässt man  $R_1$  Null werden (also das  $y$  der Spitze zu  $l$  werden), so fallen schliesslich beide Spitzen zusammen, und vereinigen sich in eine höhere Singularität mit dem Krümmungsradius Null, deren Gestalt aber nichts Besonderes zeigt. Die Fig. 16 macht das deutlich.

Is  $R_1$  negativ und ebenso  $l+n$ , so hat  $C_n$  keine Tangente durch  $G_1$ . Der Abstand  $n+l-\sqrt{a^2+(n+l)^2}$  der Spitzentangente von  $G_1$  ist grösser als zweimal der Abstand  $n+l$  der Asymptote von  $G_1$  (für  $a=0$  ist es genau zweimal). Man findet, dass in diesem Fall  $\phi_n$  zwischen  $\pi(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})=0,2929\pi$  ( $a=0$ ,  $l+2n$  pos. und klein;  $R_1$  ist dann neg. und klein) und  $\pi$  liegt ( $a=0$ ,  $l+n$  neg. und klein;  $R_1$  wird dann  $-\frac{1}{2}n$  und das  $\phi$  der Spitze nahezu  $\phi_n$ ).

Ist  $l+n$  pos. ( $l$  aber neg. weil  $R_1 < 0$ ), so hat  $C_n$  eine Tangente durch  $G_1$ . Indem man  $a$  genügend klein nimmt,

kann  $\phi_m$  so gross werden, wie man will. Es giebt aber eine untere Grenze für  $\phi_m$ , nämlich  $\int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z)(1+z^2)}} dz = 0,3987\pi$  ( $l+n$  und  $n-a$  pos. und klein;  $R_1$  ist dann neg. und klein). Für  $l+n=0$  endlich liegt  $\phi_m$  zwischen  $0,3987\pi$  und  $\pi$ .

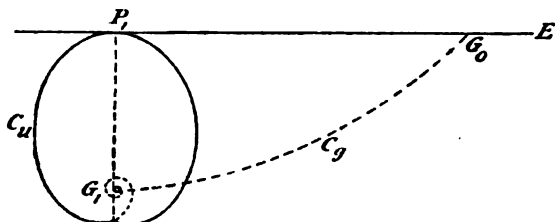
Fig. 16.



Lässt man  $a$  sich der Null nähern, während  $l < 0$ ,  $l+n > 0$ , so nähern sich die beiden Spitzen  $G_1$ , und  $C_\infty$  verläuft sowohl vor wie nach der Spitze sehr viele Male um  $G_1$  herum. Bei dem Limes wird  $C_\infty$  eine Spirale mit unendlich vielen Windungen um  $G_1$  herum, die  $G_1$  als Grenzpunkt haben; der Teil der Curve jenseits der Spitzen, die in den Grenzpunkt  $G_1$  der Spirale zusammengefallen sind, scheidet sich von der Curve ab. Wir haben schon in § 13 gesehen dass, für  $l+n > 0 > l$ ,  $\phi$  über alle Grenzen wächst, wenn  $y$  sich von der neg. Seite der Null nähert; gleichzeitig nehmen dann  $R_1$ , und die Abstände  $r$  und  $y$  zwischen  $G_1$  und Curvenpunkt resp. — tangente unbeschränkt ab. Die Gesamtlänge der Spirale von  $P_1$  bis  $G_1$  ist

endlich, und zwar gleich dem Abstand von  $P_1$  bis zum Schnittpunkt  $G_0$  der Cycloide  $C_1$  mit der Ebene  $E$ ; erst wenn die ganze Spirale abgerollt ist, befindet sich  $G$  in  $G_0$ ; der andere Teil von  $C_1$ , oberhalb der Ebene  $E$ , hat also keine mechani-

Fig. 17.



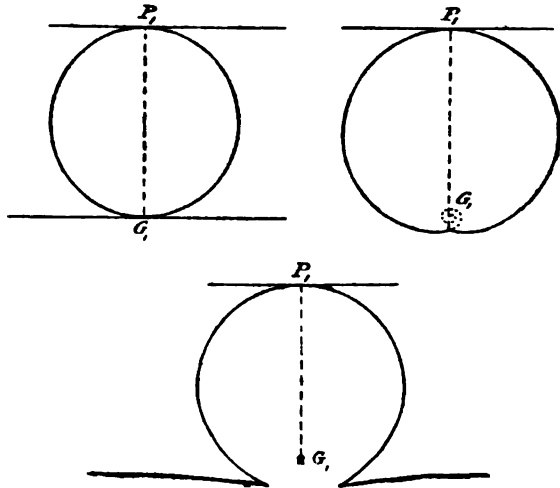
sche Bedeutung. Fig. 17 giebt die Gestalt der Curve  $C_u$ , die ganz unterhalb der Ebene  $E$  verläuft, an.

Wir haben die beiden speciellen Fälle betrachtet, dass für die Spitze  $y = l$  oder  $y = 0$  ist; ein anderer Grenzfall tritt ein, wenn in der Spitze  $y = l + n$  und also  $\phi = \phi_m$  wird. Dazu muss  $a = n + l = 0$  sein. Dann folgt aber aus (17), da  $R = \frac{n}{2}$ ,

also constant ist.  $C_u$  wird hier ein Kreis mit dem Durchmesser  $n$ ; da  $l = -n$  und  $a = 0$ , kann man sich alle Masse concentrirt denken in einem Punkt  $G$  der unteren Erzeugenden des Kreiscylinders. Dieses Resultat war zu erwarten, weil dann  $G$  eine concave Cycloide beschreibt. Der gefundene Kreis ist auf verschiedene Weisen als ein Grenzfall zu betrachten. Wir können z. B.  $a = 0$  nehmen, und  $n + l$  sich der Null nähern lassen. Geschieht dies von der positiven Seite, so hat  $C_u$  die Gestalt der oben beschriebenen Spirale mit unendlich vielen Windungen um  $G_1$ . Lässt man  $l + n$  Null werden, so nähert sich eine Windung (für die  $y$  nicht klein ist) einem Kreis; die andern Windungen drängen sich alle in den Punkt  $G_1$  zusammen. Nähert sich aber  $l + n$  von der negativen Seite der Null, so nähert sich  $\phi_m$  dem Wert  $\pi$ . Die Curve  $C_u$  hat dann zwei Spitzen, die sich einander und  $G_1$  nähern; für diese Spitzen ist  $\phi$  nur wenig kleiner als  $\phi_m$ , so dass die Curve ausserhalb dieser Spitzen ungefähr geradlinig verläuft. Wenn  $y$  nicht wenig von  $l + n$  verschieden ist, so ist  $R$  nahe zu constant, nämlich gleich  $\frac{n}{2}$ , so dass sich  $C_u$  innerhalb der

*Spitzen einem Kreis nähert. Der Teil ausserhalb der Spitzen nähert sich einer Geraden und trennt sich bei dem Limes von*

Fig. 18.



dem Kreis ab. Die Figur 18 veranschaulicht diese Grenzübergänge.

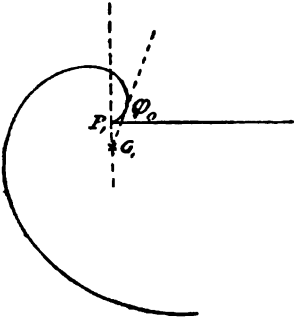
In dem Vorhergehenden haben wir unser Problem mathematisch idealisiert, indem wir zuliessen, dass die Curve  $C$ , sich selbst und die Ebene  $E$  durchdringt (was allerdings noch zu realisieren ist, wenn wir den Cylinder und die Ebene als bestehend aus schmalen Bändern betrachten). Wir haben, durch die Annahme eines negativen  $R_1$  auch zugelassen, dass der Cylinder nicht auf  $E$  ruht, sondern an der Ebene  $E$  hängt. Passiert der Berührungspunkt die Spitze von  $C$ , so geht das Hängen in Ruhen über

16. Ein Uebergangsfall zwischen den in § 14 und 15 betrachteten Fällen hat man, wenn  $R_1 = 0$ , also  $a^2 = -l(l + 2n)$  und wieder  $0 > l > -2n$ . Der Krümmungsradius  $R$ , der in  $P_1$  Null ist, nimmt von  $P_1$  an unbeschränkt zu; ebenso  $r$ . Man findet, dass für  $R_1 = 0$   $\phi_m$  wächst, wenn der absolute Betrag von  $l$  abnimmt. Für  $l = -2n$  ist  $\phi_m$  am kleinsten, nämlich  $\phi_m = \pi(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0,2929\pi$ . Lässt man dagegen  $l$  unbeschränkt abnehmen, so bekommt man eine Spirale mit

immer mehr Windungen um  $G_1$  herum; *schliesslich wird also  $C_n$  eine Curve, die in  $P_1$  in einer Spirale mit unendlich vielen Windungen um  $P_1$  anfängt; diese Spirale hat aber eine endliche Länge, wie man aus der Curve  $C_l$  sofort sieht.*

Ist  $0 < l < n$ , so hat  $C_n$  eine Tangente durch  $G_1$  ( $y = 0$ ).

Fig. 19.



Das  $\phi$  für diese Tangente ist

$$\phi_0 = \int_1^0 \sqrt{\frac{n+l-y}{(y-l)(y^2-l^2-2nl)}} \cdot dy.$$

Dieser Ausdruck nimmt zu (für  $0 < l < -n$ ), wenn der absolute Betrag von  $l$  abnimmt; für  $l = -n$  ist  $\phi_0 = \phi_\infty = 0,3987 \pi$ ; nimmt  $l$  unbeschränkt ab (immer für  $R_1 = 0$ ), so nähert sich  $\phi_0$  dem Limes  $\sqrt{2} = 0,4501 \pi$ . Die Tangente von  $G$  an die Curve  $C_n$  nähert sich also einem ganz bestimmten Limes, wie

das die Fig. 19 veranschaulicht.

## UEBER DIE SIMULTANINVARIANTEN ZWEIER KEGELSCHNITTE.

VON

JAN DE VRIES.

(Utrecht.)

1. In SALMON—FIEDLER, „*Analytische Geometrie der Kegelschnitte*“, 4. Auflage, S. 513, wird bemerkt, dass die Simultaninvariante  $\Theta$  verschwindet falls ein in Bezug auf den Kegelschnitt  $S$  sich selbst conjugirtes Dreieck dem Kegelschnitte  $S'$  eingeschrieben ist. Es fehlt aber der Nachweis der Umkehrung dieser Eigenschaft. Ueberdies ergibt sich bekanntlich aus  $\Theta = 0$ , dass  $S'$  einfach unendlich vielen Poldreiecken von  $S$  umbeschrieben ist (vergl. z. B. CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, t. I, p. 368). Ich möchte nun zeigen, wie einfach letztere Eigenschaft sich herleiten lässt.

2. Es sei  $P_1$  irgend ein Punkt von  $S'$ ,  $p_1$  seine Polare in Bezug auf  $S$ . Die Schnittpunkte von  $p_1$  und  $S'$  seien mit  $P_2$ ,  $P_3$  bezeichnet.

Das in Bezug auf  $S$  sich selbst conjugirte Dreieck, welchem  $P_1$  und  $P_2$  als Eckpunkte angehören, werde als Coördinaten-dreieck gewählt. Alsdann ist an zu setzen

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$S' \equiv a'_{33}x_3^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 = 0.$$

Nun ist

$$\Theta \equiv \Sigma A_{ii}a'_{ii} = a_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

Daher ergibt sich  $a'_{31} = 0$ , wenn  $\Theta = 0$  ist; d. h. der dritte Eckpunkt des Coördinatendreiecks fällt mit  $P_3$  zusammen, liegt somit auf  $S'$ .

Weil  $P_1$  ein beliebiger Punkt von  $S'$  ist, erhält hieraus,

dass die Punkte von  $S'$  sich in conjugirte Tripel anordnen lassen, indem jeder Punkt *einem* in Bezug auf  $S$  conjugirten Dreieck angehört.

3. Sind zwei Kegelschnitte auf ihr gemeinschaftliches sich selbst conjugirtes Dreieck bezogen, so hat man

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$\Theta = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11}, \quad \Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Aus  $\Theta = 0$  ergibt sich nun

$$\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{a_{33}} = 0;$$

es verschwindet somit die Simultaninvariante  $\Theta'$  der Kegelschnitte

$$S^* \equiv \frac{x_1^2}{a_{11}} + \frac{x_2^2}{a_{22}} + \frac{x_3^2}{a_{33}} = 0,$$

$$S' \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

d. h. in  $S^*$  lassen sich einfach unendlich viele Poldreiecke von  $S'$  beschreiben.

Beachtet man, dass  $S^*$  die Polarfigur von  $S$  in Bezug auf  $S'$  ist, so ergibt sich sofort, dass wenn  $\Theta = 0$ , dem Kegelschnitt  $S$  einfach unendlich viele Poldreiseite des Kegelschnitts  $S'$  umbeschrieben sind.

Auf analoge Weise lässt sich die Bedeutung von  $\Theta = 0$  für zwei quadratische Flächen ermitteln.

4. Es soll noch gezeigt werden, wie sich die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invariante  $\Delta$  eines Kegelschnitts auf einfache Weise ergibt.

Wählt man irgend drei Punkte des Kegelschnitts als Eckpunkte eines Coördinatendreiecks, so ist

$$S \equiv 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

daher

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 2a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Falls  $a_{31} = 0$ , wird

$$S \equiv 2x_2(a_{12}x_1 + a_{23}x_3) = 0;$$

wenn überdies  $a_{23} = 0$  ist, ergibt sich

$$S \equiv 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Jedenfalls sagt  $\Delta = 0$  also aus, dass  $S = 0$  ein Geradenpaar darstellt.

---



DE CENTRALE BEWEGING EN DE FUNCTIËN VAN WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

---

Wanneer hier de oplossing volgt van de beweging van een punt, dat gedreven wordt door een kracht, die voortdurend gericht is naar een centrum, en omgekeerd-evenredig is met de vijfde macht van den afstand van 't punt tot het centrum, dan is dat niet alleen, omdat nu de differentiaalvergelijkingen wortels uit vierdemachtsvormen bevatten, maar vooral om de voortreffelijkheid van 't gebruik der elliptische functiën van WEIERSTRASS te doen uitkomen.

De verschillende gevallen toch, die bij dit gebruik moeten beschouwd worden, stemmen volmaakt overeen met die, welke bij de grafische methode uit een figuur worden afgelezen (\*). De bewegingsvergelijkingen zijn als 't ware de analytische vertolking dier gevallen.

Wordt de massa van het bewegende punt gelijk één gesteld, dan is de krachtfunctie  $U = -\frac{1}{2}\alpha r^{-4}$ , wanneer  $\alpha$  de kracht is, die op het punt werkt, als het op den afstand één van het centrum is. Is verder  $\frac{1}{2}c$  de sectorsnelheid van de beweging en  $\frac{1}{2}h$  de energie van het punt, dan zijn de differentiaalvergelijkingen van de beweging

$$\begin{aligned}\frac{dr}{\sqrt{(2U + h)r^2 - c^2}} &= \lambda \, du \\ \pm dt &= \lambda r du \\ \pm d\theta &= \lambda c \frac{du}{r},\end{aligned}$$

---

(\*) Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3e Reeks, Deel 5.

welke we nu als volgt schrijven:

$$\left. \begin{aligned} \pm d\theta &= \frac{cdr}{\sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \frac{1}{4}\alpha}} \\ \pm dt &= \frac{r^2}{c} d\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots (A).$$

We stellen hierin

$$r^2 = pu + p(u - u_1) + pu_1,$$

waarin

$$pu_1 = \frac{c^2}{6h}, \text{ dus } p'^2u_1 = 4p^3u_1 - g_2pu_1 - g_3 = 0,$$

want

$$g_2 = \frac{c^4 - 6h\alpha}{12h^2}, \quad g_3 = \frac{c^2}{(6h)^3} (c^4 + 18h\alpha).$$

Verder is de discriminant  $\Delta = \frac{1}{16} (g_2^3 - 27g_3^2)$  hier gegeven door

$$2^9 h^6 \Delta = -\alpha h (c^4 + 2ah)^2.$$

Omdat nu

$$\sqrt{h} \frac{dr}{du} = \sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \frac{1}{4}\alpha} = -\sqrt{h}(p(u + u_1) - pu)$$

is, gaan de differentiaalvergelijkingen (A) over in

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= pu + p(u - u_1) + pu_1 \\ \pm d\theta &= \frac{c}{\sqrt{h}} du \\ \pm dt &= \frac{r^2}{c} d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B).$$

Ter integratie van deze vergelijkingen moeten achtereenvolgens de volgende gevallen onderscheiden worden.

1.  $\alpha > 0$ , dus de werking van het centrum afstootend.

Is  $\alpha > 0$ , dan is  $h > 0$ ,  $\Delta < 0$ ,  $g_3 > 0$ , zoodat  $e_2 =$  de eenige bestaanbare wortel van  $p'^2u = 0$  ook positief is. Omdat  $p'u_1 = 0$  is, moet  $pu_1 = e_2 = p\omega_2$  gesteld worden.

De differentiaalvergelijkingen (B) zijn dus in dit geval

$$r^2 = pu + p(u - \omega_2) + p\omega_2$$

$$\pm d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}} du$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta.$$

Zoowel voor  $u = 0$  als  $u = \omega_2$  is  $r^2$  oneindig groot, voor  $u = \frac{\omega_2}{2}$  is  $r^2 = 2p\frac{\omega_2}{2} + p\omega_2$ . Dit is een minimum-waarde van  $r^2$ , omdat voor  $u = \frac{\omega_2}{2}$   $\frac{dr}{dt} = p(u + \omega_2) - pu$  gelijk nul is.

De baan heeft dus een perihelium, en strekt zich van daar tot 't oneindige uit.

Worden  $\theta$  en  $t$  gerekend van 't oogenblik af, dat het punt dat perihelium passeert, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= pu + p(u - \omega_2) + p\omega_2 \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{h}} \left( \frac{\omega_2}{2} - u \right) \\ \sqrt{h} t &= \zeta u + \zeta(u - \omega_2) + \left( \frac{\omega_2}{2} - u \right) p\omega_2 \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

De baan is dus van hyperbolischen aard; de beide voerstraalen naar de beide oneindige punten van de baan, die dus in de asymptotische richtingen van de baan loopen, maken onderling een hoek gelijk  $\frac{c}{\sqrt{h}} \omega_2$ . De asymptoten echter van de baan gaan niet door het centrum, want de snelheid op oneindigen afstand is  $\sqrt{h}$ , en  $\sqrt{h} \times$  afstand van het centrum tot asymptoot  $= c$ , zoodat die afstand is  $\frac{c}{\sqrt{h}} = \sqrt{6e_2}$ . Verder blijkt uit de laatste bewegingsvergelijking, dat zoowel voor  $u = 0$  als  $u = \omega_2$   $t = \infty$  is; het punt beweegt zich dus voortdurend.

2.  $\alpha < 0$  en  $h < 0$ , dus de werking van het centrum aantrekkend en de energie van de beweging negatief.

Nu is  $\Delta < 0$ ,  $g_3 < 0$ , dus  $e_2 < 0$  evenals  $\frac{c^2}{6h} = pu_1$ , zoodat ook hier  $pu_1 = pu_2 = e_2$  gesteld moet worden.

De differentiaalvergelijkingen (B) gaan in dit geval over in

$$\begin{aligned} r^2 &= pu + p(u - \omega_2) + p\omega_2 \\ \pm d\theta &= \frac{c}{\sqrt{-h}} diu \\ \pm dt &= \frac{r^2}{c} d\theta. \end{aligned}$$

Zal  $\theta$  bestaanbaar wezen, dan moet  $u$  den vorm  $iu +$  standvastige aannemen; daar ook  $r^2$  bestaanbaar moet zijn, zal voor  $u$  gesteld moeten worden  $iu - \frac{\omega_2}{2}$ .

De differentiaalvergelijkingen zijn dus hier

$$\begin{aligned} r^2 &= p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + p\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right) + p\omega_2 \\ \pm d\theta &= \frac{c}{\sqrt{-h}} du \\ \pm dt &= \frac{r^2}{c} d\theta. \end{aligned}$$

Voor  $iu = 0$  is  $r^2 = 2p \frac{\omega_2}{2} + p\omega_2$  en  $\frac{dr}{du} = p\left(iu - \frac{\omega_2}{2} + \omega_2\right) - p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) = 0$ , terwijl voor  $iu = \frac{\omega_2'}{2}$

$$r^2 = p\omega_1 + p\omega_2 + p\omega_3 = 0 \text{ is.}$$

De baan voert dus tot het centrum en heeft een aphelium op een afstand  $\sqrt{2p \frac{\omega_2}{2} + p\omega_2}$  tot het centrum.

Worden  $\theta$  en  $t$  gerekend van het oogenblik, dat het aphelium wordt gepasseerd, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + p\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right) + p\omega_2 \\ \theta &= \frac{c}{\sqrt{-h}} u \\ \sqrt{-h} t &= \nu p\omega_2 + i\left(\zeta\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + \zeta\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right)\right) \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

De hoek, die door den voerstraal beschreven wordt gedurende de beweging van uit het aphelium tot het centrum is

$\frac{c}{\sqrt{-h}} \cdot \frac{\omega'_2}{2i}$ , dus eindig, en de tijd, waarin dit geschiedt,

is  $\frac{1}{\sqrt{-h}} \left\{ \frac{\omega'_2}{2i} p\omega_2 + i\zeta\omega_1 + i\zeta\omega_3 \right\}$ , dus ook eindig.

Het punt beschrijft dus een spiraalvormige baan, en komt met oneindig groote snelheid in het centrum aan.

3.  $\alpha < 0$ ,  $h > 0$ .

Nu is  $\Delta > 0$ , zoodat  $pu_1 = \frac{c^2}{6h} > 0$  gelijk gesteld moet worden aan  $e_1$ , den grootsten wortel van  $p^2u = 0$ , doch ook gelijk kan gesteld worden aan  $e_2$ , den middelsten wortel, zoo deze positief, dus  $g_3 < 0$  is.

Uit

$$\sqrt{h} \frac{dr}{du} = \sqrt{hr^4 - c^2r^2 - \frac{1}{4}\alpha}$$

volgt, dat  $\frac{dr}{du}$  voor  $c^4 + 2\alpha h > 0$  nul kan worden, doch voor  $c^4 + 2\alpha h < 0$  nooit. In 't eerste geval kan de baan dus een peri- of aphelium hebben, in 't tweede geval niet.

De vorm voor  $r^2$  in (B) kan nu de volgende gedaanten aannemen:

$$r^2 = pu + p(u - \omega) + p\omega$$

$$r^2 = p(u + \omega') + p(u + \omega' - \omega) + p\omega = p(u + \omega') + p(u + \omega'') + p\omega$$

$$r^2 = pu + p(u - \omega'') + p\omega''$$

$$r^2 = p(u + \omega') + p(u + \omega' - \omega'') + p\omega'' = p(u + \omega') + p(u + \omega) + p\omega''.$$

Omdat de laatste uitdrukking voor  $r^2$  uit de voorlaatste verkregen wordt, door hierin  $u$  in  $u + \omega$  te veranderen, kan deze vorm buiten beschouwing blijven.

In de eerste uitdrukking voor  $r^2$  is  $r^2$  oneindig groot, zoowel voor  $u = 0$  als voor  $u = \omega$ ; voor  $u = \frac{\omega}{2}$  is  $r^2 = 2p\frac{\omega}{2} + p\omega$ , terwijl

dan tevens  $\frac{dr}{du} = p(u + \omega) - pu$  voor die waarde van  $u$  gelijk nul wordt. De baan heeft dus een perihelium, zoodat  $c^4 + 2\alpha h > 0$  is.

De differentiaalvergelijkingen (B) gaan in dit geval over in

$$r^2 = p u + p(u - \omega_2) + p\omega_2$$

$$\pm d\theta = \frac{c}{\sqrt{-h}} diu$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta.$$

Zal  $\theta$  bestaanbaar wezen, dan moet  $u$  den vorm  $iu +$  standvastige aannemen; daar ook  $r^2$  bestaanbaar moet zijn, zal voor  $u$  gesteld moeten worden  $iu - \frac{\omega_2}{2}$ .

De differentiaalvergelijkingen zijn dus hier

$$r^2 = p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + p\left(iu + \frac{\omega_2}{2}\right) + p\omega_2$$

$$\pm d\theta = \frac{c}{\sqrt{-h}} du$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta.$$

Voor  $iu = 0$  is  $r^2 = 2p \frac{\omega_2}{2} + p\omega_2$  en  $\frac{dr}{du} = p\left(i - p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right)\right) = 0$ , terwijl voor  $iu = \frac{\omega_2}{2}$

$$r^2 = p\omega_1 + p\omega_2 + p\omega_3 =$$

De baan voert dus tot het centrum

op een afstand  $\sqrt{2p \frac{\omega_2}{2} + p\omega_2}$  tot 1

Worden  $\theta$  en  $t$  gerekend van h lium wordt gepasseerd, dan zijn

$$r^2 = p\left(iu - \frac{\omega_2}{2}\right) + 1$$

$$\theta = \frac{c}{\sqrt{-h}} u$$

$$1 - h = 2p\omega_2 + 1$$



In de tweede waarde voor  $r^2$  is voor  $u = 0$

$$r^2 = p\omega + p\omega' + p\omega'' = 0,$$

en voor  $u = \frac{\omega}{2}$  is

$$r^2 = p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + p\omega + p\left(\frac{\omega}{2} + \omega''\right) = p\omega + 2p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right),$$

terwijl dan  $\frac{dr}{du} = p(u + \omega' + \omega) - p(u + \omega') = 0$  is. De baan heeft dus een aphelium, zoodat ook hier  $c^4 + 2\alpha h > 0$  is.

In den derden vorm voor  $r^2$  eindelijk is  $r^2 = \infty$  voor  $u = 0$ , en  $r^2 = 0$  voor  $u = \omega$ , want dan is

$$r^2 = p\omega + p(\omega - \omega'') + p\omega'' = p\omega + p\omega' + p\omega''.$$

Omdat  $\frac{dr}{du} = p(u + \omega'') - p u$  nimmer nul wordt, zal de baan geen peri- of aphelium vertoonen, en zich zoowel tot het centrum als tot het oneindige uitstrekken. Hier is dus  $c^4 + 2\alpha h < 0$ .

Voor  $c^4 + 2\alpha h > 0$  worden dus onder dezelfde omstandigheden twee verschillende banen beschreven, een met een perihelium en van hyperbolischen aard, de andere met een aphelium en in den vorm van een spiraal, die naar het centrum voert. Waar het van afhangt, welke van deze twee banen door het punt wordt beschreven, zal straks blijken. Alleen zij opgemerkt, dat de perihelium-afstand van de eene baan

$\left(\sqrt{2p \frac{\omega}{2} + p\omega}\right)$  grooter is dan de aphelium-afstand

$$\left(\sqrt{2p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + p\omega}\right)$$

van de tweede.

De differentiaalvergelijkingen (B) gaan dus in dit geval over in:

$$c^4 + 2\alpha h > 0$$

$$a) r^2 = pu + p(u - \omega) + p\omega \quad b) r^2 = p(u + \omega') + p(u + \omega'') + p\omega$$

$$\pm d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}} du \quad \text{en} \quad \pm d\theta = \frac{c}{\sqrt{h}} du$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta \quad \pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta$$



$$c^4 + 2\alpha h < 0$$

$$c) \quad r^2 = pu + p(u - \omega'') + p\omega''$$

$$\pm d\theta = \frac{c}{V\bar{h}} du$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta.$$

a) Worden  $t$  en  $\theta$  gerekend van af het passeeren van het perihelium  $\left(\sqrt{2p\frac{\omega'}{2} + p\omega}\right)$ , dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= pu + p(u - \omega) + p\omega \\ \theta &= \frac{c}{V\bar{h}} \left(\frac{\omega}{2} - u\right) \\ V\bar{h} t &= \zeta u + \zeta(u - \omega) + \left(\frac{\omega}{2} - u\right)p\omega \end{aligned} \right\} \dots (3_1).$$

De baan is van hyperbolischen aard, evenals in het eerste geval, en de beweging eeuwigdurend.

b) Worden  $\theta$  en  $t$  gerekend van het oogenblik, dat het punt het aphelium  $\left(\sqrt{2p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) + p\omega}\right)$  van de baan passeert, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p(u + \omega') + p(u + \omega'') + p\omega \\ \theta &= \frac{c}{V\bar{h}} \left(\frac{\omega}{2} - u\right) \\ V\bar{h} t &= \zeta(u + \omega') + \zeta(u + \omega'') + \left(\frac{\omega}{2} - u\right)p\omega \end{aligned} \right\} \dots (3_2).$$

De baan is een spiraal, langs welke het punt in eindigen tijd met oneindig groote snelheid in het centrum komt.

c) De bewegingsvergelijkingen in dit geval zijn

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= pu + p(u - \omega'') + p\omega'' \\ \theta &= \frac{c}{V\bar{h}} u + \text{standv.} \\ V\bar{h} t &= \zeta u + \zeta(u - \omega'') - u p \omega'' + \text{standv.} \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

De baan strekt zich uit van het centrum tot het oneindige. De beweging van het centrum af duurt altijd; die naar het centrum is eindig.

4. Het bijzondere geval  $c^4 + 2\alpha h = 0$ .

Dan is

$$\Delta = 0, \quad g_2 = \frac{c^4}{3h}, \quad g_3 = -\left(\frac{c^2}{3h}\right)^3,$$

dus

$$e_1 = e_2 = -\frac{1}{2}e_3 = \frac{c^2}{6h}, \quad \omega = \omega'' = \infty,$$

en

$$\rho u = -\frac{c^2}{3h} + \rho^2 \left( \frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}} \right)^2, \quad \rho^2 = \frac{c^2}{2h},$$

$$\zeta u = -\frac{c^2}{6h} u + \rho \frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}.$$

De perihelium-afstand van (3<sub>1</sub>) en de aphelium-afstand van (3<sub>2</sub>) vallen samen met  $\sqrt{3e_1} = \sqrt{\frac{c^2}{2h}} = \rho$ .

De differentiaalvergelijkingen a) geïntegreerd in dit geval geven

$$r^2 = \rho u - e_3 \quad \text{of} \quad r = \rho \frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}$$

$$\theta = \frac{c}{\sqrt{h}} u + \text{standv.}$$

$$\sqrt{h} t = \zeta u + e_3 u = \rho^2 u + \rho \frac{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}.$$

De baan strekt zich eenerzijds tot het oneindige uit, anderzijds gaat ze met oneindig veel windingen asymptotisch tot den cirkelomtrek met den straal  $\rho$  (baan met asymptotischen binnencirkel). Noch die cirkel, noch het oneindige wordt ooit door het punt bereikt.

De differentiaalvergelijkingen (b) in dit geval geïntegreerd, geven als bewegingsvergelijkingen

$$r^2 = p(u + \omega') - e_3 \quad \text{of} \quad r = \rho \frac{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}{e^{\rho u} + e^{-\rho u}}$$

$$\theta = \frac{c}{Vh} u + \text{standv.}$$

$$Vh t = \rho^2 u - \rho \frac{e^{\rho u} - e^{-\rho u}}{e^{\rho u} + e^{-\rho u}} + \text{standv.}$$

De baan voert eenerzijds naar het centrum, anderzijds met oneindig veel windingen asymptotisch tot den cirkelomtrek met den straal  $\rho$  (baan met asymptotischen buitencirkel). De beweging naar het centrum duurt een eindigen tijd, die van het centrum af oneindig lang.

Deze twee gevallen kunnen ook rechtstreeks behandeld worden, aangezien de differentiaalvergelijkingen (A) nu zijn

$$\pm d\theta = \frac{cdr}{Vh(r^2 - \rho^2)}$$

$$\pm dt = \frac{r^2}{c} d\theta.$$

Uit deze oplossing blijkt verder, dat de baan ( $\beta_1$ ) of de baan ( $\beta_2$ ) zal gevolgd worden, naarmate het punt bij het begin der beweging zich *buiten* of *binnen* den cirkel met den straal  $\rho$  bevindt.

Is eindelijk het punt bij 't begin der beweging *op* dien cirkel, dan beschrijft het dezen met eenparige beweging, omdat dan niet alleen  $\frac{dr}{du}$ , maar *alle* afgeleiden van  $r$  naar  $u$  gelijk nul zijn.

---

## JOHANN WENDEL TESCH

(1840—1901).

Onder hen, die naar de mate hunner krachten tot den bloei van het Wiskundig Genootschap hebben bijgedragen, moet de naam van TESCH in de eerste plaats genoemd worden. Daarom mag in de eerste aflevering van het *Nieuw Archief*, die na zijn overlijden verschijnt, een enkel waardeerend woord zijn plaats vinden.

---

De uiterlijke levensomstandigheden van TESCH zijn spoedig vermeld.

Den 26<sup>ten</sup> September 1840 in de residentie geboren, verbond hij zich reeds in 1860 als onderwijzer in wiskunde aan het bekende Instituut van VLIET aldaar. In 1866 nam hij een benoeming aan tot leeraar in wiskunde aan de nieuw opgerichte hogere burgerschool te Zaandam. Hoewel zijn verblijf daar van korten duur was, had het toch een beslissenden invloed op zijn levenslot, wijl het hem kennis deed maken met Mej. C. STOFFEL uit Deventer en deze kennismaking tot een gelukkig huwelijk leidde. Van 1867 tot 1878 was hij leeraar in wiskunde aan de hogere burgerschool te Amsterdam; toen keerde hij naar zijn geboorteplaats terug om er de leiding van het Instituut, waaraan hij als onderwijzer verbonden geweest was, over te nemen. Tot Maart 1901 mocht hij hieraan zijn beste krachten wijden. En veel heeft hij voor zijne school gedaan, die aan een lagere school een inrichting verbond, welke met een driejarige hogere burgerschool gelijk te stellen was. Toen echter openbaarde zich de kwaal, die hem moest slopen, in die mate, dat hij zich genoodzaakt zag het dagelijksch werk aan andere handen toe te vertrouwen. Een verblijf in de Scheveningsche boschjes mocht niet baten; den 3<sup>den</sup> Juli ging hij kalm heen. Bij zijne begrafenis op den 6<sup>den</sup> Juli,



J. W. T.

# JOHANN WENDEL TESCH

(1840—1901).

Tesch, die naar de meer kammer teeren toe van het Wiskundig Genootschap hebben bijgestaan, was een van Teschen in de eerste afdeeling genoemd worden. In de eerste afdeeling van het Nieuw-Tijdschrift van de Wiskunde, een oekel waardachtend penants Verloren.

De eerste levensomstandigheden van TESCH zijn

hij is geboren op 17 september 1840 in de residentie geboren. Hij is in 1860 als onderwijzer in wiskunde aan de H. J. Teschen van Viter door. In 1866 nam hij ontslag van het leerjaar en wiskunde aan de nieuwste hogere burger-school te Zaamen. Hoewel zijn ver van Terten duur was, had het toch een beslissende op zijn leven-let, wijf het been kennis deed maken met G. Smeets en Deventer en deze kennismaking tot een big heweljk hilde. Van 1867 tot 1868 was hij wiskunde aan de hogere burger-school te Amsterd. keerde hij naar zijn geboorteplaats terug om er de H. het Instituut, waaraan hij als onderwijzer verbonden was, over te nemen. Tot Maart 1901 mocht hij hier beste krachten vinden. En veel heeft hij voor zijn geest, die aan een hogere school een inrichting van welke met een ongelijke hogere burger-school gelijk was. Toen echter opende zich de kwaal, die hem liepen, in die rechte, dat hij zich genoodzaakt zag om Teschen veel aan andere handen toe te vertrouwen. Het in de Smeetsdagsche beschijf meent niet haren. Het ging hij halm heen. Bij zijn begrafenis op den



J. W. TESCH.





waar de voorzitter en andere leden van het Wiskundig Genootschap aanwezig waren, werd hem bij monde van den eersten, CORN. L. LANDRÉ, de laatste eer bewezen.

In 1863 werd TESCH lid van het wiskundig genootschap en in 1869, dus kort nadat hij inwoner van de hoofdstad geworden was, nam hij zitting in het bestuur. In het in 1874 verschenen deel der „Wiskunstige opgaven met hare ontbindingen”, dat over 1870—1874 loopt en waarvan de naamlijst behalve bestuurders nog „buitengewone leden van verdienste in het wetenschappelijke vak”, „buitengewone leden van verdienste in het huishoudelijke vak”, „leden van verdienste eerste klasse”, „leden van verdienste tweede klasse”, „leden van de wetenschappelijke commissie”, enz. onderscheidde, staat TESCH en als „tweede secretaris” en als „inspecteur der boekery” vermeld. Dit deel bevat waarschijnlijk zijne eerste pennevruchten op wiskundig gebied, een achttal vraagstukken, waarvan er o.a. een is opgelost door H. A. LORENTZ. Doch aan het volgende deel der vraagstukken, dat onder den titel „Wiskundige opgaven met de oplossingen” een nieuwe reeks opende, zou TESCH een veel grooter aandeel hebben; in de naamlijst van dit in 1881 voltooide deel staat hij vermeld als „Redacteur der wiskundige opgaven”. Dat deze betrekking toen allerm minst een sinekuur was kan wel hieruit blijken, dat 64 van de 200 vraagstukken uit dit deel door TESCH zelve zijn opgegeven, van welke slechts 18 door hem aan andere tijdschriften waren ontleend. Gedurende de zes jaar, waarin dit deel in bewerking was, vloeiden nieuwe vraagstukken slechts traag toe en ook het aantal belangstellende oplossters was zeer afgenomen. Geheel in het vergeetboek geraakt scheen de aanmaning tot de leden van het genootschap gericht o.a. in den beschrijvingsbrief van de algemeene vergadering van 1865, waar het heette: „Eindelijk verzoek ik UEd. om HET OPGEVEN EN OPLOSSEN VAN VOORSTELLEN IN DE GEWONE STUKJES steeds als eene der voornaamste werkzaamheden ter beoefening en uitbreiding van wiskundige kennis, te blijven beschouwen, te willen bevorderen en aan te moedigen: het BESTUUR maakt UEd. daarom bij herhaling hierop in het Berigt van ieder Stukje opmerkzaam, noodigt UEd. dringend uit, om toch

vooral, zoo door het *inzenden van Voorstellen*, als door het *oplossen van de opgegevene Nieuwe Vraagstukken*, tot dit nuttige doel mede te werken, en alzoo de *belangrijkheid en de vermenigvuldiging der gewone STUKJES* te helpen bevorderen". Doch de nieuwe redacteur liet zich niet ontmoedigen. Van zijne verschillende woonplaatsen, Amsterdam (Bloemgracht MM 38 en 72, P. C. Hooftstraat 37) en 's-Gravenhage (Piet Heinstraat 1a en Molenstraat 53) bleef hij zijne „Nieuwe Opgaven" aan de leden rondzenden. En ongetwijfeld is het alleen aan zijne volharding toe te schrijven, dat de nieuwe reeks, waarvan thans het achtste deel in bewerking is, niet in de geboorte is gebleven; ongetwijfeld heeft zijne werkkraft toen het genootschap voor een ramp behoord.

Het zou ons te ver voeren de 64 door TESCH opgegeven vraagstukken naar de wetenschappelijke waarde te beoordeelen; bovendien hebben we aanstonds te wijzen op verdienstelijker werk. We kunnen er echter niet van afstappen zonder de aandacht te vestigen op een kenmerkenden karaktertrek, die zich er in openbaart, n.l. dezen, dat de redacteur zich zelf nooit op den voorgrond brengt. Van de 64 door hem opgegeven vraagstukken heeft hij bij slechts twee zijn eigen oplossing gepubliceerd. Bijzonder eigenaardig komt deze bescheidenheid, die TESCH kenmerkte, in het door hem aan STEINER ontleende vraagstukkendrietal 81—83 uit. Van het eerste en tweede waren oplossingen ingekomen, van het derde niet. En hoewel TESCH nu een oplossing van dit derde gevonden had, publiceerde hij die niet, omdat ze hem wat omslachtig voorkwam, en riep hij voor dit derde opnieuw de medewerking van de leden in met de toevoeging: „mocht er onverhoopt geen kortere oplossing inkomen, dan zal de redacteur de zijne geven aan het einde van dit deel"; werkelijk bevat het „aanhangel" een oplossing van een andere hand.

Met het tweede deel der nieuwe reeks „Wiskundige Opgaven", dat van 1882 tot 1886 in bewerking was, zag TESCH zijn volharding beloond; daarin kon het aantal der door hem zelfden opgegeven vraagstukken tot 23 dalen. Onder deze zijn er twee, die we nader moeten bespreken ten opzichte van hunne wetenschappelijke waarde; zij toch bevatten oorspronkelijk werk van blijvende beteekenis.

Zijn A, B, C, D de voetpunten der normalen uit een wille-

keurig punt  $P$  in het vlak van een middelpuntskegelsnee  $\epsilon$  op deze kegelsnee neergelaten, is  $A'$  het diametraal tegenover  $A$  gelegen punt en  $S$  het voetpunt van de loodlijn uit het middelpunt van  $\epsilon$  op de raaklijn in  $A'$  aan  $\epsilon$  neergelaten, dan liggen de punten  $A', B, C, D, S$  op een cirkel. Dit is de bekende stelling van JOACHIMSTHAL, met het punt  $S$  aangevuld door DE LONGCHAMPS. Deze stelling is echter niet omkeerbaar in dien zin, dat bij *elken* cirkel in het vlak van  $\epsilon$  een punt  $P$  van het vlak gevonden kan worden, waarvoor deze cirkel een der vier cirkels van JOACHIMSTHAL is; immers het aantal punten  $P$  van het vlak en dus het aantal cirkels van JOACHIMSTHAL is tweevoudig oneindig, terwijl het aantal cirkels in het vlak drievoudig oneindig is. En nu heeft TESCH aan het vraagstuk, dat reeds de aandacht van zooveel bekende wiskundigen getrokken had, een uitbreiding gegeven, waardoor de aangewezen leemte wordt aangevuld. Hij is namelijk op het gelukkige denkbeeld gekomen de werkelijke normalen te vervangen door lijnen, die in het punt der kegelsnee met de raaklijn aan die kromme in dat punt in bepaalden zin een van  $90^\circ$  verschillenden hoek  $\alpha$  maken, door zoogenaamde  $\alpha$ -normalen. Zoo vond hij, dat *elke* cirkel in het vlak der kegelsnee  $\epsilon$  deze kromme in vier punten snijdt, die bij vervanging van een van hen door het diametraal tegenover gelegen punt vier voetpunten van door een zelfde punt  $P$  gaande  $\alpha$ -normalen opleveren en wel voor een bepaalde waarde van  $\alpha$ , die gemakkelijk uit elk drietal der vier punten is af te leiden. Bovendien toonde hij aan, dat de door DE LONGCHAMPS gegeven uitbreiding in den meer algemeenen vorm behouden blijft in de volgende stelling: Zijn  $A, B, C, D$  de voetpunten der  $\alpha$ -normalen —  $\alpha$  nu gegeven gedacht — uit een punt  $P$  van het vlak van  $\epsilon$  op deze kromme neergelaten, is  $A'$  het diametraal tegenover  $A$  gelegen punt en  $S$  het voetpunt van de in denzelfden zin genomen  $\alpha$ -normaal uit het middelpunt van  $\epsilon$  op de raaklijn in  $A'$  aan  $\epsilon$  neergelaten, dan liggen de punten  $A', B, C, D, S$  op een cirkel.

Vergelijkt men deze uitkomst met de boven gegeven stelling van JOACHIMSTHAL, dan springt de buitengewone eenvoudigheid van de door TESCH gegeven uitbreiding in het oog. Het denkbeeld in het algemeen normalen door  $\alpha$ -normalen te vervangen was niet nieuw; reeds onderscheidde men naast de gewone ontwondene eener kromme, d. i. de omhullende harer normalen, de  $\alpha$ -ontwondene, de omhullende harer  $\alpha$ -normalen.

Wat echter nieuw is en de hoofdverdienste van TESCH uitmaakt, is de meesterlijke analytische toepassing van dit denkbeeld op de stelling van JOACHIMSTHAL, die mij indertijd dermate heeft bekoord, dat ik de verleiding niet heb kunnen weerstaan te trachten langs meetkundigen weg tot dezelfde uitkomst te geraken door in het oorspronkelijke geniale bewijs van JOACHIMSTHAL overal loodlijn door  $\alpha$ -loodlijn te vervangen; bij de behandeling der stelling van JOACHIMSTHAL is het mij dan ook altijd een genoegen op mijne lessen de schoone vondst van TESCH te vermelden en daarbij te verwijzen naar vraagstuk 160 van deel II der wiskundige opgaven. Kenmerkend is weer het bijschrift aan de oplossing toegevoegd: „Had de steller eerst het oog op de in deze vraag gestelde voorwaarde, langzamerhand breidde de oplossing zich uit tot de hier meegedeelde beschouwing, die misschien eenige nog niet bekende eigenschappen der ellips bevat, wat tot verschooning van de ongewone lengte moge dienen.” Kan het bescheidener?

Een tweede vraagstuk, dat om zijne wetenschappelijke betekenis der vermelding waardig is, staat eveneens met  $\alpha$ -normalen in verband en kan in een anderen zin als eene omkeering van de door TESCH uitgebreide stelling van JOACHIMSTHAL beschouwd worden. Gaat men van drie punten A, B, C van een middelpuntskegelsnee  $\epsilon$  uit, dan kan men altijd een hoek  $\alpha$  vinden, waarvoor de drie  $\alpha$ -normalen van A, B, C door eenzelfde punt P gaan. Denkt men zich nu de punten A, B, C en een hoek  $\alpha$  gegeven, doch  $\epsilon$  veranderlijk, dan heeft men den grondslag gevormd van vraagstuk 179. We kunnen daarbij vragen naar de meetkundige plaats van het snijpunt P dezer lijnen en die van het middelpunt M der kegelsnee, welke dan blijken kromme lijnen van den derden graad te zijn. Het merkwaardige van dit vraagstuk ligt echter hierin, dat TESCH naast de reeks van kegelsneden omgeschreven aan den coördinatendriehoek ABC een reeks van kegelsneden in dien driehoek beschreven gesteld heeft, waarbij dan de voorwaarde moet gelden, dat de voor een bepaalde waarde van  $\alpha$  genomen  $\alpha$ -normalen in de raakpunten dezer kegelsneden met de zijden van den coördinatendriehoek door een zelfde punt P gaan, en dan de opmerkelijke uitkomst verkregen wordt, dat voor een zelfde waarde van  $\alpha$  zoowel de meetkundige plaats der punten P als die van de middelpunten M in beide gevallen dezelfde wordt. Hoewel ik ook van deze beschouwingen een meetkundig pendant ge-

leverd heb, is het mij daarbij niet gelukt uit te maken, of men bij het naast elkaar stellen van de beide reeksen van kegelsneden aan een dieper inzicht in het wezen der dingen dan wel aan een bloot gelukkig toeval te denken heeft; in elk geval getuigt de meesterlijke greep van een hoogen graad van wiskundige ontwikkeling.

Was TESCH eenmaal met een onderwerp bezig, dan kon hij het moeielijk weer loslaten. Zoo is hij voor een derde maal op het normalenvraagstuk teruggekomen in een voordracht op het Natuur- en geneeskundig congres te Amsterdam in 1896; daar sprak hij over meetkundige plaatsen van punten P in het vlak eener ellips  $\epsilon$ , voor welke de constructie der vier normalen met behulp van gemakkelijk te construeeren kegelsneden kan geschieden. Verder bevat het *Nieuw Archief voor Wiskunde* twee opstellen van zijne hand en zijn verschillende kleine bijdragen van hem opgenomen in *L'intermédiaire des mathématiciens*.

Eene aanhaling uit een aan den Heer LANDRÉ gericht schrijven moge hier een plaats vinden: „Hoe gaarne had ik u gesproken over een mijner oudste en beste leerlingen, dien ge denzelfden ochtend de laatste eer hebt helpen bewijzen. Ik bedoel J. W. TESCH. Ik spreek nu van een tijd toen ik nog veel deed aan hoogere wiskunde. Slechts eens in de week, in den winter 's morgens zeer vroeg nog bij lamplicht, gaf ik hem les, hoofdzakelijk in de hoogere algebra. Daar zijn leerlingen van wie de onderwijzer zelf leert; tot dezen hoorde TESCH. Ik ondervond, dat TESCH een scherpen doordringenden blik had en een geboren mathematicus was. Ik stelde zooveel belang in hem, dat ik zijn examen middelbaar onderwijs bijwoonde. TESCH had niet veel moed. Tegelijk met hem legde iemand examen af, die reeds naam had op wiskundig gebied. Ik sprak TESCH moed in en voorspelde, dat hij wel zou slagen en de ander niet. En mijn voorspelling werd bewaarheid.”

Als medewerker aan de „*Revue semestrielle*” stond TESCH de redactie trouw ter zijde. Van de oprichting af aan leverde hij de analyse van het tijdschrift „*Mathesis*” en van eenige andere publicaties. Aan de samenstelling der eerste vijfjaarlijksche tabel had hij een werkzaam aandeel door de „*table des auteurs*” voor zijne rekening te nemen. Ook bij de samenstelling der achter iedere aflevering verschijnende naamlijst was hij tot kort voor zijn dood behulpzaam.

In **Tesch** verliest het Wiskundig Genootschap van Amsterdam een volijverig, behulpzaam en bescheiden medelid en de Nederlandsche wetenschap een talentvol wiskundige, wiens naam met eere moet worden genoemd. Zijn asch ruste in vrede.

P. H. SCHOUTE

## BIBLIOGRAPHIE.

---

Lezioni di Calcolo Infinitesimale. Lessen over differentiaal- en integraalrekening gegeven aan de Koninklijke Universiteit te Bologna door Dr. CESARE ARZELÀ. Deel 1, stuk 1. Een deel in 8°, 433 blz. Florence, Successori Le Monnier, 1901.

De titels der hoofdstukken en paragrafen zijn:

1. Limieten (getal- of puntgroepen, hulpstelling van DARBOUX, enz.)

2. Functies (bepaalde integralen, eigenschappen van bepaalde integralen, doorlopendheid van functies, ondoorlopendheid, integralen als functies harer veranderlijke bovenste grens, doorlopendheid van de som, het product, enz. van doorlopende functies, algemeene eigenschappen van over een geheele tusschenruimte doorlopende functies, tweede stelling van het gemiddelde).

3. Oneindig kleinen (oneindigheden).

4. Afgeleiden en haar beteekenissen (maxima en minima, aangroeiende en afnemende functies, afgeleiden van een integraal, afgeleiden van elementaire functies, omgekeerde functies).

5. Differentialen.

6. Stelling der middenwaarde.

7. Onbepaalde integralen (berekening eener bepaalde integraal met behulp van de onbepaalde integraal, stellingen met betrekking tot de afgeleiden en de onbepaalde integralen van sommen, producten, quotiënten van functies. Integratie bij gedeelte, functies van functies, integratie door substitutie).

8. Integratie van rationale functies (ontbinding van een rationale breuk in elementaire breuken, integratie van irrationeele differentiaal, integratie van transcendente differentiaal).

9. Integralen van functies met oneindigheids punten.

10. Integralen over een oneindige tusschenruimte.

11. Lengte van bogen van krommen.

12. Opeenvolgende afgeleiden en differentiaal (de formule van TAYLOR afgekort).

13. Uitdrukkingen, die zich onder een onbepaalden vorm voordoen.

14. Maxima en minima.

15. Reeksen van functies. Gelijkmatische convergentie. Doorlopendheid en integreerbaarheid eener reeks. Machtreeksen.

16. Reeksen van TAYLOR en van MACLAURIN.

Uit deze inhoudsopgaaf kan blijken, dat differentiaal- en integraalrekening gezamenlijk behandeld worden in dit gedeelte, dat aan de behandeling van functies met één veranderlijke is gewijd. Het tweede stuk van dit eerste deel zal op dezelfde wijs de theorie der functies met twee en meer veranderlijken ontwikkelen. Een tweede deel zal gewijd zijn aan de meetkundige toepassingen en in verband hiermee aan de differentiaalvergelijkingen en de variatie-rekening. S.

Leerboek der Mechanica met vele opgeloste vraagstukken en opgaven door J. VAN DER BREGGEN, Civiel-Ingenieur, Leeraar M. O. te Winterswijk. Een deel in 8°, 192 blz., 120 fig. Prijs f 2,25. Groningen, P. Noordhoff, 1901.

Dit leerboek is naar onze meening een uitstekende handleiding bij het onderwijs aan hogere burgerscholen. Wat de theorie aangaat, bereikt het wat zonder behulp van differentiaal- en integraalrekening te bereiken is; bovendien bevat het een groote reeks van met zorg gekozen uitgewerkte vraagstukken. Het centimeter-gram-seconde-stelsel is er in opgenomen.

Natuurlijk zijn er wel aanmerkingen te maken van ondergeschikt belang, die bij de verschijning van een tweeden druk van nut kunnen zijn. Zoo op de lijn MD van de titelfiguur, die loodrecht op BH behoort te staan, op de ~~twee~~ formules (50) zie blz. 175 en blz. 178, op de  $\gamma$  van fig. 63 die  $\alpha$  moet zijn, enz. Het is echter onnoodig deze hier op te geven. Want als de schrijver zelf zijn leerboek gebruikt bij zijn onderwijs, zal het hem gemakkelijk vallen desnoods met behulp van zijn leerlingen deze drukfouten in zijn eigen exemplaar te verzamelen.

De uitvoering is goed, de figuren zijn over het algemeen goed geteekend. Alleen is het niet duidelijk, waarom in fig. 35 niet gestippeld is, wat door het vlak V van het eene koppel wordt bedekt. S.

Oplossing van Vraagstukken uit de Analytische



Meetkunde van het platte vlak en der ruimte, voorkomende in „BRIOT et BOUQUET, Leçons de géométrie analytique”, benevens een gelijk aantal vraagstukken ter oefening door D. J. KORTEWEG, hoogleeraar te Amsterdam. Derde druk, vermeerderd en bewerkt door Dr. W. A. WYTHOFF. Een deel in 8°, 192 blz. 's Hertogenbosch, W. C. van Hensden, 1901.

Bij deze nieuwe bewerking van de bekende „Oplossingen”, waarvan de eerste druk in 1872, de tweede in 1880 verscheen, is de zestiende door APPELL bezorgde editie van BRIOT en BOUQUET's handboek gevolgd, dat zich, dank zij zijne voortreffelijke eigenschappen, in een telkens weer op de hoogte van zijn tijd gebrachten vorm blijft handhaven.

Voor de eerste maal strekt deze verzameling zich ook over ruimtevraagstukken uit. Teneinde echter omvang en prijs van het werkje niet te zeer te verhoogen heeft Dr. WYTHOFF zich daarbij beperkt tot de eerste reeks vraagstukken der aan de ruimte gewijde afdeeling en tot het eerste zestal van elk der beide daarop volgende reeksen. S°.

E. FOURREY. *Récréations arithmétiques*. Een deel in 8°, 261 blz. Parijs, Nony en Co., 1899.

Dit werkje is verdeeld in drie deelen. Het eerste handelt over de abstrakte getallen (merkwaardige eigenschappen van getallen, rekenkundige eigenschappen van getallen, rekenkundige bewerkingen, reeksen, polygonaalgetallen, vierkanten, kuben, deulers, verschillende vraagstukken over getallen), het tweede ontwikkelt de toepassingen (dagen der week, gedachte getallen te raden, oude vraagstukken, merkwaardige of luimige vraagstukken), het derde is geheel gewijd aan toovervierkanten (vorming, verschillende vormen en vervorming). S°.

Tychonis Brahe Dani die XXIV octobris a. d. MDCI defuncti operum primitias de nova stella summi civis memor denuo edidit regia societatis scientiarum Danica. Insunt effigies et manus specimen Tychonis. Een met bijzonder veel zorg bewerkt boekdeel in klein 4°, XVI + 138 blz., met een beeldtenis van TYCHO naar een penteekening, fijn van lijnen, die volgens sommigen aan den hollandschen graveur GOLTZIUS, volgens anderen aan den Augsburgser schilder GEMPERLIN wordt toegeschreven, en een fotografische afdruk van een handschrift van TYCHO (n°. 10932 van de keizerlijke bibliotheek van Weenen). Kopenhagen, 24 October 1901.

Behalve BRAHÉ's „de nova stella", waarvan het oorspronkelijke 1573 bij Laurentius Benedicti te Kopenhagen verscheen en in dezen vorm voorzoover bekend nog slechts vijf exemplaren bestaan, bevat dit prachtwerk een Proëmium behelzende de geschiedenis van het ontstaan der nieuwe uitgaaf, een bladwijz corrigenda en een woord aan den deenschen lezer. S.

Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodolit und die Tachymeterkippregel zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied. Beschreibung und Anleitung zum Gebrauch des Instruments und erster Genauigkeitsversuche von Dr. E. HAMMER, Professor an der K. technischen Hochschule in Stuttgart. Een brochure in 4°, 52 blz., 2 pl. Stuttgart, K. Wittwer, 1901.

Deze instrumenten kunnen den landmeter en waterpasser goede diensten bewijzen. Volgens de door den schrijver uitgewerkte voorbeelden wordt een afstand van 250 meter tot op omstreeks een halve meter en het hoogteverschil over dien afstand bij een helling van omstreeks 7° tot op eenige centimeters nauwkeurig bepaald. S.

Ueber die Geometrieen, in denen die Graden die Kürzesten sind. Inaugural-Dissertation van GEORG HAMEL. Een brochure in 8°, 92 blz. Göttingen, Dietrich, 1901.

De schrijver zoekt de *algemeenste* meetkunde, waarin rechte lijnen de kortste lijnen zijn; deze omsluit, behalve de euclidische meetkunde, ook verschillende soorten der niet-euclidische meetkunde, die door KLEIN, HILBERT en MINKOWSKI zijn behandeld. Dit algemeene vraagstuk is bovendien daarom belangrijk, dat het de oplossing geeft van een bijzonder geval van het omkeeringsvraagstuk der variatierekening: gegeven een bepaalde differentiaalvergelijking; gevraagd een probleem der variatierekening, waarvan deze vergelijking de vergelijking van LAGRANGE is. S.

De projectieve meetkunde en hare grondleggers door Dr. H. DE VRIES. Toespraak, gehouden den 9 October 1901, bij de opening zijner lessen in de Projectieve Meetkunde aan de Universiteit te Amsterdam. Een brochure in 8°, 30 blz. Amsterdam, H. G. van Dorssen, 1901.

Korte, lezenswaardige geschiedenis van de ontwikkeling der meetkundige onderzoekingen van de oudste tijden tot op heden.  
S.

**La Fonction Gamma; Theorie, Histoire, Bibliographie,** par MAURICE GODEFROY. Een deel in 8°, 88 blz. Prijs 3 fr. 50. Parijs, Gauthier Villars, 1901.

De gammafunctie door EULER gedefinieerd als een integraal, werd door GAUSS beschouwd als de limiet van een product, dat later door WEIERSTRASS in een eenigszins anderen vorm werd gebracht. De schrijver van het bovenstaand werkje neemt de definitie van GAUSS als uitgangspunt, ontwikkelt de bekende, maar vooral ook de minder bekende, eigenschappen van  $\Gamma(x)$  en geeft tot op zekere hoogte een zeer volledig overzicht van alles, wat thans aangaande  $\Gamma(x)$  bekend is.

De duidelijkheid en helderheid laat niet te wenschen over. Vooral zijn op prijs te stellen de talrijke bibliographische aanwijzingen en de mededeelingen aangaande minder bekende onderzoekingen, die niet zoozeer de gammafunctie betreffen, maar waartoe toch de gammafunctie aanleiding heeft gegeven. Een alphabetische tafel aan het einde vergemakkelijkt het naslaan.  
Kl.

J. BOUSSINESQ. *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière.* Tome I. *Problèmes généraux.* Een deel in groot 8°, XVI, 383 p. Parijs, Gauthier Villars, 1901.

Gelijk de titel uitdrukt en de schrijver in een uitvoerige inleiding nader uiteenzet, wordt in dit boek de analytische theorie der warmtegeleiding op een nieuwen grondslag gevestigd. De vooral door FOURIER ontwikkelde behandelingswijze gaat uit van de destijds algemeen aangenomen voorstelling der warmte als een soort elastische vloeistof, wier drukverschillen door ons als temperatuurverschillen worden waargenomen. Thans weet men, dat de warmte een vorm van energie is, energie van onregelmatige bewegingen der moleculen of van trillingen in den ether. De temperatuur, aangevende de gemiddelde intensiteit der bewegingen, heeft alleen beteekenis voor een eindige ruimte, niet meer voor een enkel molecuul. Het is dus niet overbodig na te gaan, of de grondstellingen van FOURIER en zijn opvolgers thans blijven bestaan. Dit is

(Deze bladzijde wordt in stuk 4 herhaald.)

# I N H O U D.

<b>R 1 e.</b>	<b>F. J. VAES.</b> De vergelijking voor de indeeling der stan- genvierhoeken . . . . .	Bl. 242
<b>D 6 c c.</b>	<b>J. C. KLUYVER.</b> Ontwikkelingscoëfficiënten, die eenige overeenkomst met de getallen van Bernouilli vertoonen . . . . .	249
<b>R 7 b, F 2 h, 8 h.</b>	<b>G. SCHOUTEN.</b> De centrale beweging en de functiën van Weierstrass . . . . .	255
<b>I 2 a.</b>	<b>E. D. J. DE JONGH Jr.</b> Over het kleinste gemeene veel- voud van meer dan twee getallen. . . . .	262
<b>K 14 c, c a, g.</b>	<b>F. J. VAES.</b> De opvulling der ruimte door regelmatige en half-regelmatige lichamen . . . . .	268
<b>R 8 c γ.</b>	<b>F. SCHUM.</b> Ueber die Gestalt eines schweren Cylinders, der, auf einer horizontalen Ebene rollend, tautochron schwingt. . . . .	277
<b>L 18 a.</b>	<b>JAN DE VRIES.</b> Ueber die Simultaninvarianten zweier Kegelschnitte . . . . .	288
<b>R 7 b, F 2 h, 8 h.</b>	<b>G. SCHOUTEN.</b> De centrale beweging en de functiën van Weierstrass . . . . .	301
<b>V 9.</b>	<b>P. H. SCHOUTE.</b> Johann Wendel Tesch (1840—1901) . . . . . Bibliographie . . . . .	310 317
	<b>CESARE ARZELÀ.</b> Lezioni di Calcolo infinitesimale. Florence, Successori Le Monnier, 1901.	
	<b>J. VAN DER BREGGEN.</b> Leerboek der Mechanica. Gro- ningen, P. Noordhoff, 1901.	
	Oplossing van Vraagstukken uit de Analytische Meetkunde van het platte vlak en der ruimte, voor- komende in „BRIOT et BOUQUET. Leçons de géométrie analytique”, benevens een gelijk aantal vraagstukken ter oefening door D. J. KORTEWEG, hoogleeraar te Amsterdam. Derde druk, vermeerderd en bewerkt door Dr. W. A. Wythoff. 's-Hertogenbosch, W. C. van Heusden, 1901.	
	<b>E. FOURREY.</b> Récréations arithmétiques. Parijs, Nony en Co., 1899.	
	<b>Tychonis Brahe Dani die XXIV octobris a. d.</b> <b>MDCI defuncti operum primitias de nova</b> <b>stella summi civis memor denuo edidit regia socie-</b> <b>tatis scientiarum Danica.</b> Kopenhagen, 1901.	
	<b>E. HAMMER.</b> Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter- Theodolit und die Tachymeterkippregel zur unmittel- baren Lattenablesung von Horizontalabstand und Höhen- unterschied. Stuttgart, K. Wittwer, 1901.	
	<b>GEORG HAMEL.</b> Ueber die Geometrien. in denen die Graden die Kürzesten sind. Göttingen, Dieterich, 1901.	
	<b>H. DE VRIES.</b> De projectieve meetkunde en hare grond- leggers. Amsterdam, H. G. van Dorssen, 1901.	
	<b>MAURICE GODEFROY.</b> La Fonction Gamma. Parijs, Gauthier-Villars, 1901.	
	<b>J. BOUSSINESQ.</b> Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. t. I. Parijs, Gauthier- Villars, 1901.	

Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve  
men te richten aan den Secretaris der redactie, Dr. J. C. KLUYVER te Leiden.

*Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA, Groningen.*

# NIEUW ARCHIEF

VOOR

## WISKUNDE

---

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP  
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTENEG en P. H. SCHOUTE

---

TWEEDE REEKS  
DEEL V  
VIERDE STUK

---

AMSTERDAM  
DELSMAN EN NOLTHENIUS  
1902

de oppervlakken uitstrekken. Die temperatuur van den ether heeft evenwel alleen beteekenis, zoo de straling volkomen diffuus is. Achtereenvolgens worden afgeleid de verschillende ellipsoiden, aangevende bijv. de geleidbaarheid in de richting van het temperatuurverval of die in de richting van den warmtestroom. In het tiende hoofdstuk wordt dit toegepast op staafjes, plaatjes en kristallen.

Tot hiertoe had alles betrekking op den toestand op een enkel oogenblik. De invoering van den tijd  $t$  als nieuwe veranderlijke voert voor een ruimte  $\omega$  met oppervlak  $\sigma$  tot de vergelijking

$$\int_{\omega} C \frac{du}{dt} d\omega = \int_{\sigma} F_n d\sigma + \int_{\omega} \varphi d\omega,$$

waar  $C$  voorstelt de soortelijke warmte,  $u$  de temperatuur,  $F_n$  den normalen warmtestroom en  $\varphi$  de warmte in het inwendige uit den ether gabsorbeerd of uit andere energievormen ontstaan. Straling aan het oppervlak en convection worden samengesteld tot uitwendige geleidbaarheid, die de grenswaarden van het vraagstuk regelt. Het bewijs van het bestaan van een enkele bepaalde oplossing, in het bijzonder in de beide hoofdgevallen van afkoeling bij een ondoordringbaar oppervlak, en eindtoestand bij constante uit- en inwendige warmtetoevoer neemt het grootste deel van het twaalfde hoofdstuk in. In het volgende wordt aangetoond, hoe het algemeene probleem theoretisch tot deze beide bijzondere terug te brengen is, indien men den aanvangstoestand en den lateren warmtetoevoer weet te ontleden in „elementaire verwarmingen”, welke elk op zich zelf een onafhankelijk aandeel tot den eindtoestand leveren. Betrekkelijk eenvoudig wordt dit zoo de verwarming periodiek is; in dat geval nadert de eindtoestand zelf tot een periodieke.

De algemeene behandelingswijze is hiermede aangegeven. De nu volgende vijf hoofdstukken bevatten de toepassing, grootendeels overeenkomstig FOURIER, op de verwarming der aarde en de afkoeling bij ring, bol, kubus en cylinder.

Een laatste hoofdstuk bevat o. a. nog een analogie van de warmtestrooming met de beweging van een vloeistof in een poreus medium; aan de hand van de daaruit af te leiden theorie der warmte als vloeistof wordt nog eens gewezen op de moeilijkheden, die tegen deze opvatting pleiten.

E. VAN EVERDINGEN JR.

# **DEMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE STIRLING**

PAR

**L. U. H. C. WERNDLY.**

(Utrecht).

On trouve dans le recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal de Frenet — voir le 439<sup>ième</sup> problème :

$$-\frac{\pi}{2} l \cdot 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \sin x \cdot dx,$$

d'où l'on tire, en appliquant le théorème du produit infini du sinus :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} l \cdot 2 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{1^2 \cdot \pi^2}\right) dx + \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot \pi^2}\right) dx + \dots + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \cdot \pi^2}\right) dx + R. \end{aligned}$$

Or, on évalue facilement la première de ces intégrales partielles :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot x \cdot dx = \pi \left( \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l \cdot \pi \right).$$

Les intégrales suivantes, au nombre de  $n$ , s'évaluent selon la formule :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \cdot \pi^2}\right) dx = & \pi \left[ \left(k + \frac{x}{\pi}\right) l \cdot \left(k + \frac{x}{\pi}\right) - \right. \\ & \left. - \left(k - \frac{x}{\pi}\right) l \cdot \left(k - \frac{x}{\pi}\right) - \frac{2x}{\pi} - \frac{2x}{\pi} l \cdot k \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$= \pi [(k + \frac{1}{2})l \cdot (k + \frac{1}{2}) - (k - \frac{1}{2})l \cdot (k - \frac{1}{2}) - 1 - l \cdot k]$ ,  
 en  $y$  posant tout simplement  $k = 1, 2, 3, \dots n$ . Quant à la  
 quantité  $R$ , on a

$$R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2 \pi^2}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(n+2)^2 \pi^2}\right) dx + \dots +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(n+m)^2 \pi^2}\right) dx. \quad \{m = \infty\}$$

Dans cette expression  $x$  est tout au plus de même ordre que  
 $\pi$ ; donc, si on suppose  $n$  assez grande, pour qu'on puisse né-  
 gliger les puissances de  $\frac{1}{n}$  à partir de  $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ , on peut rem-  
 placer l'égalité précédente par:

$$R = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cdot dx}{(n+1)^2 \pi^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cdot dx}{(n+2)^2 \pi^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cdot dx}{(n+3)^2 \pi^2} - \dots -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cdot dx}{(n+m)^2 \pi^2} \cdot \quad \{m = \infty\}$$

$$= - \frac{\pi}{24} \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+m)^2} \right] = - \frac{\pi}{24} \cdot S.$$

Il est évident, que la série infinie  $S$  est absolument conver-  
 gente; donc, si ses termes sont partagés réitérativement en  
 trois autres (dont deux disparaissent chaque fois), elle se ré-  
 duit ainsi:

$$S = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots \text{ ad inf.}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \dots \text{ ad inf.} -$$

$$- S_1 = \frac{1}{n} - S_1;$$



$$S_1 = \frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)^2} + \dots \text{ad inf.}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \dots \text{ad inf.} \right] +$$

$$+ S_2 = \frac{1}{2n(n+1)} + S_2,$$

et ainsi de suite; on trouve à la fin :

$$S = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \frac{1 \cdot 2}{4n(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots -$$

$$- \frac{m!}{(m+2)n(n+1)(n+2) \dots (n+m+1)}.$$

{m = \infty}

$$= \frac{1}{n} - \left[ \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} - \dots \right] - \left[ \frac{1}{3n^3} - \frac{3}{3n^4} + \dots \right] -$$

$$- \left[ \frac{2}{4n^4} - \dots \right] - \left[ \dots \right]$$

Maintenant on pourra ranger les termes suivant les puissances descendantes de  $n$  aussi loin qu'on voudra; toutefois nous ne prendrons que les deux premiers termes, renonçant aux autres, de crainte que le terme du troisième ordre ne soit modifié par les termes sommés du quatrième ordre, que nous venons de négliger dans le développement du logarithme.

Par suite  $S = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$

Substituant dans l'équation primitive toutes les valeurs, ainsi déduites, on trouve la relation :

$$- \frac{\pi}{2} l \cdot 2 = \pi(n + \frac{1}{2})l \cdot (n + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} l \cdot \pi - \pi \cdot n -$$

$$- \pi [l \cdot 1 + l \cdot 2 + l \cdot 3 + \dots + l \cdot (n-1) + l \cdot n] - \frac{\pi}{24n} + \frac{\pi}{48n^2},$$

ce qui, par quelques réductions simples, revient à :

$$l \cdot (n!) = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi - n + (n + \frac{1}{2})l \cdot (n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{24n} + \frac{1}{48n^2}.$$

Ensuite on fait addition de  $0 = (n + \frac{1}{2})l \cdot n - (n + \frac{1}{2})l \cdot n$ , de sorte, qu'on trouve :

$$\begin{aligned}
 l.(n!) &= \frac{1}{2}l.(2\pi.n) + n.l.n - n + (n + \frac{1}{2}) \times \\
 &\left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{24n^5} - \dots \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{24n} + \frac{1}{48n^2} = \\
 &= \frac{1}{2}l.(2\pi.n) + n.l.n - n + \frac{1}{12n} + \frac{0}{n^2} + \dots
 \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$n! = \sqrt{2\pi.n} . n^n . e^{-n} \left( 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} \dots \right), \text{ q.e.d.}$$

On pourrait aussi se baser sur l'équation :

$$- \frac{\pi}{2} l.2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l. \cos . x . dx, \left\{ \text{au lieu de } \int_0^{\frac{\pi}{2}} l. \sin . x . dx. \right\}$$

mais alors, procédant d'une manière parfaitement analogue au calcul démontré ci-dessus, on trouverait :

$$1.3.5.7 \dots (2n-1) = 2^{n+\frac{1}{2}} . n^n . e^{-n} \left( 1 - \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2} \dots \right),$$

et pour parvenir ainsi à la formule de Stirling, il faudrait recourir au théorème de Wallis, en supposant que  $n$  crût infiniment.

UEBER EINE EINFACHE ERZEUGUNGSWEISE DER  
GEWÖHNLICHEN LEMNISCATE,

VON

H. DE VRIES.

(Haarlem.)

---

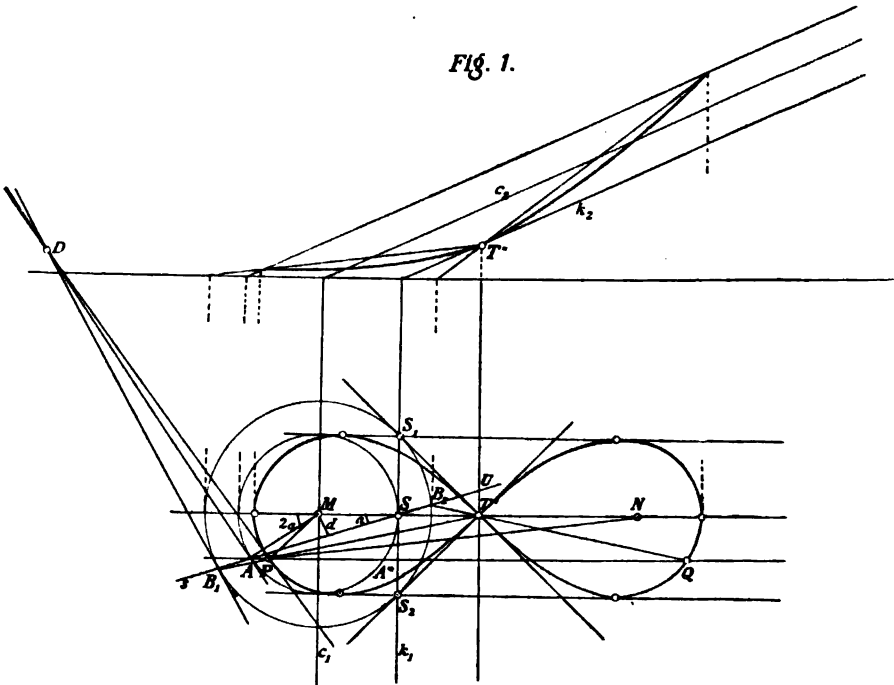
1. Die Lehre von den Kegeldurchdringungen führt auf einfache Weise zu der nachstehenden, rein planimetrischen Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniscate aus Punkten und Tangenten:

„Man beschreibe um einen beliebigen Punkt M als Mittelpunkt zwei concentrische Kreise mit den Radien  $r$  und  $r\sqrt{2}$ , wähle sodann auf dem kleineren der beiden Kreise einen beliebigen Punkt S (Fig. I) und bestimme auf der Geraden MS den Punkt T' derart dass S die Mitte werde zwischen M und T'. Nun ziehe man durch S eine beliebige Gerade  $s$ , welche den inneren Kreis ausser in S noch in einem zweiten Punkte A, den äusseren aber in den beiden Punkten B<sub>1</sub> und B<sub>2</sub> treffen möge, lege sodann durch A eine Parallele zu der Geraden MT' und verbinde B<sub>1</sub> und B<sub>2</sub> mit T'; dann ist der Ort der Schnittpunkte P, Q der beiden Geraden T'B<sub>1</sub>, T'B<sub>2</sub> mit der genannten Parallele durch A eine gewöhnliche Lemniscate, welche den Punkt T' zum Doppelpunkte und den Punkt M und seinen symmetrischen N in Bezug auf T' zu Brennpunkten hat. Und die Tangente in irgend einem der construirten Punkte, etwa P, erhält man als die Verbindungsline dieses Punktes mit dem Schnittpunkte D der beiden Kreistangenten in denjenigen Punkten A und B<sub>1</sub> aus denen P hervorgegangen ist.“

Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich aus folgenden Betrachtungen: es ist die gewöhnliche Lemniscate vollständig bestimmt durch die Eigenschaft eine bicirculare Curve vierter

Ordnung zu sein mit zwei zu einander senkrecht stehenden Symmetrieachsen, während der Schnittpunkt dieser Achsen für die Curve ein Doppelpunkt ist und die Tangenten in diesem Punkte unter sich rechte Winkel, und also zufolge der Symmetrie mit den Achsen Winkel van  $45^\circ$  einschliessen; und es ist nun leicht mit einem quadratischen Kegel und einem eben-solchen Cylinder eine solche Disposition zu treffen dass etwa die horizontale Projection ihrer Durchdringungcurve allen diesen Bedingungen genügt. Dazu gehen wir aus von einem quadratischen Cylinder mit kreisförmiger, in der horizontalen Bildebene gelegener, Leitcurve (der innere Kreis der Fig. 1), und wählen der Einfachheit halber die Erzeugenden dieses Cylinders

Fig. 1.



parallel der Aufrissebene, sodass ihre Grundrisse parallel der Projectiionsachse werden, während die Neigung ihrer Aufrisse gegen diese Achse keinerlei Beschränkung unterliegt. Nun wird bekanntlich die Durchdringung zweier quadratischer Oberflächen von irgend einem Centrum aus projectirt als eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei scheinbaren Doppelpunkten, deren stets reelle Verbindungslinie als die

Projection (aus dem nämlichen Centrum) derjenigen Gerade des Raumes erscheint in welcher die beiden Polarebenen des Centrum in Bezug auf beide Oberflächen sich schneiden; das Projectionscentrum nun für den Grundriss ist der Punkt  $Z_{\infty}$ ; sollen also die beiden cyklischen Punkte der Grundrissebene für die Projection unserer Durchdringung die beiden scheinbaren Doppelpunkte sein, so muss in erster Linie die Leitcurve des Kegels ebenfalls kreisförmig sein (der äussere Kreis der Fig. 1), und überdies muss die Schnittlinie der Polarebenen des Centrum  $Z_{\infty}$  in Bezug auf den Cylinder und den Kegel unendlich entfernt sein, damit ihr Grundriss die beiden cyklischen Punkte der horizontalen Bildebene verbinde; wir haben also dafür Sorge zu tragen dass diese beiden Polarebenen parallel werden. Dann aber muss der Kegel weiter so gewählt werden dass seine Spitze T auf dem Mantel des Cylinders liegt, damit nämlich dieser Punkt für die Durchdringung selbst, und also sein Grundriss T' für den Grundriss derselben ein Doppelpunkt werde. Und endlich müssen die Tangenten im Doppelpunkte T so beschaffen sein dass ihre Grundrisse am Punkte T' einen rechten Winkel einschliessen.

Allen diesen Bedingungen wird nun dadurch genügt dass man auf der Parallele durch M zur Projectionsachse den einen Schnittpunkt S mit der Leitcurve des Cylinders fixirt, den Grundriss T' der Kegelspitze auf dieser Gerade derart wählt dass S in der Mitte liegt zwischen M und T', den zugehörigen Aufriss T'' auf der untersten Erzeugende des Cylinders annimmt, und nun endlich als Leitcurve des Kegels den Kreis um M vom Radius  $r\sqrt{2}$  einträgt, wenn  $r$  der Radius der Cylinderleitcurve ist. Es ist nämlich die Polarebene des Punktes  $Z_{\infty}$  in Bezug auf den Cylinder die vertical projicirende Ebene  $c_1c_2$  durch M; soll nun die Polarebene des nämlichen Punktes in Bezug auf den Kegel mit der Ebene  $c_1c_2$  parallel sein, so muss ihre verticale Spur  $k_2//c_2$  sein, und also mit der verticalen Projection der Cylindererzeugende durch T zusammenfallen, während ihre horizontale Spur  $k_1//c_1$  sein muss; diese horizontale Spur ist aber die Polare des Punktes T' in Bezug auf die Leitcurve des Kegels, diese letztere muss also so bestimmt werden dass sie als Polare des Punktes T' die Gerade  $k_1$  ergibt. Allein sie muss noch einer weiteren Bedingung genügen; wenn man nämlich die Berührungsebene des Cylinders

länge der durch T gehenden Erzeugende, also die Ebene  $k_1 k_2$ , mit dem Kegel schneidet, so erhält man die beiden Tangenten im Doppelpunkte T der Durchdringung, deren Grundrisse wie wir wissen einen rechten Winkel einschliessen sollen; man erhält diese Grundrisse indem man die Schnittpunkte von  $k_1$  mit der Leitcurve des Kegels mit T' verbindet, also müssen diese Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  so gewählt werden dass  $SS_1 = SS_2 = ST'$  sei, und es muss die Leitcurve des Kegels die beiden Geraden T'S<sub>1</sub>, T'S<sub>2</sub> in  $S_1$  und  $S_2$  berühren, was eben geschieht wenn sein Mittelpunkt in M liegt; und weil nun  $SS_1 = SS_2 = ST' = SM = r$ , so ist der Radius dieses Kreises  $r\sqrt{2}$ . Schliesslich erhellt noch dass die Ebene durch die Gerade MT' parallel der Aufrissebene für die ganze Raumfigur eine Ebene orthogonaler Symmetrie, und also der Aufriß der Durchdringung ein Teil eines Kegelschnittes sein muss, der in T" die Gerade  $k_2$  berührt, während für den Grundriß die Gerade MT' eine Achse orthogonaler Symmetrie wird.

Durch die bisherigen Anordnungen haben wir nun sämtlichen Bedingungen genügt bis auf einer; es fragt sich nämlich ob der Grundriß unsrer Durchdringung nun auch symmetrisch ist in Bezug auf die durch T' senkrecht zur Gerade MT' gezogene Achse. Dies ist aber in der That der Fall, denn wenn wir nun dazu übergehen die Durchdringung wirklich zu construieren, so haben wir das Hülfebenenbüschel zu betrachten dessen Scheitellkante die durch T gehende Erzeugende des Cylinders ist, welche im Punkte S ihren ersten Durchstosspunkt hat, und dessen Ebenen also die Grundrissebene in den Strahlen s des Strahlenbüschels um S schneiden.

Trifft nun ein solcher Strahl die Cylinderleitcurve ausser in S noch in A, und diejenige des Kegels in B<sub>1</sub> und B<sub>2</sub>, so hat man durch A den Grundriß der diesen Punkt enthaltenden Cylindererzeugende, also die Parallele durch A zu MT', zu legen, und diese zu schneiden mit den Geraden T'B<sub>1</sub>, T'B<sub>2</sub>, womit dann die beiden Punkte P und Q des Grundrisses erhalten werden; weil aber die Gerade  $S_1 S_2 = k_1$  die Polare des Punktes T' in Bezug auf den äussern Kreis, und also die Gerade durch T' senkrecht zu MT' die Polare des Punktes S ist, so ist  $(B_1 B_2 S U) = -1$ , und wenn man diese vier harmonischen Punkte aus T' auf die Parallele durch A zu MT' projectirt, so erhält man P, Q, den unendlich fernen Punkt, und

den Schnittpunkt der beiden Geraden  $UT'$  und  $PQ$ , der also in der Mitte liegen muss zwischen  $P$  und  $Q$ , woraus sich ergibt dass unsere Curve in der That auch in Bezug auf die Achse  $UT'$  symmetrisch ist. Auch aus der Construction der verticalen Projection der Durchdringung ergibt sich die Symmetrie des Grundrisses in Bezug auf die Achse  $UT'$  wie leicht zu sehen unmittelbar; während schliesslich noch zu bemerken ist dass der Grundriss jeder Cylindererzeugende die Curve ausser in den Punkten  $P$  und  $Q$  noch in zwei anderen Punkten schneidet, deren Construction aus der Bemerkung hervorgeht dass die nämliche Gerade auch den Grundriss der durch den Punkt  $A^*$  gehenden Cylindererzeugende enthält; lässt man also die Spur  $s$  der zur Construction erforderlichen Hülfebene durch  $A^*$  gehen, so erhält man die beiden der Erzeugende durch  $A^*$  entsprechenden Punkte der Durchdringung. Überhaupt kann man sich die ganze Lemniscate noch auf andere Weise entstanden denken, nämlich als das Erzeugniss zweier einander in bestimmter Weise zugeordneter Strahlensysteme, des Parallelstrahlenbüschels dessen Strahlen alle die Richtung von  $MT'$  haben, und des Strahlenbüschels am Scheitel  $T'$ , dessen Strahlen  $T'B_1$ ,  $T'B_2$  überdies noch eine symmetrische Involution mit den Doppelstrahlen  $T'M$ ,  $T'U$  bilden.

Jedem Strahle des Parallelstrahlenbüschels entsprechen, wie wir bereits wissen, 4 Strahlen durch  $T'$ ; umgekehrt sind jedem Strahle durch  $T'$  zwei Strahlen des Parallelenbüschels zugeordnet, sodass zwischen beiden Büscheln eine (4,2) Verwandtschaft besteht. Aber dem gemeinsamen Strahle  $MT'$  beider Büschel entsprechen, wenn man ihn zum Parallelenbüschel rechnet, der Strahl  $MT'$ , doppelt gezählt, und die beiden Strahlen  $T'S_1$ ,  $T'S_2$ , und wenn man ihn zum andern Büschel zählt, wiederum der Strahl  $MT'$ , doppelt gezählt; an Stelle einer Curve 6<sup>er</sup> Ordnung, mit einem 4-fachen Punkte in  $T'$  und einem Doppelpunkte im unendlich entfernten Punkte von  $MT'$  erhält man also die Gerade  $MT'$ , doppelt gezählt, und eine Curve 4<sup>er</sup> Ordnung mit einem Doppelpunkte in  $T'$ .

Dass diese Curve bicircular ist erhellt wenn man die unendlich ferne Gerade der Ebene auffasst als einen Strahl des Parallelenbüschels und nun die 4 entsprechenden aufsucht; dann hat man diese Gerade mit der Cylinderleitcurve zu schneiden, was in den cyklischen Punkten geschieht, diese

mit  $S$  zu verbinden, die 4 Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Leitcurve des Kegels zu bestimmen, und diese endlich mit  $T'$  zu verbinden. Allein von diesen 4 Schnittpunkten sind zwei die cyklischen Punkte selbst, sagen wir  $C_1$  und  $C_2$ ; und wenn nun  $C_1S$  die Leitcurve des Kegels noch in  $S_1$ ,  $C_2S$  dieselbe noch in  $S_2$  schneidet, so gehen, weil  $T'$  auf der Polare von  $S$  in Bezug auf diese Leitcurve liegt und die cyklischen Punkte in Bezug auf  $MT'$  symmetrisch liegen, die Geraden  $S_1C_2$  und  $S_2C_1$  gerade durch  $T'$ , d.h. die 4 der unendlich fernen Gerade entsprechenden Strahlen  $T'C_1$ ,  $T'C_2$ ,  $T'S_1$ ,  $T'S_2$  fallen paarweise zusammen; und hieraus ergibt sich sofort dass  $C_1$  und  $C_2$  Doppelpunkte des Erzeugnisses sind.

Es wird nun nach dem Obigen wohl überflüssig sein zu bemerken dass die eingangs gegebene Tangentenconstruction der Lemniscate nichts anderes ist als die allgemeine Construction der Tangente in einem Punkte irgend einer Projection der Durchdringung zweier quadratischer Kegel.

2). Wir beweisen nun dass die Punkte  $M$  und  $N$  die Brennpunkte der Lemniscate sind indem wir auf elementarplanimetrischem Wege zeigen dass für jeden Punkt  $P$  der Curve das Product  $PM \cdot PN$  einen unveränderlichen Wert hat, nämlich  $T'M^2$  oder  $T'N^2$  oder  $4r^2$ . Zu diesem Zwecke wollen wir den Winkel  $\alpha$  einführen den die Gerade  $s$  mit der Gerade  $MT'$  einschliesst, sowie die senkrechte Entfernung  $d$  des Punktes  $M$  von dieser Gerade. Es ist dann, weil die Radien der beiden Kreise  $r$  und  $r\sqrt{2}$  sind:

$$B_1A = \sqrt{2r^2 - d^2} - \sqrt{r^2 - d^2}, \text{ und}$$

$$B_1S = \sqrt{2r^2 - d^2} + \sqrt{r^2 - d^2}, \text{ und}$$

$$B_1A : B_1S = AP : ST' = AP : r, \text{ folglich:}$$

$$AP = r \frac{B_1A}{B_1S} = \frac{r^3}{B_1S^2},$$

denn  $B_1A \cdot B_1S$  ist die Potenz des Punktes  $B_1$  in Bezug auf den inneren Kreis, und also gleich  $r^2$ .

Es ist nun der am Punkte  $M$  anliegende Aussenwinkel des  $\triangle SMA = 2\alpha$ , somit auch der  $\angle PAM = 2\alpha$ , und folglich:

$$MP^2 = MA^2 + AP^2 - 2MA \cdot AP \cdot \cos 2\alpha, \text{ oder}$$

$$MP^2 = r^2 + r^2 \frac{B_1A^2}{B_1S^2} - 2 \frac{r^4}{B_1S^2} \cdot \frac{r^2 - 2d^2}{r^2}, \text{ oder}$$



$$MP^2 = \frac{r^2}{B_1 S^2} \left( 3r^2 - 2d^2 + 2\sqrt{(2r^2 - d^2)(r^2 - d^2)} + 3r^2 - 2d^2 - \right. \\ \left. - 2\sqrt{(2r^2 - d^2)(r^2 - d^2)} + 4d^2 - 2r^2 \right) \text{ oder endlich:}$$

$$MP^2 = \frac{4r^4}{B_1 S^2} = 4r \cdot \frac{r^3}{B_1 S^2} = MN \cdot AP, \text{ also:}$$

$$AP : MP = MP : MN.$$

Es ist ~~nun~~ aber in den beiden Dreiecken APM und PMN  $\angle APM = \angle PMN$ , während soeben gezeigt wurde dass die diese Winkel einschliessenden Seiten proportional sind; es sind also diese beiden Dreiecke ähnlich, und daraus ergibt sich:

$$\angle MPN = \angle PAM = 2\alpha.$$

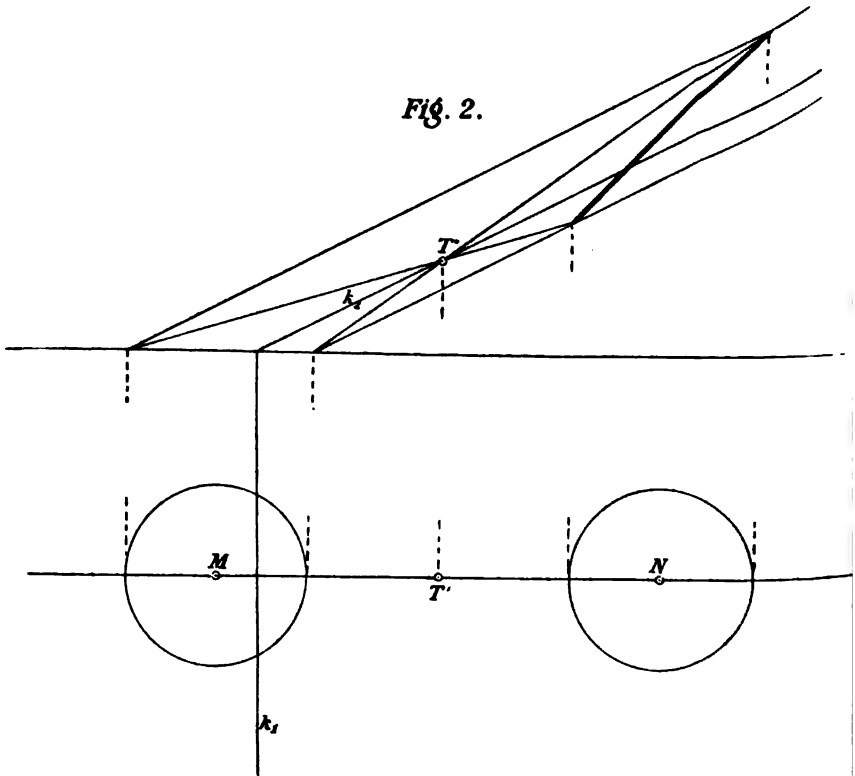
Schliesslich haben die beiden Dreiecke MAN und MPN gleichen Inhalt; der des erstern ist  $\frac{1}{2} MA \cdot MN \cdot \sin 2\alpha$ , und der des zweiten  $\frac{1}{2} PM \cdot PN \cdot \sin 2\alpha$ , also ist:

$$PM \cdot PN = MA \cdot MN = 4r^2. \text{ q.e.d.}$$

3). Es muss nun zunächst bemerkt werden dass die von uns getroffene Anordnung der Figur allerdings die einfachste, aber nicht die einzig mögliche ist; es ist nämlich nicht nötig dem Punkte T' gerade die Entfernung  $r$  von S zu geben, sondern diese Entfernung ist im Gegenteil beliebig. Nimmt man T' auf der Geraden MS anderswo an, womit dann natürlich auch die Punkte T'',  $S_1$  und  $S_2$  ihre Lage ändern, so ist es immer noch möglich den Leitkreis des Kegels so zu bestimmen dass er in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$  die Geraden T'S<sub>1</sub>, T'S<sub>2</sub> berührt, nur wird er dann nicht mehr mit der Leitcurve des Cylinders concentrisch sein. Da aber trotzdem sämtlichen Bedingungen der Aufgabe genügt wird, so wird auch jetzt wieder eine gewöhnliche Lemniscate entstehen, und es ist also die im Anfang gegebene Erzeugungsweise dieser Curve einer der jetzigen Disposition entsprechenden Verallgemeinerung fähig, aber keiner der beiden nun getrennten Kreismittelpunkte wird jetzt noch ein Brennpunkt der Curve sein.

Und schliesslich liegt die Frage nahe ob die jetzige Construction nicht auch die allgemeine Lemniscate hervorzubringen erlaubt; dem ist aber nicht so. Allerdings wird, wenn man den Punkt T etwa auf der Verticale zur Grundrissebene hinauf- oder hinunterrücken lässt, die Polarebene des Punktes  $Z_\infty$  in Bezug auf den Kegel parallel sich selbst mit verschiebt, und

die Leitcurve des Kegels wiederum so construiert dass die horizontale Spur  $k_1$  der Polarebene die Polare des Punktes  $T'$  in Bezug auf diesen Kreis wird, was nun auf unendlich viele Arten möglich ist, weil der Kreis die Spur  $k_1$  nun nicht mehr in bestimmten Punkten zu schneiden braucht, der Grundriss der Durchdringung ein mehr oder weniger lemniscatenähnliches Aussehen erhalten, nämlich in beiden Fällen aus zwei



getrennten, jedes für sich in Bezug auf die horizontale Achse  $MT'$ , und beide zusammen auch in Bezug auf  $UT'$  symmetrischen Ovalen bestehen, aber diese beiden Ovale bilden zusammen keine Lemniscate. Man sieht dies am einfachsten wenn man (Fig. II) den Punkt  $T$  allmählich so weit hinauf-rücken lässt bis die Gerade  $k_1$  mit der Polare von  $T'$  in Bezug auf den Leitkreis des Cylinders zusammenfällt; dann

nämlich kann man die Leitcurve des Kegels mit derjenigen des Cylinders zusammenfallen lassen, und besteht die ganze Durchdringung aus diesem gemeinsamen Kreise und einer Ellipse, deren Grundriss notwendig ein mit dem erstern in Bezug auf  $UT'$  symmetrischer Kreis sein muss. Das System zweier Kreise aber kann nie einen Specialfall einer allgemeinen Lemniscate bilden.

---

DE MATHEMATISCHE SLINGER EN DE FUNCTIEN VAN  
WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN.

(Delft.)

---

De beweging, die een punt onder de werking van zijn gewicht uitvoert, als het gedwongen is zonder wrijving over een boloppervlak te bewegen, m. a. w. de beweging van een mathematischen slinger, is door gebruikmaking van de functien van Weierstrass in vergelijkingen te brengen, die door hare eenvoudigheid en doorzichtigheid op verrassende wijze gunstig afsteken bij die, gevonden met gebruikmaking van de functien van Legendre (zie o. a. Durège, Ellipt. Functionen).

Beginnen we met den vlakken slinger, waarbij dus het punt zich over een vertikalen grooten cirkel van den bol beweegt.

Is  $l$  de lengte van den slinger en  $\theta$  de hoek, dien ze op zeker oogenblik  $t$  van de beweging met de vertikaal maakt, dan geeft het beginsel van arbeidsvermogen de volgende differentiaalvergelijking van de slingerbeweging:

$$\frac{1}{2} l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - gl \cos \theta = k$$

waarbij de massa van 't punt als eenheid van massa wordt aangenomen.  $k$  stelt hierin de totale energie voor. Wordt de energie, beantwoordende aan de valhoogte  $l$  als eenheid aangenomen, dan is  $\frac{k}{gl} = h$  het aantal eenheden van de energie der slingerbeweging.

Bovenstaande differentiaalvergelijking is dan onder den volgenden vorm te brengen:

$$\frac{l}{2g} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = h + \cos \theta.$$

Wordt hierin

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 1 - 2x$$

gesteld, dan gaat ze over in

$$\pm \sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2(h+3)x^2 + 2(h+1)x}}.$$

De elliptische functien van Weierstrass worden nu ingevoerd door te stellen:

$$x = pu + \frac{h+3}{6}$$

waardoor de differentiaalvergelijking overgaat in

$$\pm \sqrt{\frac{g}{l}} dt = du$$

met de invarianten

$$g_2 = \frac{h^2 + 3}{3}, g_3 = \frac{h(h^2 - 9)}{27},$$

zoodat de discriminant  $\Delta$  gegeven wordt door

$$16\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = (h^2 - 1)^2.$$

Wordt nog

$$\frac{h+3}{6} = -pa$$

gesteld, dan blijkt

$$p'^2 a = 0$$

te zijn, zoodat  $pa = p\omega' = e_3 =$  de kleinste wortel van  $p'^2 u = 0$  moet genomen worden, omdat  $pa = -\frac{h+3}{6}$  onder alle omstandigheden waaronder de beweging kan plaats hebben ( $h \geq -1$ ) negatief is.

De bewegingsvergelijkingen van de slingerbeweging zijn dus

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = pu - p\omega'$$

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = u + \text{standv.}$$

Omdat echter  $\sin^2 \frac{1}{2} \theta$  niet negatief en niet grooter dan 1 mag worden, moet  $p(u)$  door  $p(\omega' + u)$  vervangen worden. Rekent men den tijd van de beweging te beginnen met  $u = 0$ , dan zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} \theta &= p(u + \omega') - p\omega' \\ t \sqrt{\frac{g}{l}} &= u \end{aligned} \right\} \text{(A).}$$

Discussie van deze formules.

Omdat

$p\omega + p\omega' + p\omega'' = 0$ ,  $p\omega p\omega' p\omega'' = \frac{1}{8} g_3$ ,  $p\omega' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} h$   
is, zijn

$$p\omega + p\omega'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} h, \quad p\omega p\omega'' = -\frac{h(h-3)}{18},$$

zoodat voor  $p\omega$  en  $p\omega''$  de waarden  $\frac{1}{3}h$  en  $\frac{3-h}{6}$  genomen moeten worden.

Is  $h > 1$ , dan moet

$$p\omega = \frac{1}{3}h, \quad p\omega'' = \frac{1}{2} - \frac{h}{6}, \quad p\omega' = -\frac{1}{2} - \frac{h}{6}$$

genomen worden, omdat  $p\omega > p\omega'' > p\omega'$ .

Voor  $h < 1$  is

$$p\omega = \frac{1}{2} - \frac{h}{6}, \quad p\omega'' = \frac{1}{3}h, \quad p\omega' = -\frac{1}{2} - \frac{h}{6}.$$

Bijgevolg:

$$h > 1, \quad p\omega'' - p\omega' = 1,$$

$$h < 1, \quad p\omega'' - p\omega' = \frac{h+1}{2} < 1.$$

De bewegingsvergelijkingen (A) geven dus voor  $h > 1$  aan, dat het punt volle wentelingen maakt, omdat voor  $u = 0$ ,  $\theta = 0$ , voor  $u = \omega$ ,  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = p\omega'' - p\omega' = 1$ , dus  $\theta = 180^\circ$  is. De duur  $T$  voor een volle wenteling bedraagt

$$T = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Voor  $h < 1$  geven (A) te kennen, dat het punt slingeren maakt, omdat voor  $u = 0$ ,  $\theta = 0$  is, en voor  $u = \omega$ ,  $\sin^2 \frac{1}{2} \theta = p\omega'' - p\omega' = \frac{h+1}{2} < 1$  is. De slingertijd  $T$  is

$$T = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Bijzondere gevallen voor  $\Delta = 0$ .

De discriminant  $\Delta$  is gelijk nul, zoowel voor  $h = +1$  als  $h = -1$ .

Voor  $h = 1$  is

$$p\omega' = -\frac{2}{3}, p\omega = p\omega'' = \frac{1}{3}, \text{ dus } \omega = \omega'' = \infty.$$

De vergelijkingen (A) geven  $T = \infty$  en voor de eindwaarde van  $\sin^2 \frac{1}{2} \theta$  de eenheid. Het punt beweegt zich naar het hoogste punt van de baan als asymptotisch punt.

Voor  $h = -1$  is

$$p\omega' = p\omega'' = -\frac{1}{3}, p\omega = \frac{2}{3}, \text{ dus } \omega' = \omega'' = \infty.$$

Dus

$$pu = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - \frac{1}{3}\right).$$

Bijgevolg

$$p\omega = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{2}{3}, 2\omega = \pi,$$

zoodat de slingertijd nadert tot

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

als de amplitudo  $\theta$  nadert tot nul.

Gaan we nu over tot de beschouwing van den spherischen slinger.

Maakt weer op zeker oogenblik  $t$  van de beweging de slinger een hoek  $\theta$  met de vertikaal, en is  $\varphi$  de hoek, dien dan het vlak, bepaald door den slinger en de verticaal, maakt met een vast verticaalvlak, dan levert het beginsel van energie de vergelijking

$$\frac{1}{2}l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}l^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - gl \cos \theta = k,$$

terwijl dat van de sectoren geeft

$$\frac{1}{2}l^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = m.$$

$k$  is weer de totale energie van den slinger, terwijl  $m$  de sectorsnelheid is (van de beweging geprojecteerd op een horizontaal vlak). Wordt weer als eenheid van energie genomen

die, welke overeenkomst met de valhoogte  $l$ , en tot eenheid van sectorsnelheid, die welke het punt verkrijgt, als het uit den horizontalen grooten cirkel vallende, in het laagste punt gekomen is, dan stelt in

$$\frac{k}{gl} = h, \frac{2m^2}{gl^3} = C^2$$

$h$  de energie,  $C$  de sectorsnelheid voor.

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen kunnen nu als volgt worden geschreven:

$$\frac{l}{2g} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = h + \cos \theta - \frac{C^2}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = C \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Wordt in de eerste van deze

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 1 - 2x$$

gesteld, dan gaat ze over in

$$\pm dt \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2(h+3)x^2 + 2(h+1)x - \frac{1}{2}C^2}}.$$

Door hierin

$$x = pu + \frac{h+3}{6}$$

te stellen, gaat ze over in

$$\pm dt \sqrt{\frac{g}{l}} = du$$

met de invarianten

$$g_2 = \frac{h^2 + 3}{3}, \quad g_3 = \frac{h(h^2 - 9)}{27} + \frac{1}{2} C^2.$$

Wordt nog

$$\frac{h+3}{6} = -pa, \quad \text{dus } p^2a = -\frac{1}{2} C^2$$



gesteld, dan komen de differentiaalvergelijkingen onder den volgende vorm:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = pu - pa$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = du$$

$$d\varphi = C\sqrt{2} \frac{du}{\sin^2 \theta}$$

of ook, als

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{pu - pa} - \frac{1}{pu - (pa + 1)} \right)$$

geschreven wordt, en

$$pa + 1 = pb = \frac{3 - h}{6}, \text{ dus } p^2 b = -\frac{1}{4} C^2$$

gesteld wordt:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = pu - pa$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = du$$

$$d\varphi = \frac{1}{4} C\sqrt{2} \left( \frac{du}{pu - pa} - \frac{du}{pu - pb} \right).$$

Ter integratie van deze vergelijkingen zij opgemerkt, dat de discriminant  $\Delta$  positief moet zijn. Ware  $\Delta$  toch negatief, dan zouden onder de bestaانبare waarden van  $pu$  oneindig groote voorkomen, zoodat een beweging onder  $\Delta < 0$  niet kan plaats hebben.

De discriminant moet dus positief zijn. In dit geval moet  $pu$  door  $p(u + \omega')$ ,  $pa$ , die steeds negatief is, door  $pia$ , en  $pb$  door  $p(\omega + ib)$  vervangen worden.

Omdat eindelijk  $p^2 ia = p^2(\omega + ib) = -\frac{1}{4} C^2$  is, kan  $\frac{1}{4} C\sqrt{2}$  vervangen worden zoowel door  $ipia$  als door  $-ip'(\omega + ib)$ .

De differentiaalvergelijkingen zijn dus

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = p(u + \omega') - pia$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = du$$

$$2d\varphi = \frac{ip'ia}{p(u + \omega') - pia} + \frac{ip'(\omega + ib)}{p(u + \omega') - p(\omega + ib)}.$$

De integraalvergelijkingen zijn derhalve

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = p(u + \omega') - pia$$

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = u + \text{standv.}$$

$$2i(\phi + \text{standv.}) = l \frac{\sigma(u + \omega' + ia)}{\sigma(u + \omega' - ia)} \cdot \frac{\sigma(u + \omega' + ib)}{\sigma(u + \omega' - ib)} - 2(\zeta ia + \zeta(\omega + ib))u.$$

Worden voor  $u = 0$ ,  $t = 0$  en  $\phi = 0$  genomen, dan zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = p(u + \omega') - pia$$

$$t \sqrt{\frac{g}{l}} = u$$

$$2i\phi = l \frac{\sigma(u + \omega' + ia)}{\sigma(u + \omega' - ia)} \cdot \frac{\sigma(u + \omega' + \omega + ib)}{\sigma(u + \omega' - \omega - ib)} \cdot \frac{\sigma(\omega' - ia)}{\sigma(\omega' + ia)} \cdot \frac{\sigma(\omega' - \omega - ib)}{\sigma(\omega' + \omega + ib)} - 2u(\zeta ia + \zeta(\omega + ib)).$$

Uit deze vergelijkingen leert men:

1°. De uiterste amplitudines van den slinger worden gegeven door

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta_1 = p\omega' - pia, \quad \sin^2 \frac{1}{2} \theta_2 = p\omega'' - pia,$$

welke beide uitdrukkingen positief en kleiner dan de eenheid zijn; want  $p\omega'' < p(\omega + ib) = pia + 1$ , dus  $p\omega'' - pia < 1$ , doch grooter dan  $p\omega' - pia$ , die positief is.

$\theta_1$  is de kleinste,  $\theta_2$  de grootste elongatie van den slinger.

2°. De tijd, waarin de slinger van de elongatie  $\theta_1$  tot de elongatie  $\theta_2$  komt, of de helft van den slingertijd  $T$ , wordt gegeven door

$$T = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3°. De hoek  $\Phi$ , dien het vertikale vlak van den slinger gedurende dien slingertijd gedraaid is, wordt gegeven door

$$i\Phi = l \frac{\sigma(\omega'' + ia)}{\sigma(\omega'' - ia)} \cdot \frac{\sigma(\omega'' + \omega + ib)}{\sigma(\omega'' - \omega - ib)} \cdot \frac{\sigma(\omega' - ia)}{\sigma(\omega' + ia)} \cdot \frac{\sigma(\omega' - \omega - ib)}{\sigma(\omega' + \omega + ib)} - 2\omega(\zeta ia + \zeta(\omega + ib)),$$

of herleid:

$$\Phi = 2(a + b)\eta - 2\omega \left( \frac{1}{i} \zeta ia + \frac{1}{i} (\zeta(\omega + ib) - \zeta\omega) \right).$$

Bijzonder geval  $\Delta = 0$ .

Is  $p\omega' = p\omega''$ , dan vallen de beide waarden  $\theta_1$  en  $\theta_2$  samen, en hebben we met een conischen slinger te doen. Dan is

$$\Delta = 0, \quad p\omega' = p\omega'' = -\frac{1}{2}p\omega, \quad \omega' = \omega'' = \infty.$$

Verder

$$p^3\omega = g_3 \text{ of } 27p^6\omega = 27g_3^2 = g_2^3, \quad p^3\omega = \frac{h^2 + 3}{9},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}\theta = p\omega' + \frac{h + 3}{6} = \frac{h + 3 - \sqrt{h^2 + 3}}{6},$$

dus

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{h^2 + 3} - h}{3}, \quad h = \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2 \cos \theta}.$$

$$\frac{1}{2}C^2 = \frac{1}{27}(\sqrt{(h^2 + 3)^3} - h(h^2 - 9)) = \frac{\sin^4 \theta}{4 \cos \theta}.$$

Omdat  $\cos \theta$  voor  $h = -1$  tot  $h = \infty$  verandert van 1 tot 0, zal alleen bij elke amplitude kleiner dan  $90^\circ$  een conische beweging mogelijk zijn. De omwentelingstijd  $T$  van den slinger wordt gevonden uit

$$d\phi = \frac{C\sqrt{2}}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{g}{l}} dt = \sqrt{\frac{g}{e \cos \theta}} dt,$$

dus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}.$$

DE WENTELING VAN EEN LICHAAM EN DE FUNCTIEN VAN  
WEIERSTRASS,

DOOR

G. SCHOUTEN,  
(Delft.)

Ook de wenteling van een vast lichaam om zijn zwaartepunt is door gebruikmaking van de functien van WEIERSTRASS in vergelijkingen te brengen, die om hare eenvoudigheid en doorzichtigheid gunstig afsteken bij die, gevonden door toepassing van de functien von LEGENDRE (zie o.a. Sur la rotation d'un corps, par C. G. J. JACOBI, Journal von Crelle, Bd 39).

Wordt het zwaartepunt van het lichaam gekozen tot oorsprong O van een assenstelsel, dat de hoofdtraagheidsassen OP, OQ, OR tot assen heeft, dan zijn de differentiaalvergelijkingen van de beweging

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B-C)qr \\ B \frac{dq}{dt} &= (C-A)rp \\ C \frac{dr}{dt} &= (A-B)pq \end{aligned} \right\} (A).$$

Hierin stellen A, B, C de traagheidsmomenten van het lichaam voor resp. om de assen OP, OQ, OR, en  $p, q, r$  de ontbondenen volgens die assen van de hoeksnelheid  $\bar{\omega}$  om de oogeblikkelijke as op het tijdstip  $t$  van de beweging.

Uit (A) volgen onmiddellijk twee integraalvergelijkingen, nl.

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$



die den stand van het lichaam bepalen, berekend uit de waarden van de bewegingselementen  $p, q, r$ .

### Berekening van $p, q, r$ .

Stelt  $\bar{\omega}$  de hoeksnelheid voor om de oogenblikkelijke as, dan kunnen uit de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= \bar{\omega}^2 \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k^2 \end{aligned} \right\} \text{(B).}$$

de hoeksnelheden  $p, q, r$  in  $\bar{\omega}$  worden uitgedrukt. Men vindt

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{BC\bar{\omega}^2 + k^2 - (B+C)h}{(A-B)(A-C)} \\ q^2 &= \frac{CA\bar{\omega}^2 + k^2 - (C+A)h}{(B-C)(B-A)} \\ r^2 &= \frac{AB\bar{\omega}^2 + k^2 - (A+B)h}{(C-A)(C-B)} \end{aligned} \right\} \text{(C).}$$

Door de eerste van (B) naar  $t$  te differentieeren, vindt men

$$\bar{\omega} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} + r \frac{dr}{dt},$$

welke volgens de vergelijkingen (A) ook als volgt kan geschreven worden:

$$\bar{\omega}^3 \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right)^2 = \frac{(A-B)^2 (B-C)^2 (C-A)^2}{A^2 B^2 C^2} p^2 q^2 r^2.$$

Worden hierin  $p^2, q^2, r^2$  door hunne waarden in (C) vervangen, en  $\bar{\omega}^2 = x$  gesteld, dan gaat ze over in

$$\frac{1}{4} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = - \left( x - \frac{(B+C)h - k^2}{BC} \right) \left( x - \frac{(C+A)h - k^2}{CA} \right) \left( x - \frac{(A+B)h - k^2}{AB} \right),$$

of, als

$$\frac{(B + C) h - k^2}{BC} = \alpha$$

$$\frac{(C + A) h - k^2}{CA} = \beta$$

$$\frac{(A + B) h - k^2}{AB} = \gamma$$

gesteld worden :

$$\pm dt = \frac{dx}{\sqrt{-4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}.$$

We voeren nu de functien van WEIERSTRASS in, door hierin

$$x = \bar{\omega}^2 = pu - pl$$

$$pl = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

te stellen, waardoor ze overgaat in

$$\pm dt = \frac{dix}{\sqrt{4p^3u - g_2pu - g_3}}$$

met

$$g_2 = 4 \left\{ 3 \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \right\}$$

$$g_3 = -4 \left\{ 2 \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^3 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma \right\}.$$

De discriminant  $g_2^3 - 27g_3^2$  is hier zeker positief, aangezien de wortels van

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3 = 0,$$

allen bestaanbaar zijn.

We hebben dus gevonden

$$\bar{\omega}^2 = x = pu - pl$$

$$\pm dt = diu.$$

Hieruit blijkt, dat  $u$  van den vorm  $i\omega +$  standvastige genomen moet worden, en wel  $i\omega + \omega$ , omdat  $\bar{\omega}^2$  positief en eindig moet blijven gedurende de geheele beweging.

De integraalvergelijking is dus

$$t = u$$

$$\bar{\omega}^2 = p(iu + \omega) - pl,$$

als  $t$  met  $u$  tegelijk nul wordt genomen.

Voor  $u = 0$  heeft dan  $\bar{\omega}^2$  de maximum-waarde  $p\omega - pl$ ,  
voor  $u = \frac{\omega'}{i}$  de minimum-waarde  $p\omega'' - pl$ .

Deze waarde van  $\bar{\omega}^2$  in (C) gesteld, geeft

$$p^2 = \frac{BC}{(A - B)(A - C)} (p(iu + \omega) - pl - \alpha)$$

$$q^2 = \frac{CA}{(B - A)(B - C)} (p(iu + \omega) - pl - \beta)$$

$$r^2 = \frac{AB}{(C - A)(C - B)} (p(iu + \omega) - pl - \gamma).$$

Worden hierin

$$pl + \alpha = pa$$

$$pl + \beta = pb$$

$$pl + \gamma = pc$$

gesteld, dan blijken  $p'a$ ,  $p'b$ ,  $p'c$  alle drie gelijk nul te zijn, zoodat ze de drie wortels  $p\omega$ ,  $p\omega'$ ,  $p\omega''$  van  $p^2u = 0$  voorstellen.

Om te weten, welke van  $pa$ ,  $pb$ ,  $pc$  met  $p\omega$ , welke met  $p\omega'$  en welke met  $p\omega''$  overeenkomt, berekenen wij ze.

Men vindt

$$3 ABCpa = - (A - B)(k^2 - Ch) - (A - C)(k^2 - Bh)$$

$$3 ABCpb = - (B - C)(k^2 - Ah) - (B - A)(k^2 - Ch)$$

$$3 ABCpc = - (C - A)(k^2 - Bh) - (C - B)(k^2 - Ah).$$

Uit deze waarden voor  $pa$ ,  $pb$  en  $pc$  blijkt, dat, wanneer  $B$  als de middelste in waarde van de traagheidsmomenten wordt aangenomen, en  $A > B > C$  wordt genomen ingeval  $k^2 - Bh < 0$ , doch  $A < B < C$  als  $k^2 - Bh > 0$  is, dat dan

$$pb = p\omega$$

$$pa = p\omega''$$

$$pc = p\omega'$$

gesteld moeten werden.



Derhalve is

$$\left. \begin{aligned} \frac{(A-B)(A-C)}{BC} p^2 &= p(iu + \omega) - p\omega'' \\ \frac{(B-C)(B-A)}{CA} q^2 &= p(iu + \omega) - p\omega \\ \frac{(C-A)(C-B)}{AB} r^2 &= p(iu + \omega) - p\omega' \end{aligned} \right\} \dots (D)$$

waardoor de bewegingselementen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  in functien van den tijd zijn uitgedrukt.

Neemt men in aanmerking, dat

$$p\omega - p\omega'' = \frac{(A-B)(k^2 - Ch)}{ABC}, \quad p\omega - pl = \beta$$

$$p\omega'' - p\omega' = \frac{(C-A)(k^2 - Bh)}{ABC}, \quad p\omega'' - pl = \alpha$$

$$p\omega' - p\omega = \frac{(B-C)(k^2 - Ah)}{ABC}, \quad p\omega' - pl = \gamma$$

is, dan volgt uit (D), dat op het oogenblik  $t = u = 0$  van de beweging  $p^2$  en  $r^2$  hunne maximum-waarden

$$p_m^2 = \frac{k^2 - Ch}{A(A-C)}, \quad r_m^2 = \frac{k^2 - Ah}{C(C-A)}$$

hebben, terwijl  $q^2 = 0$  is.

Bij het begin der beweging is dus ondersteld, dat de oogenblikkelijke as in het vlak POR ligt, en dan heeft de hoeksnelheid  $\bar{\omega}$  de maximumwaarde, gegeven door

$$\bar{\omega}^2 = \beta.$$

Op het oogenblik  $t = u = \frac{\omega'}{i}$  is  $p^2 = 0$ , bereikt  $q^2$  de maximumwaarde en  $r^2$  de minimumwaarde,

$$q_m^2 = \frac{k^2 - Ch}{B(B-C)}, \quad r_m^2 = \frac{k^2 - Bh}{C(C-B)}$$

en  $\bar{\omega}$  de minimumwaarde

$$\bar{\omega}^2 = \alpha.$$

Op het oogenblik  $t = u = 2 \frac{\omega'}{i}$  hebben  $p^2$ ,  $q^2$ ,  $r^2$ ,  $\bar{\omega}^2$  weer dezelfde waarden als op 't oogenblik 0, zoodat  $\frac{2\omega'}{i}$  de periode van deze grootheden is.

Alleen moet nu nog nagegaan worden, hoe de teekens van  $p$ ,  $q$ ,  $r$  moeten genomen worden, daarbij dat voor  $\bar{\omega}$  zelf positief nemende.

Nemen we aan, dat bij het begin der beweging  $t = u = 0$   $p$  en  $r$  beiden positief zijn, zoodat beiden hunne maximum-waarde hebben, dan worden  $\frac{dp}{dt}$  en  $\frac{dr}{dt}$  beiden negatief, zoodat volgens de differentiaalvergelijkingen (A) van de beweging  $\frac{dq}{dt}$  negatief wordt voor  $A > C$ , positief voor  $A < C$ .

Derhalve is het verloop gedurende het eerste deel 0 tot  $\frac{\omega'}{i}$  van de periode het volgende:

Voor  $A > B > C$ , dus  $k^2 - Bh < 0$ :

$p$  verandert van  $p_M$  tot 0,  
 $r$  " "  $r_M$  "  $r_M$ ,  
 $q$  " " 0 "  $-q_M$ .

Voor  $A < B < C$ , dus  $k^2 - Bh > 0$ :

$p$  verandert van  $p_M$  tot 0,  
 $r$  " "  $r_M$  "  $r_M$ ,  
 $q$  " " 0 "  $+q_M$ ,

Gedurende het tweede deel  $\frac{\omega'}{i}$  tot  $\frac{2\omega'}{i}$  is  $\frac{dq}{dt}$  voor  $A > C$  positief,  $r$  positief, zoodat  $p < 0$  is; voor  $A < C$  daarentegen is  $\frac{dq}{dt}$  negatief,  $r$  positief, dus ook  $p < 0$ .

Het verloop gedurende dat tweede deel der periode is dus als volgt:

Voor  $A > B > C$ , dus  $k^2 - Bh < 0$ :

$p$  verandert van 0 tot  $-p_M$ ,  
 $q$  " "  $-q_M$  " 0,  
 $r$  " "  $r_M$  "  $r_M$ .

Voor  $A < B < C$ , dus  $k^2 - Bh > 0$ :

$$\begin{array}{ccccccc} p & \text{verandert van} & 0 & \text{tot} & -p_M, \\ q & & & & 0, \\ r & & & & r_M. \end{array}$$

Deze uitkomsten kunnen we samenvatten in de volgende stelling:

Voor  $k^2 - Bh > 0$  beschrijft de oogenblikkelijke as  $\Omega$  om de *grootste* as van de traagheidsellipsoïde als as een kegeloppervlak in *denzelfden* zin als waarin de wenteling om die as geschiedt; voor  $k^2 - Bh < 0$  echter beweegt de as  $\Omega$  om de *kleinste* as van de traagheidsellipsoïde als as een kegeloppervlak in *tegengestelden* zin als waarin de wenteling om deze as geschiedt.

Berekening van de elementen  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , die den stand van 't lichaam bepalen.

Volgens (4) is

$$\psi' = k \frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2r^2} = \frac{k}{C} \left( 1 - \frac{k^2 - Ch}{k^2 - C^2r^2} \right).$$

Hierbij valt op te merken, dat  $\psi'$  altijd positief is, zoodat  $\psi$  voortdurend zal toenemen en dus niet periodiek zal veranderen.

Wordt hierin  $r^2$  vervangen door zijn waarde in (D), dan vindt men:

$$\psi' = \frac{k}{C} \left( 1 - \frac{\frac{(A-C)(B-C)(k^2 - Ch)}{ABC^2}}{\frac{k^2(A-C)(B-C)}{ABC^2} + p\omega' - p(iu + \omega)} \right).$$

Stelt men nu:

$$\frac{k^2(A-C)(B-C)}{ABC^2} = p\nu - p\omega'$$

dan blijkt, dat

$$p'^2\nu = \frac{4k^2(A-C)^2(B-C)^2(k^2 - Ch)^2}{A^2B^2C^6}$$

is, terwijl

$$p\nu - p\omega'' = \frac{A - C}{AC^2} (k^2 - Ch), \quad p\nu - p\omega = \frac{B - C}{BC^2} (k^2 - Ch)$$

is, zoodat  $p\nu > p\omega$ , dus  $p'\nu < 0$  is, als  $\nu$  tusschen 0 en  $\omega$  gekozen wordt.

We moeten dus stellen :

$$p'\nu = \mp \frac{2k(A - C)(B - C)(k^2 - Ch)}{ABC^3} \text{ bij } k^2 - Bh \leq 0.$$

Hierdoor gaat de uitdrukking voor  $\psi'$  over in

$$\psi' = \frac{k}{C} \mp \frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p(iu + \omega) - p\nu}$$

of ook, met invoering van de  $\zeta$ -functie:

$$\psi' = \frac{k}{C} \pm \frac{1}{2} (\zeta(iu + \omega + \nu) - \zeta(iu + \omega - \nu) - 2\zeta(\nu)).$$

Deze geïntegreerd geeft :

$$\psi + \text{standvastige} = \left( \frac{k}{C} \mp \zeta(\nu) \right) u \pm \frac{1}{2i} l \frac{\sigma(iu + \omega + \nu)}{\sigma(iu + \omega - \nu)}.$$

Ter bepaling van de standvastige stellen we, dat  $\psi$  voor  $t = 0$  de waarde  $\psi_0$  heeft, zoodat

$$\psi_0 + \text{standv.} = \pm \frac{1}{2i} l \frac{\sigma(\omega + \nu)}{\sigma(\omega - \nu)} = \pm \frac{1}{2i} l e^{2\eta\nu} = \pm \frac{\eta\nu}{i}.$$

Hierdoor vinden we:

$$\psi - \psi_0 = \left( \frac{k}{C} \mp \zeta(\nu) \right) u \pm \frac{1}{2i} \left( l \frac{\sigma(iu + \omega + \nu)}{\sigma(iu + \omega - \nu)} - 2\eta\nu \right).$$

Voor  $t = u = \frac{\omega'}{i}$  geeft ze :

$$\psi - \psi_0 = \left( \frac{k}{C} \mp \zeta(\nu) \right) \frac{\omega'}{i} \pm \frac{1}{2i} 2\eta'\nu = \frac{1}{i} \left( \left( \frac{k}{C} \mp \zeta(\nu) \right) \omega' \pm \nu\eta' \right),$$

welke uitdrukking voorstelt den hoek, waarmede  $\psi$  geregeld

gedurende elke halve periode  $\left(n\frac{\omega'}{i} \text{ tot } (n+1)\frac{\omega'}{i}\right)$  toeneemt.

Volgens (5) is

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}.$$

Door deze te differentieëren, vindt men, met inachtneming van de differentiaalvergelijkingen (A):

$$\varphi' = \frac{r}{k^2 - C^2 r^2} (k^2 - Ch),$$

waaruit blijkt, omdat  $r$  altijd positief is, dat ook  $\varphi'$  altijd hetzelfde teeken behoudt, en wel het positieve voor  $k^2 - Ch > 0$ , d. i. voor  $A > B > C$ , en het negatieve voor  $k^2 - Ch < 0$ , d. i. voor  $A < B < C$ .

De hoek  $\phi$  zal dus voortdurend toenemen, als  $k^2 - Bh < 0$  is, voortdurend afnemen, als  $k^2 - Bh > 0$  is.

Worden  $p$  en  $q$  in de uitdrukking voor  $\operatorname{tg} \phi$  vervangen door hunne waarden in (D), dan vindt men:

$$\operatorname{tg}^2 \phi = \frac{A(B - C)(p(iu + \omega) - p\omega'')}{B(A - C)(p\omega - p(iu + \omega))}.$$

Voor  $t = u = 0$  is  $\operatorname{tg}^2 \phi = \infty$ ; voor  $t = u = \frac{\omega'}{i}$  is  $\operatorname{tg}^2 \phi = 0$ ;

zoodat de hoek  $\phi$  gedurende het tijdsverloop  $n\frac{\omega'}{i}$  tot  $(n+1)\frac{\omega'}{i}$  van elke halve periode met een rechten hoek aangroeit of afneemt, naar gelang  $k^2 - Bh$  negatief of positief is.

Eindelijk is volgens (6)

$$\operatorname{Cos} \theta = \frac{Cr}{k}.$$

Omdat  $r$  niet van teeken verandert, zal dit ook het geval zijn met  $\cos \theta$ , zoodat  $\theta$  periodiek zal veranderen; voor  $t = 0$  is  $\cos \theta_0 = \frac{C}{k} r_m$ , voor  $t = \frac{\omega'}{i}$  is  $\cos \theta_1 = \frac{C}{k} r_m$ . De as OR maakt in het vlak ROZ schommelingen met een amplitudo  $\theta_1 - \theta_0$  en met een duur  $\frac{2\omega'}{i}$ .

Wordt  $r$  in de uitdrukking voor  $\cos \theta$  vervangen door zijn waarde in (D), dan gaat deze uitdrukking over in

$$\cos^2 \theta = \frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)k^2} (p(iu + \omega) - p\omega)$$

welke ook als volgt kan geschreven worden :

$$\cos^2 \theta = \frac{p(iu + \omega) - p\omega'}{p\nu - p\omega'}$$

waaruit op nieuw blijkt, dat  $\cos \theta$  nimmer nul zal worden.

Hiermede is de wenteling van een lichaam om zijn zwaartepunt volledig bepaald.

Bij dit onderzoek is ondersteld, dat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  onderling ongelijk zijn en  $k^2 - Bh \neq 0$ .

Is  $A = B$ , dan is  $\alpha = \beta$ ; is  $B = C$ , dan  $\beta = \gamma$ ; is  $k^2 - Bh = 0$ , dan  $\alpha = \gamma = \frac{h}{B}$ ; is dus  $A = B = C$ , dan is  $\alpha = \beta = \gamma$ . In elk

van deze gevallen en alleen in deze gevallen, is de discriminant gelijk nul en kunnen de bewegingsvergelijkingen zonder gebruikmaking van elliptische functien opgemaakt worden. De uitkomsten in die gevallen vindt men in elk leerboek over de theoretische Mechanica.

---

iets over het bepalen van het middelpunt van evenwijdige krachten, die aangrijpen op de zijden van eenige bepaalde veelhoeken, zonder analytische meetkunde,

DOOR

C. A. CIKOT.

(a. Hertogenbosch).

In dit opstelletje worden de volgende eigenschappen als bekend verondersteld:

1°. Wanneer in de hoekpunten van een driehoek evenwijdige krachten in denzelfden zin werken, valt hun middelpunt samen met dat van den ingeschreven cirkel, als die krachten zich verhouden als de overstaande zijden.

2°. Wanneer in de hoekpunten van een driehoek ABC evenwijdige krachten werken die zich verhouden als de overstaande zijden, en de krachten in A en in B werken in een zin tegengesteld aan dien waarin de kracht in C werkt, dan valt het middelpunt van die krachten samen met dat van den cirkel, die aangeschreven is ten opzichte van de zijde AB.

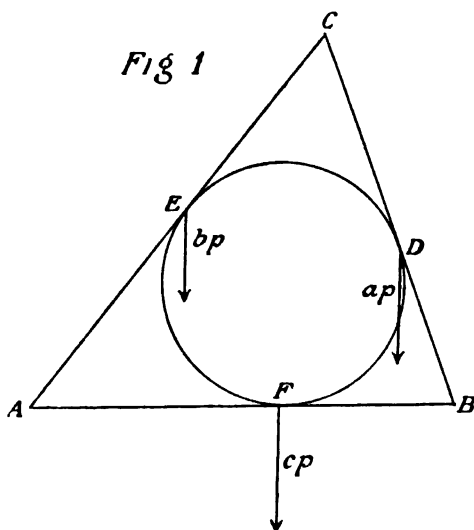
Beide waarheden laten zich gemakkelijk bewijzen zonder dat men daarbij van coördinaat-assen gebruik maakt.

Met behulp van de eerste kunnen we nu de volgende stelling bewijzen:

Het middelpunt van drie evenwijdige krachten, die aangrijpen in de punten waarin de zijden van een driehoek geraakt worden door den ingeschreven cirkel, en dezelfde richting hebben, valt samen met dat van den cirkel, als die krachten zich verhouden als de zijden waarop ze aangrijpen.

Bewijs. Daar de krachten zich verhouden als de zijden, kunnen wij die voorstellen door  $ap$ ,  $bp$  en  $cp$ . De kracht  $bp$  (zie fig. 1), die in het raakpunt E aangrijpt, splitsen we in twee daarmede evenwijdige krachten, die aangrijpen in A en

in C; daar  $AE = s - a$  en  $EC = s - c$ , vinden we voor de ontbondene in C:  $(s - a)p$ ; splitsen we  $ap$  eveneens in twee daarmede evenwijdige, die in B en in C aangrijpen, dan vinden we voor de ontbondene in C:  $(s - b)p$ , dus totaal in C:



$(s - a)p + (s - b)p = cp$ ; zoo vinden we voor de krachten in A en in B resp.  $ap$  en  $bp$ , waaruit blijkt, dat het oorspronkelijk stel evenwijdige krachten hetzelfde middelpunt heeft als een stel, in de hoekpunten werkende, en zich verhoudende als de overstaande zijden, m. a. w. het middelpunt van het oorspronkelijk stel valt samen met dat van den ingeschreven cirkel.

Om nu deze eigenschap uit te breiden tot een willekeurigen omgeschreven veelhoek, bewijzen we eerst de volgende

#### Hulpstelling.

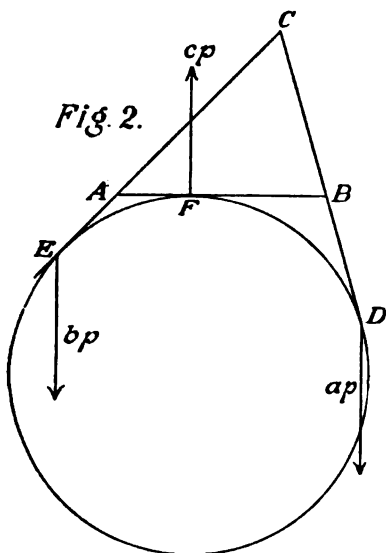
Als een cirkel de verlengden van de zijden CA en CB resp. in E en in D, en de zijde AB in F raakt, terwijl er in E en D evenwijdige krachten werken in richting tegengesteld aan een kracht die in F werkt, dan valt het middelpunt van die evenwijdige krachten samen met dat van den cirkel, als die krachten evenredig zijn met de zijden waarop hun aangrijpingspunt ligt. (zie fig. 2.)

Bewijs. De drie krachten stellen we voor door  $ap$ ,  $bp$  en  $cp$ ; ieder van die krachten splitsen we, als boven, in twee daarmede evenwijdige, die in de overeenstemmende hoekpunten aangrijpen; we vinden dan dat ons stel evenwijdige krachten identisch is met het volgende:  $ap$  in A,  $bp$  in B en  $cp$  in C, waarbij  $cp$  tegengesteld is aan  $ap$  en  $bp$ ; hieruit blijkt dus dat het bedoelde middelpunt samenvalt met dat van den cirkel.

Nu kunnen wij, à la Bernouilli, laten zien dat: als in de punten waarin een omgeschreven veelhoek door den cirkel ge-



raakt wordt, evenwijdige en eender gerichte krachten werken, hun middelpunt samenvalt met dat van den cirkel, indien die krachten evenredig zijn met de zijden waarop hun aangrijpingspunt ligt. Laat dan ABCDE enz. een omgeschreven veelhoek

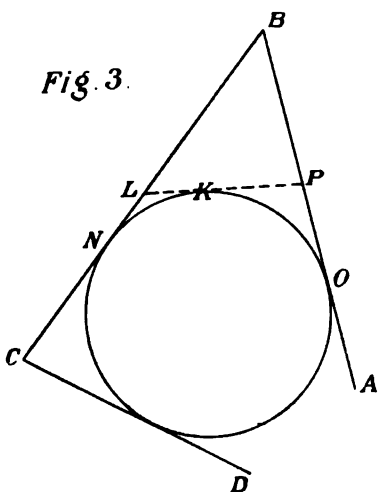


zijn, terwijl O, N enz. de raakpunten zijn, in welke raakpunten dus bovenbedoelde krachten werken. (zie fig. 3.) Om van dezen  $n$ -hoek een omgeschreven  $(n + 1)$ -hoek te maken, heeft men slechts van den eersten een driehoek BPL af te snijden door middel van een raaklijn PL, en om nu te zorgen dat bij den nieuwen veelhoek een stel evenwijdige krachten behoort zooals de stelling vereischt, moeten we in het raakpunt K een kracht aanbrengen evenwijdig met de krachten

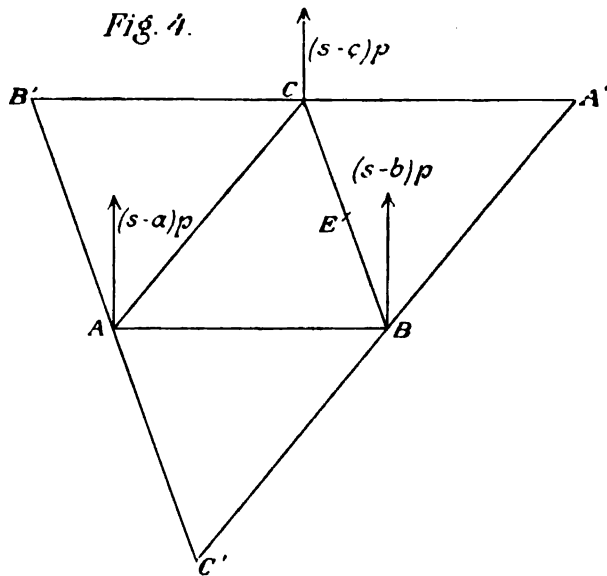
die bij den oorspronkelijken veelhoek behooren, en in grootte zóó dat aan de vereischte evenredigheid voldaan wordt, en

verder in N en in O krachten (om de oorspronkelijk daar werkende te verkleinen, daar de zijden CB en BA korter geworden zijn) tegengesteld aan die in K, en in grootte (in verband met de vereischte betrekking tusschen krachten en zijden) evenredig met BL en met BP. Dit toegevoegd stel van drie krachten heeft, volgens de hulpstelling, zijn middelpunt in dat van den cirkel, en daar de krachten die bij den veelhoek ABCDE enz. behooren, ook, krachtens de veronderstelling, hun middel-

punt in M hebben, zoo heeft het stel evenwijdige krachten, behorende bij den  $(n + 1)$ -hoek, ook zijn middelpunt in M.



Naschrift. De theorie van het middelpunt van evenwijdige krachten is een middel om langs eenvoudigen en elementairen weg, te bewijzen dat sommige rechte lijnen door één punt gaan, of dat twee of meer bepaalde punten identisch zijn. Zoo kan men hiermede bewijzen, dat in een vierhoek het snijpunt der lijnen die de middens van de overstaande zijden verbinden, identisch is met het midden der lijn die de middens van de diagonalen verbindt; verder dat in een viervlak de medianen door één punt gaan, evenals de lijnen die de middens der overstaande ribben verbinden, en dat die twee snijpunten identisch zijn, en ten slotte ook de reden vinden waarin dat punt die lijnen verdeelt. Ook meer ingewikkelde eigenschappen kan men er mee bewijzen, b.v. deze stelling: De lijnen die de hoekpunten van een driehoek verbinden met de punten waarin de overstaande zijden geraakt worden door hun aangeschreven



cirkels, gaan door één punt; dit punt is hetzelfde als het middelpunt van den cirkel beschreven in den driehoek, die ontstaat, als men door de hoekpunten van den oorspronkelijken lijnen trekt evenwijdig met de overstaande zijden.

Veronderstel, om dit te bewijzen, dat er in de hoekpunten A, B en C van eenen driehoek krachten in dezelfde richting werken, resp. groot:  $(s-a)p$ ,  $(s-b)p$  en  $(s-c)p$ . Om het

middelpunt van die krachten te bepalen (zie fig. 4), kunnen we eerst  $(s - c)p$  en  $(s - b)p$  samenstellen; de resultante van die twee krachten grijpt aan in E, zóó dat  $BE = s - c$  en  $CE = s - b$  is, m. a. w. E is het raakpunt van BC met haar aangescroven cirkel; de resultante in E moeten we nog samenstellen met de kracht in A, dus moet het middelpunt der krachten op AE liggen; maar ook moet het liggen op de lijn die C met het raakpunt op AB verbindt, en eindelijk ook op de lijn die B met het raakpunt op AC verbindt, en daar er maar één middelpunt is, gaan de drie bedoelde lijnen door één punt. (Verder is gemakkelijk na te gaan hoe die lijnen elkaar verdeelen).

We kunnen het middelpunt ook volgenderwijs bepalen: trekken we door de hoekpunten lijnen ovenwijdig met de overstaande zijden, dan ontstaat er een driehoek  $A'B'C'$ , waarin B het midden is van  $A'C'$ , enz. Splitsen we nu de kracht  $(s - c)p$ , die in C aangrijpt, in twee daarmede evenwijdige die aangrijpen in  $A'$  en in  $B'$ , dan krijgen we in  $A'$  een kracht:  $\frac{1}{2}(s - c)p$   
 Door splitsing van  $(s - b)p$  " " " :  $\frac{1}{2}(s - b)p$

Totaal in  $A'$ :  $\frac{1}{2}ap$ , en  
 dus in  $B'$ :  $\frac{1}{2}bp$  en in  $C'$ :  $\frac{1}{2}cp$ ; deze krachten hebben hun middelpunt in dat van den ingeschreven cirkel van  $A'B'C'$ , zoodat dit punt identisch blijkt te zijn met het bovengevonden snijpunt.

Op analoge manier kan men, met behulp van de stelling op bl. 359 bewezen, laten zien dat het middelpunt van den ingeschreven cirkel bij een vierhoek in ééne rechte lijn ligt met de middens van de diagonalen, en verder dat genoemd punt den afstand tusschen de twee andere verdeelt in reden van de sommen der stukken aan het eerste en derde, en aan het tweede en vierde hoekpunt.

---

## ENKELE BEREKENINGEN MET DE REKENLINIAAL

DOOR

F. J. V A E S.

(Rotterdam).

De rekenliniaal, waarvan het gebruik voor berekeningen in de praktijk meer en meer algemeen wordt, leent zich zeer goed voor de bepaling van hoogere machtswortels en de oplossing van enkele vergelijkingen. In het volgende wordt besproken :

- 1°. Een niet algemeen bekende bepaling van  $a^3$  en  $\sqrt[3]{a}$ .
- 2°. Een daarbij aansluitende bepaling van  $a^5$ ,  $\sqrt[5]{a}$ ,  $a^7$ ,  $\sqrt[7]{a}$ , enz.
- 3°. Een oplossing van  $a \sin x + b \cos x = c$ .
- 4°. Een oplossing van  $x^m \pm ax \pm b = 0$ .
- 5°. Een oplossing van  $x^m \pm x^n \pm ax \pm b = 0$ .

2. De inrichting van de gewone rekenliniaal (van Mannheim) wordt bekend ondersteld. Op een liniaal  $l_1$  is een logaritmische verdeeling aangebracht, en op een schuif  $s_1$  een dergelijke verdeeling, zoodat als men het beginpunt van  $s_1$  bij het punt  $a$  van  $l_1$  plaatst, tegenover het punt  $b$  van  $s_1$  het produkt  $ab$  wordt afgelezen op  $l_1$ .

Op de liniaal is nog een tweede verdeeling  $l_2$  aangebracht, waarvan de deelen half zoo groot zijn als die van  $l_1$ ; deze verdeeling  $l_2$  is zoodanig geplaatst, dat boven het punt  $a$  van  $l_1$ , op  $l_2$  de waarde  $a^2$  wordt afgelezen. Voor die aflezing kan een looper gebruikt worden.

Op de schuif is ook een tweede verdeeling aangebracht gelijk aan die van  $l_2$ , zoodanig dat de begin- en eindpunten van  $s_1$  en  $s_2$  samenvallen, en dus de deelstrepen van  $s_2$  juist staan tegenover die van  $l_2$ , als men de verdeelingen van  $s_1$  geplaatst heeft tegenover die van  $l_1$ .

1. Bepaling van  $a^3$  en  $\sqrt[3]{a}$ .

3. De gewone wijze van werken ter berekening van  $a^3$  is, dat men op de schaal  $l_1$  het getal  $a$  aanwijst door het beginpunt van de schuif, dan eveneens op  $s_2$  het punt  $a$  zoekt en afleest welk getal dit aanwijst op  $l_2$ . Want daar de deelen op  $s_1$  en  $l_1$  tweemaal zoo groot zijn als de overeenkomstige op  $s_2$  en  $l_2$  telt men bij elkander  $\log a$  en  $2 \log a$ .

$\sqrt[3]{a}$  wordt gevonden door de schuif zoodanig te verplaatsen, dat het beginpunt van  $s_1$  op  $l_1$  hetzelfde getal aanwijst, als het gegeven getal, dat op  $l_2$  genomen is, aangeeft op  $s_2$ . Door beproeving is de uitkomst vrij spoedig te vinden.

4. Er is echter een eenvoudiger methode, die o. a. op de beschrijving van de rekenliniaal van Mannheim is aangegeven, doch die niet algemeen bekend schijnt te zijn.

*Bepaling van  $a^3$ :* Draai de schuif om, zoodat  $s_2$  naast  $l_1$ , en  $s_1$  naast  $l_2$  staat. Neem op  $s_2$  en  $l_1$  het gegeven getal, en stel de punten tegenover elkander. Op  $l_2$  wordt dan  $a^3$  gevonden bij het eind- of beginpunt van  $s_1$ . Want men telt  $\log a$  en  $2 \log a$  bij elkander op.

Op  $s_2$  (en  $l_2$ ) komen twee punten voor, waarbij hetzelfde getal  $a$  geschreven is; het eene vertegenwoordigt een 10-maal grootere waarde dan het andere.

Al naar gelang men het eene of het andere punt gebruikt vindt men  $a^3$  of  $\frac{a^3}{10}$  of  $\frac{a^3}{100}$ .

5. *Bepaling van  $\sqrt[3]{a}$ .* Uit het voorgaande volgt onmiddellijk: Plaats begin- of eindpunt van  $s_1$  bij het getal  $a$  (of bij  $\frac{a}{10}$ , of bij  $\frac{a}{100}$ ) op  $l_1$ , en zoek op  $s_2$  en  $l_1$  twee gelijke getallen, die juist tegenover elkander staan. Deze geven den wortel aan.

Bepaling van  $a^5$  en  $\sqrt[5]{a}$ .

6. De gewone wijze van werken is:

Voor  $a^5$ . Eerst  $a^4$  te zoeken en dit te vermenigvuldigen met  $a$ .

Voor  $\sqrt[5]{a}$ . De logaritmenschaal te gebruiken, die aan de onderzijde van de schuif is aangebracht.

Voor alle hoogere machtswortels gebruikt men steeds de laatstgenoemde schaal.

7. In verband met de bepaling van  $a^3$  en  $\sqrt[3]{a}$  kan men echter den volgenden weg inslaan:

*Voor  $a^5$ .* Draai de schuif om, en stel het getal op  $s_2$  tegenover zijn kwadraat op  $l_1$ ; men leest dan op  $l_2$  de waarde  $a^5$  af, of ook  $\frac{a^5}{10}$  of  $\frac{a^5}{100}$ , al naar gelang de ligging van het punt  $a$  op  $s_1$ .

*Voor  $\sqrt[3]{a}$ .* Stel  $s_1$  bij  $a$  (of  $\frac{a}{10}$  of  $\frac{a}{100}$ ) op  $l_2$  en zoek op  $s_2$  het getal, dat tegenover zijn kwadraat staat op  $l_1$ .

Met behulp van den looper is dit spoedig uit te voeren.

Bepaling van  $a^7$  en  $\sqrt[7]{a}$ , en hoogere machtswortels.

8. *Voor  $a^7$ .* Bepaal  $a^3$  als boven en stel  $a$  op  $s_2$  tegenover  $a^3$  op  $l_1$ . Dan wordt op  $l_2$  aangewezen  $a^7$ , of  $\frac{a^7}{10}$ , of  $\frac{a^7}{100}$ .

*Voor  $\sqrt[7]{a}$ .* Stel het eind- of beginpunt van  $s_2$  bij  $a$  (of  $\frac{a}{10}$  of  $\frac{a}{100}$ ) op  $l_2$ , en zoek op  $s_2$  een getal, dat tegenover zijn derdemacht op  $l_1$  staat.

Dit vereischt eenig heen en weer verplaatsen van de schuif, omdat men telkens van een aangenomen waarde den derdemachtswortel moet zoeken. Hieraan is tegemoet te komen door die bepaling op een tweede rekenliniaal uit te voeren.

De graad van nauwkeurigheid blijkt hieruit, dat voor  $\sqrt[20]{a}$  gevonden werd 1,535, terwijl een logarithmentafel met 5 decimalen geeft 1,534.

9. De bepaling van  $a^8$ ,  $\sqrt[8]{a}$ ,  $a^9$ ,  $\sqrt[9]{a}$ ,  $a^{12}$ ,  $\sqrt[12]{a}$  enz. is terug te brengen tot verheffing tot lagere machten, of trekken van lagere wortels.  $a^{11}$  is te vinden door  $a$  op  $s_2$  te stellen tegenover  $a^5$  op  $l_1$ , en  $\sqrt[11]{a}$  door op  $s_2$  een getal te zoeken, dat tegenover zijn vijfdemacht op  $l_1$  staat.

Eenzoo zijn  $a^{13}$ ,  $a^{17}$  enz.,  $\sqrt[13]{a}$ ,  $\sqrt[17]{a}$  enz. in verband te brengen met  $a^6$ ,  $a^8$  enz.

Oplossing van  $a \sin x + b \cos x = c$ .

10. Daar de rekenliniaal slechts sinussen en tangenten aan geeft is het wenschelijk geen andere goniometrische functies te gebruiken.

Men schrijve dus:

$$\frac{a}{b} \sin x + \cos x = \frac{c}{b},$$

stelle  $\frac{a}{b} = \cot \phi$ , en dus  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \phi$ .

Zoodat de vergelijking te schrijven is

$$\frac{\cos \phi \sin x}{\sin \phi} + \cos x = \frac{c}{b},$$

of 
$$\sin (x + \phi) = \frac{c}{b} \sin \phi.$$

De behandeling is dus als volgt:

Bepaal  $\frac{c}{b}$  en noteer de waarde.

Bepaal  $\frac{b}{a}$  op  $l_1$ , en houdt die waarde met den looper vast.

Keer de schuif om en bepaal  $\phi$ , als staande op de met T gemerkte verdeling tegenover de waarde  $\frac{b}{a}$ . Noteer de waarde van  $\phi$ .

Plaats het beginpunt van de schuif tegenover de reeds bepaalde waarde  $\frac{c}{b}$  op  $l_2$ , en zoek op de met S gemerkte schaal de waarde  $\phi$ .

Daartegenover vindt men op  $l_2$  de waarde van het tweede lid  $\frac{c}{b} \sin \phi$ .

Houdt die waarde met den looper vast.

Stel de schuif zoodanig, dat begin- en eindpunt samenvallen met die van  $l_1$  en  $l_2$ , en lees op S den hoek af door den looper aangegeven. Dit is  $x + \phi$ .

Heeft men twee rekenlinialen ter beschikking, dan bepale men  $\frac{c}{b}$  op de eerste,  $\frac{b}{a}$  en  $\phi$  op de tweede,  $\frac{c}{b} \sin \phi$  en  $x + \phi$  op de eerste.

Oplossing van  $x^* \pm ax \pm b = 0$ .

11. Men schrijve  $x^* = a \left( x \mp \frac{b}{a} \right)$  of  $x^* = a \left( \frac{b}{a} - x \right)$  en bepale eerst  $\frac{b}{a}$ .

Dan stelt men het beginpunt van  $s_1$  bij  $a$  op  $l_1$ , geeft aan  $x$  een waarde, zoodanig dat  $x \mp \frac{b}{a}$  of  $\frac{b}{a} - x$  een rond getal is,

bepaalt (op een tweede rekenliniaal)  $x^*$ , en vergelijkt dit met het af te lezen product  $a \left( x \mp \frac{b}{a} \right)$  of  $a \left( \frac{b}{a} - x \right)$ .

Onmiddellijk is te zien, of  $x$  te groot dan wel te klein is genomen, en men verandert nu  $x$  in de juiste richting telkens met 0.1, tot men voor  $x^*$  een waarde vindt, nabij het afgelezen product. Dan kan  $x$  met kleinere bedragen worden veranderd, en kan men met vrij groote nauwkeurigheid een der wortels bepalen.

Voor  $n = 2$  kan men met een enkele rekenliniaal ~~volstaan~~. Voor  $n > 2$  is het gebruik van twee of meer linialen gewenscht.

Van de vergelijking

$$x^2 - 3.27x + 1.642 = 0$$

werd als een der wortels gevonden:

$$w_1 = 2.65.$$

De andere is dus:  $w_2 = \frac{1.642}{2.65}$  (met de rekenliniaal bepaald).

Blijkbaar is  $w_1 + w_2 = 3.27$ .\*)

Oplossing van  $x^m \pm ax^n \pm bx \pm c = 0$ .

12. Men schrijve:

$$\left( \frac{x}{\sqrt[n]{a}} \right)^m = \mp x^n \mp \frac{b}{a} x \mp \frac{c}{a},$$

geve aan  $x$  een willekeurige waarde, en bepale de waarde  $p$  van het eerste lid. Dan zoekt men op een tweede liniaal (al of niet met behulp van een derde) een wortel van

$$\mp x^n \mp \frac{b}{a} x \mp \left( \frac{c}{a} \pm p \right) = 0$$

en vergelijkt de uitkomst met de eerst aangenomen waarde.

Door  $x$  in de juiste richting met kleine bedragen te doen veranderen kan men een wortel vinden.

---

\*) Voor eenige jaren is door den heer Beghin een rekenliniaal in den handel gebracht, die eenigzins afwijkt van de meest gebruikte (van Mannheim). De methode door den heer B. aangegeven om een vierkantsvergelijking op te lossen vereischt het telkens optellen van twee getallen van 3 of 4 cijfers. Men is daarbij spoedig geneigd die getallen telkens op te schrijven, waardoor het nut van de rekenliniaal vrij wel verloren gaat, en de oplossing meer tijd vereischt dan de directe.

Verder dan de oplossing van derdemachtsvergelijkingen gaat de heer B. niet.



## EEN NIEUWE CIRKEL IN DEN MODERNEN DRIEHOEK,

DOOR

H. A. W. SPECKMAN.

(Arnhem.)

§ 1. Zij ABC de gronddriehoek, H het hoogtepunt, O het middelpunt van den omschreven cirkel, H<sub>r</sub> het reciproke of isotomisch toegevoegde punt aan H. Zooals bekend is, is H<sub>r</sub> ook het punt  $\Lambda$  van Brocard, met het zwaartepunt Z en het symmediaanpunt K van driehoek ABC op eene lijn gelegen, zoodat  $AZ = 2ZK$  is; het is dus anticomplementair met het symmediaanpunt. Zij N het punt van Tarry, R dat van Steiner van  $\triangle ABC$ , N' het midden van HH<sub>r</sub>, O' het midden van H<sub>r</sub>N'. Zooals bekend is, loopt H<sub>r</sub>H // aan OK en is  $= 2OK$ ; dus  $H_rN' \parallel OK$  of aan den diameter van den Brocardcirkel.

§ 2. Zij  $A'B'C'$  een driehoek, omgekeerd gelijkvormig en perspectivisch met driehoek ABC, en tot perspectivisch middelpunt hebbende het zwaartepunt Z van driehoek ABC. De meetkundige plaats der punten van  $\triangle ABC$ , die met de gelijkstandige punten van  $\triangle A'B'C'$  op ééne lijn zijn gelegen, gaande door Z, is eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door Z, A, B en C.

Eenzoo is de meetkundige plaats der punten van  $\triangle A'B'C'$ , die met gelijkstandige punten van  $\triangle ABC$  op ééne lijn door Z liggen, eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door A', B', C' en Z. De hoogtepunten H en H' der driehoeken ABC en  $A'B'C'$  zijn gelijkstandige punten. Ook liggen ze op de gelijkzijdige hyperbolen ABCZ en  $A'B'C'Z$ , dus H, Z en H' liggen op ééne lijn. Noemen we de orthologische middelpunten N en N' der driehoeken ABC en  $A'B'C'$  *normaalpunten* der driehoeken ABC en  $A'B'C'$ , dan ligt, zooals bekend is, N op den omschreven cirkel van  $\triangle ABC$  en N' op dien van  $\triangle A'B'C'$ . Volgens de stelling:

De orthologische middelpunten of normaalpunten van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken liggen op

ééne lijn met het perspectivisch middelpunt, liggen dus  $N$ ,  $Z$  en  $N'$  op ééne lijn. Daar  $N$  en  $N'$  gelijkstandige punten der  $\triangle ABC$  en  $A'B'C'$  zijn, liggen ze dus ook op de gelijkzijdige hyperbolen  $ABCZ$  en  $A'B'C'Z$ !

De normaalpunten  $N$  en  $N'$  zijn dus de *vierde snijpunten* dier gelijkzijdige hyperbolen met de omgeschreven cirkels der  $\triangle ABC$  en  $A'B'C'$ .

Deze gelijkzijdige hyperbolen zijn dus de Kiepert'sche hyperbolen  $\Gamma$  en  $\Gamma'$  en hunne assen zijn evenredig aan een paar gelijkstandige zijden der driehoeken.

§ 3. Er bestaat een oneindig aantal driehoeken  $A'B'C'$ , omgekeerd gelijkvormig met  $\triangle ABC$  en perspectivisch er mede in  $Z$ . Daar de punten  $H$ ,  $Z$  en  $H'$  op ééne lijn steeds liggen, is de meetkundige plaats der hoogtepunten van de driehoeken  $A'B'C'$  de lijn  $HZ$ . Nemen we nu als hoogtepunt  $H'$  van  $\triangle A'B'C'$  het *middelpunt*  $O$  van den *omgeschreven cirkel* van  $\triangle ABC$ , dan is  $\triangle A'B'C'$  daardoor volkomen bepaald.

Stelling. Trekt men door  $O$  lijnen, evenwijdig aan  $NA$ ,  $NB$ ,  $NC$  ( $N$  is het punt van Tarry van  $\triangle ABC$ ), die de lijnen  $ZA$ ,  $ZB$  en  $ZC$  respectievelijk snijden in de punten  $A'$ ,  $B'$  en  $C'$ , dan is  $\triangle A'B'C'$  omgekeerd gelijkvormig perspectivisch met  $\triangle ABC$ , hebbende tot perspectivisch centrum het punt  $Z$  van  $\triangle ABC$ , en tot hoogtepunt  $H'$  het punt  $O$  van  $\triangle ABC$ .

Bewijs. Het punt van Tarry  $N$  van  $\triangle ABC$  is het normaalpunt van  $\triangle ABC$  met de driehoeken, omgekeerd gelijkvormig met  $\triangle ABC$  en perspectivisch er mede in  $Z$ , daar  $N$  het vierde snijpunt is van de gelijkzijdige hyperbool  $ABCZ$  en den omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ . De lijnen  $NA$ ,  $NB$  en  $NC$  staan dus loodrecht op de zijden  $B'C'$ ,  $C'A'$  en  $A'B'$  der der driehoeken  $A'B'C'$ . De hoogtelijnen van de driehoeken  $A'B'C'$  zijn dus evenwijdig aan  $NA$ ,  $NB$  en  $NC$ , en daar  $H' = O$  het hoogtepunt van den aangenomen  $\triangle A'B'C'$  was, zijn  $OA'$ ,  $OB'$  en  $OC'$   $\parallel$  aan  $NA$ ,  $NB$  en  $NC$ .

Gevolg. De driehoek  $A'B'C'$  is homothetisch met den eersten Brocard-driehoek van  $\triangle ABC$ .

§ 4. Het normaalpunt  $N'$  van  $\triangle A'B'C'$  ten opzichte van  $\triangle ABC$  of het punt van Tarry  $N'$  van  $\triangle A'B'C'$  is het midden der lijn  $HH'$ , van  $\triangle ABC$ .

**Bewijs.** Volgens de stelling, dat bij twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken de hoogtepunten en de orthologische middelpunten (normaalpunten) op een cirkel liggen, liggen bij den gronddriehoek  $ABC$  en den eersten driehoek van Brocard  $\alpha\beta\gamma$  van dien gronddriehoek, de punten  $N$ ,  $O$ ,  $H$  en het hoogtepunt  $H_1$  van den 1<sup>sten</sup> Brocard-driehoek  $\alpha\beta\gamma$  op één cirkel. Het hoogtepunt  $H_1$  is echter, zooals bekend is, het midden van de lijn  $HH_2$ , terwijl  $N$ ,  $Z$  en  $H_1$  op ééne lijn liggen. Bij den gronddriehoek  $ABC$  en den driehoek  $A'B'C'$  zijn de hoogtepunten  $H$  en  $O$ , de normaalpunten  $N$  en  $N'$ . Deze vier punten liggen ook op eenen cirkel, terwijl  $N$ ,  $Z$  en  $N'$  ook op ééne lijn liggen. Het punt  $N'$  valt dus samen met het midden  $H_1$  der lijn  $HH_2$ .

§ 5. De omgeschreven cirkel van driehoek  $A'B'C'$  is de cirkel, op de lijn  $H,N'$  als middellijn beschreven.

**Bewijs.** Het middelpunt der Kiepert'sche hyperbool  $\Gamma'$  van  $\triangle A'B'C'$  is het midden  $M'$  der lijn  $ON'$ , daar dit het midden is der lijn die het hoogtepunt  $O$  van  $\triangle A'B'C'$  met het 4<sup>de</sup> snijpunt  $N'$  van  $\Gamma'$  met den omgeschreven cirkel van  $\triangle A'B'C'$  verbindt. Nu is, als  $Z'$  het zwaartepunt van  $\triangle A'B'C'$  is, de lijn  $ZZ'$  ook middellijn van  $\Gamma'$ , dus  $ZM' = M'Z'$ , en  $OZ'N'Z$  is een parallelogram of  $OZ' \parallel ZN'$  en  $OZ \parallel Z'N'$ . Ook is  $OK \parallel H,N'$ ,  $OZ : OH = 1 : 3$ , dus  $Z'N' : OH = 1 : 3$ . Zij  $O'$  het snijpunt van  $OZ'$  met  $N'H$ , dan is  $O'Z' : O'O = Z'N' : OH = 1 : 3$ , dus  $O'$  is het middelpunt van den omschreven cirkel van  $\triangle A'B'C'$  en  $O'N' = \frac{1}{2} N'H$ , dus  $O'$  is het midden van de lijn  $H,N'$ .

Gevolg.  $Z'$  van  $\triangle A'B'C'$  is het midden van  $ZH_2$ .

§ 6. De loodlijnen, uit het midden  $N'$  van  $HH_2$  op de zijden van  $\triangle ABC$  neergelaten, snijden den cirkel, op  $N'H$  als diameter beschreven, in punten  $A'$ ,  $B'$  en  $C'$ , zoodat  $\triangle A'B'C'$  omgekeerd gelijkvormig perspectivisch is met  $\triangle ABC$  en met perspectivisch centrum  $Z$ .

Het bewijs volgt uit de vorige stelling.

**Stelling:** De lijnen, uit  $H$ , evenwijdig aan de zijden van  $\triangle ABC$  getrokken, snijden den cirkel, op  $H,N'$  als middellijn beschreven in punten  $A'B'C'$ , zoodat  $\triangle A'B'C'$  omgekeerd gelijkvormig perspectivisch is met  $\triangle ABC$  en met perspectivisch centrum  $Z$ .

Bewijs. Daar  $A'$ ,  $B'$  en  $C'$  gelegen zijn op een cirkel, met  $N'H$ , tot diameter, is  $\angle H, A'N' = 90^\circ$ . Is dus  $H, A' \parallel BC$ , dan is  $N'A' \perp$  op  $BC$  enz. Dus  $\triangle A'B'C'$  is perspectivisch in  $Z$  met  $ABC$ .

Gevolg.  $H$ , is het Steinersche punt van  $\triangle A'B'C'$ .

§ 7. Zij  $K$ , isotomisch toegevoegd aan  $K$  in  $\triangle ABC$  en  $K'$ , isotomisch toegevoegd aan  $K'$  in  $\triangle A'B'C'$ , dan vallen beide punten  $K$ , en  $K'$  samen in het snijpunt van  $NO$  en  $HH$ .

Bewijs. Het punt  $K$ , van  $\triangle ABC$ , isotomisch toegevoegd aan  $K$ , is, zooals bekend is, het perspectivisch centrum van den gronddriehoek en den eersten Brocard-driehoek. Het is het snijpunt van de lijn  $NO$  met  $HH$ .

Het punt  $K'$  van  $\triangle A'B'C'$  ligt op de lijn  $N'O'$  of  $HH$ . Verder is

$$NO : OK = N'O' : O'K'.$$

Nu is  $OO' \parallel NN'$ , dus  $K$ , en  $K'$  vallen samen.

Gevolg. De hyperbolen  $\Gamma$  en  $\Gamma'$  der driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$  snijden elkaar in de punten  $Z$  en  $K$ .

§ 8. Het punt  $H'$  van  $\triangle A'B'C'$  ligt op de lijn  $NO$ , terwijl  $H, H' \parallel OH$  is.

Bewijs. Het punt  $H'$  ligt op  $H'K'$  of op  $OK$ , dus op  $NO$ . Ook is

$$H'K' : K'H' = HK : K, H.$$

Dus is  $OK : K, H' = HK : K, H$ , of  $H, H' \parallel OH$ .

Gevolg. Het punt  $K'$  van  $\triangle A'B'C'$  ligt op de lijn  $H, Z'$  zoodat  $H, Z' = 2Z'K'$  is.

§ 9. Neemt men op de lijnen  $MA$ ,  $M'B'$  en  $M'C'$  stukken  $M'\alpha = M'A'$ ,  $M'\beta = M'B'$  en  $M'\gamma = M'C'$ , dan is  $\alpha\beta\gamma$  de eerste driehoek van Brocard van  $\triangle ABC$ .

Bewijs.  $\triangle \alpha\beta\gamma$  is gelijk en gelijkvormig met  $A'B'C'$ , dus omgekeerd gelijk en gelijkvormig met  $ABC$ . De middellijn  $H, N'$  van den cirkel om  $\triangle A'B'C'$  wordt ten opzichte van  $M'$  overgespiegeld in de middellijn  $OK$  van den cirkel om  $\triangle \alpha\beta\gamma$ .

Het punt  $Z'$  van  $\triangle A'B'C'$  wordt  $Z$  van  $\triangle \alpha\beta\gamma$  en van  $\triangle ABC$ , dus  $\alpha\beta\gamma$  is de eerste Brocard-driehoek.

§ 10. De as van perspectief L der driehoeken ABC en A'B'C' staat loodrecht op NZ.

Bewijs. De as van perspectief van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken staat altijd loodrecht op de lijn, die de orthologische middelpunten verbindt en deelt den afstand tusschen de diametraal tegenover de orthologische middelpunten gelegen punten middendoor. Dus de as van perspectief van ABC en A'B'C' staat  $\perp$  op NN' of  $\perp$  NZ en deelt den afstand H,R middendoor.

§ 11. Laat men uit de middens der zijden van  $\triangle A'B'C'$  loodlijnen neer op de overeenkomstige zijden van  $\triangle ABC$ , dan snijden deze elkaar op het midden der lijn H,O in een punt T'.

Bewijs. Het punt Z' is het zwaartepunt van  $\triangle A'B'C'$  en van  $\triangle OH,N'$ .

Zijn  $m'_a$ ,  $m'_b$  en  $m'_c$  de middens der zijden van  $\triangle A'B'C'$ , dan is  $\triangle m'_a m'_b m'_c$  de complementaire driehoek van  $\triangle ABC$ .

De loodlijnen, uit  $m'_a$ ,  $m'_b$  en  $m'_c$  op de zijden van  $\triangle ABC$  neergelaten, zijn evenwijdig aan de lijnen N'A', N'B' en N'C'.

T' is dus het complementaire punt van N'. De punten N', Z' en T' liggen dus op ééne lijn, zoodat  $N'Z' = 2Z'T'$  is, en daar Z' het zwaartepunt is van  $\triangle ON'H$ , is T' het midden van OH. De lijn T'M' is een diameter van den negenpuntcirkel van  $\triangle A'B'C'$ .

§ 12. De loodlijnen, uit de middens der zijden van  $\triangle ABC$  op de zijden van  $\triangle A'B'C'$  neergelaten, snijden elkaar in een punt T, het midden der lijn RH.

Bewijs. Zij T het midden der lijn RH,  $m_a$ ,  $m_b$  en  $m_c$  de middens der zijden van  $\triangle ABC$ . De driehoeken ABC en RHN hebben hetzelfde zwaartepunt Z.

Nu is  $AZ : Zm_a = 2 : 1$  en  $NZ : ZT = 2 : 1$ , dus  $m_a T \parallel AN$  of  $m_a T \perp B'C'$ .

Evenzoo is  $m_b T \perp A'C'$  en  $m_c T \perp A'B'$ . Daar Z het zwaartepunt van  $\triangle NRH$  is, liggen N, Z en T dus op eene lijn, dus T, N' en Z liggen op eene lijn en H,R is  $\parallel TN'$  of  $\parallel ZN$ .

De as van perspectief L der driehoeken ABC en A'B'C' staat dus  $\perp$  op H,R, daar ze  $\perp$  op NZ staat.

Volgens § 10 wordt H,R middendoor gedeeld, dus L deelt H,R rechthoekig middendoor.

§ 13. Verbindt men het punt  $H$ , met de hoekpunten van  $\triangle ABC$ , dan wordt de omgeschreven cirkel van  $\triangle A'B'C'$  gesneden door de verbindingslijnen in de punten  $A'_2$ ,  $B'_2$  en  $C'_2$ . Alsdan zijn de driehoeken  $A'B'C'$  en  $A'_2B'_2C'_2$  perspectivisch.

Eenzoo, verbindt men het punt van Steiner van  $\triangle ABC$  met de hoekpunten van  $\triangle A'B'C'$ , dan snijden de verbindingslijnen den omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$  in de punten  $A_2$ ,  $B_2$  en  $C_2$ . De driehoeken  $ABC$  en  $A_2B_2C_2$  zijn alsdan perspectivisch met centrum  $P$ .

Bewijs. De algemeene stelling geldt:

Zijn twee driehoeken  $PQR$  en  $pqr$  omgekeerd gelijkvormig en trekt men uit de hoekpunten van driehoek  $PQR$  lijnen, evenwijdig aan de zijden van  $\triangle pqr$ , dan snijden deze drie lijnen elkaar in één punt van  $V$  van den omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ . Verbindt men  $V$  met de hoekpunten van  $\triangle pqr$ , dan snijden deze lijnen den omgeschreven cirkel van  $\triangle PQR$  in drie punten  $P_1Q_1$  en  $R_1$ , zoodat  $\triangle PQR$  perspectivisch is met  $\triangle P_1Q_1R_1$ <sup>1)</sup>.

Passen we deze stelling toe op de omgekeerd gelijkvormige driehoeken  $ABC$  en  $A'B'C'$ .

De lijnen uit  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  // aan de zijden van  $\triangle ABC$  snijden elkaar in  $H$ . De lijnen uit  $A$ ,  $B$  en  $C$  // aan de zijden van  $\triangle A'B'C'$  getrokken, snijden elkaar in het punt van Steiner  $R$ . Derhalve is  $\triangle A'_2B'_2C'_2$  perspectivisch met  $A'B'C'$  en  $\triangle A_2B_2C_2$  perspectivisch met  $ABC$ .

De perspectivische as van de driehoeken  $A'_2B'_2C'_2$  en  $ABC$  is de poollijn van het centrum van perspectief ten opzichte van den omgeschreven cirkel dier driehoeken. Evenzoo is de as van perspectief van de driehoeken  $A_2B_2C_2$  en  $ABC$  de poollijn van het centrum van perspectief ten opzichte van den omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$ .

---

<sup>1)</sup> Zijn de driehoeken  $PQR$  en  $pqr$  omgekeerd gelijkvormig, dan verandert het punt  $V$  op den omgeschreven cirkel van  $\triangle PQR$  niet, als men de zijden van  $\triangle pqr$  evenwijdig aan zich zelf verplaatst. Verplaatst men nu alleen de zijde  $pq$  evenwijdig aan zichzelf, dan ontstaan op de beenen  $rp$  en  $rq$  van  $\angle prq$  twee projectivische puntreeksen,  $p_i$  en  $q_i$  ( $i=1, 2, 3, n, \infty$ ). Het punt  $V$ , met de punten  $p_i$  en  $q_i$  verbonden, geeft twee projectivische stralenbundels ( $Vp_i$ ) en ( $Vq_i$ ), waarvan de lijn, uit  $V$  evenwijdig aan  $pq$  getrokken, dus de lijn  $VR$  een dubbelstraal is.

Evenzoo is de lijn  $Vr$  of  $VR_1$ , een dubbelstraal. Tot de bundel  $(Vp_i)$  behoort de straal, uit  $V$  evenwijdig aan  $rp$  getrokken, dus  $VQ$ . Tot de tweede bundel  $(Vq_i)$  behoort de straal, uit  $V$  evenwijdig aan  $rq$  getrokken, dus  $VP$ .

Van de projectivische stralenbundels  $V(R, R_1, P_1, Q)$  en  $V(R, R_1, Q_1, P)$  vormen echter de dubbelstralen met elk stelsel van de stralenparen

$$(VP_1, VP) \text{ en } (VQ, VQ_1)$$

eene involutie, zoodat de twee stralenstelsels

$$(VR, VP, VR) \text{ en } (VR_1, VP_1 \text{ en } VQ_1)$$

in involutie zijn.

Als echter door het gemeenschappelijk toppunt  $V$  van twee stralenbundels in involutie een willekeurige cirkel wordt gebracht, snijden twee overeenkomende stralen den cirkel steeds in 2 punten, zoodat de verbindingslijnen dier twee punten steeds door éézelfde punt gaan. Derhalve gaan de lijnen  $RR_1$ ,  $PP_1$  en  $QQ_1$  steeds door één punt en zijn de driehoeken  $PQR$  en  $P_1Q_1R_1$  perspectivisch.

Gevolg 1. De gronddriehoek  $ABC$  is omgekeerd perspectivisch met den eersten Brocard-driehoek  $\alpha\beta\gamma$ . De lijnen, uit de hoekpunten van  $\alpha\beta\gamma$ , evenwijdig getrokken aan de overeenkomstige zijden van den driehoek  $ABC$ , snijden den Brocard-cirkel in het punt  $K$  (symmediaanpunt). De lijnen, die het punt  $K$  verbinden met de hoekpunten van  $\triangle ABC$ , snijden den Brocard-cirkel in de punten  $\alpha'_1$ ,  $\beta'_1$ ,  $\gamma'_1$ . De driehoek  $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ , de tweede Brocard-driehoek, is dus perspectivisch met den eersten Brocard-driehoek  $\alpha\beta\gamma$ .

Gevolg 2. Trekt men uit het punt van Steiner  $R$  van driehoek  $ABC$  lijnen naar de hoekpunten  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  van den 1<sup>sten</sup> Brocard-driehoek, dan snijden deze den omgeschreven cirkel van den  $\triangle ABC$  in punten  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ , zoodat  $\triangle \alpha_2\beta_2\gamma_2$  perspectivisch in  $Q$  is met  $\triangle ABC$ . Deze driehoek  $\alpha_2\beta_2\gamma_2$  is een derde Brocard-driehoek, die in eenzelfde verband tot den gronddriehoek staat, als de tweede Brocard-driehoek tot den eersten. De as van perspectief  $J$  der driehoeken  $ABC$  en  $\alpha_2\beta_2\gamma_2$  is de poollijn van  $Q$  ten opzichte van den omgeschreven cirkel van  $ABC$ . De lijn  $OQ$  is dus  $\perp$  op de lijn  $J$ .

OVER DE VERANDERING, DIE DE LEVENDE KRACHT VAN EEN  
ZICH VRIJ BEWEGEND LICHAAM VAN ONVERANDERLIJKE  
GEDAANTE DOOR HET PLOTSILING IN RUST BRENGEN  
VAN EEN PUNT DAARVAN ONDERGAAT,

DOOR

MEVR. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.

(Haarlem.)

(Oplossing van prijsvraag N<sup>o</sup>. 10 voor het jaar 1901.)

---

De opgaaf luidde aldus:

Van een zich vrij bewegend lichaam van onveranderlijke gedaante wordt plotseling een zijner punten P in rust gebracht door eene in dit punt aangrijpende impulsie. Wat is de meetkundige plaats der punten P zóó gelegen dat de nieuwe levende kracht eene gegeven fractie  $k$  zij der oude. Deze meetkundige plaats voor het algemeene of voor een of meer belangrijke bijzondere gevallen nader te bestudeeren.

I. Vergelijking van de meetkundige plaats.

Wij maken gebruik van de eigenschap, (Routh, Elementary Rigid Dynamics, § 295), dat bij het in rust brengen van een punt, het moment der hoeveelheid van beweging om elke lijn door dat punt onveranderd blijft. Stel de oorspronkelijke beweging is gegeven, voor het zwaartepunt als basispunt, door de translatiesnelheden  $u$ ,  $v$  en  $w$  en de hoeksnelheden  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  en  $\omega_z$ , waarbij de hoofdtraagheidsassen tot coördinaatassen zijn genomen.  $Ma^2$ ,  $Mb^2$  en  $Mc^2$  zijn de traagheidsmomenten om die assen. Wij bepalen het punt P door zijne rechthoekige coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$  en noemen de traagheidsmomenten en producten van het lichaam, t. o. van evenwijdige assen door P,  $Ma'^2$ ,  $Mb'^2$ ,  $Mc'^2$ ,  $Ma'd'^2$ ,  $Me'e'^2$  en  $Mf'^2$ , waarbij  $d'$ ,  $e'$  en  $f'$  ook imaginair kunnen zijn. De hoeksnelheden van de gewij-



zigde beweging om de laatstgenoemde assen noemen wij  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  en  $\Omega_z$ . Door op te schrijven, dat de momenten der hoeveelheden van beweging om de nieuwe assen vóór en na het aanbrengen van de impulsie, die het punt P in rust brengt, gelijk zijn, verkrijgen wij het volgende stel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} a^2\omega_x + vz - uy &= a'^2\Omega_x - f'^2\Omega_y - e'^2\Omega_z, \\ b^2\omega_y + ux - uz &= -f'^2\Omega_x + b'^2\Omega_y - d'^2\Omega_z, \\ c^2\omega_z + uy - vx &= -e'^2\Omega_x - d'^2\Omega_y + c'^2\Omega_z, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

waarin :

$$\begin{aligned} a'^2 &= a^2 + y^2 + z^2, & d'^2 &= yz, \\ b'^2 &= b^2 + x^2 + z^2, & e'^2 &= xz, \\ c'^2 &= c^2 + x^2 + y^2, & f'^2 &= xy, \end{aligned}$$

Als de nieuwe levende kracht gelijk is aan  $k$  maal de oorspronkelijke, die wij MT zullen noemen, dan is de arbeid, die de impulsie verricht  $= (1 - k)$  MT.

Dit geeft ons de vergelijking :

$$\begin{aligned} (1 - k)2T &= (1 - k)(a^2\omega_x^2 + b^2\omega_y^2 + c^2\omega_z^2 + u^2 + v^2 + w^2) = \\ &= \Sigma(u - \Omega_x y + \Omega_y z)(u - \omega_x y + \omega_y z) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Door de eliminatie van de  $\Omega$ 's tusschen het stelsel (1) en verg. (2) verkrijgen wij de vergelijking van de gezochte meetkundige plaats in dezen vorm :

$$\begin{aligned} (1 - k)2T \{ &\Sigma a^2 x^2 \Sigma x^2 + \Sigma b^2 c^2 (y^2 + z^2) + a^2 b^2 c^2 \} = \\ &= \Sigma a^2 x^2 (\Sigma ux)^2 + \Sigma b^2 c^2 [(y^2 + z^2)(\omega_y z - \omega_x y + u)^2 + \\ &+ \{vy + wz + x(\omega_x y - \omega_y z)\}^2] + a^2 b^2 c^2 \Sigma (\omega_y z - \omega_x y + u)^2 \dots (3) \end{aligned}$$

De meetkundige plaats is derhalve een oppervlak van den 4<sup>den</sup> graad, in de vergelijking waarvan de verhouding  $k$  der beide levende krachten lineair optreedt. Hieruit volgt, dat de verschillende oppervlakken, die men voor varieerende waarden van  $k$  verkrijgt, een bundel vierdegraadsoppervlakken vormen, die uit den aard van het vraagstuk een geheel en al onbestaanbare basiskromme moeten bezitten, terwijl zij de bestaansbare ruimte enkelvoudig vullen. Daar het in het algemeene geval niet mogelijk is bij het vastleggen van een punt de levende kracht onveranderd te laten en evenmin het lichaam door het vastleggen geheel tot rust te brengen, zal er een

maximaalwaarde zijn voor  $k$ , kleiner dan één, waarboven geen bestaانبare oppervlakken mogelijk zijn en eveneens een minimaalwaarde, grooter dan nul, waaronder de oppervlakken onbestaanbaar worden.

II. 1<sup>de</sup> bijzonder geval: de maximaalwaarde voor  $k$  is gelijk aan de éénheid.

Het 2<sup>de</sup> lid van verg. (3) is voor die waarde van  $k$  gelijk nul en dit kan (voor  $a$ ,  $b$  en  $c$  van nul verschillend) alleen geschieden voor:

$$\begin{aligned}u &= \omega_z y - \omega_y z, \\v &= \omega_x z - \omega_z x \\ \text{en } w &= \omega_y x - \omega_x y.\end{aligned}$$

Dit wil zeggen: het punt, dat wij vasthouden, had bij de oorspronkelijke beweging geen snelheid. Deze beweging was dus een zuivere rotatie en het oppervlak wordt dan voor  $k = 1$  gereduceerd tot een rechte: de rotatie-as.

III. 2<sup>de</sup> bijzonder geval: de minimaalwaarde voor  $k$  is gelijk nul.

Als het mogelijk is de impulsie zóó aan te brengen, dat het lichaam geheel tot rust komt, moet het stelsel (1) een oplossing toelaten als alle  $\Omega$ 's nul worden gesteld, dus moet kunnen worden voldaan aan:

$$\begin{aligned}a^2 \omega_x + vz - wy &= 0, \\b^2 \omega_y + wx - uz &= 0, \\ \text{en } c^2 \omega_z + uy - vx &= 0.\end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn strijdig tenzij  $\Sigma a^2 \omega_x u = 0$ , in woorden: tenzij de snelheid van het zwaartepunt ligt in het vlak, dat t. o. van een traagheidsellipsoïde toegevoegd is aan de richting van de tijdelijke schroefas. De drie vlakken, waarvan de vergelijkingen dan afhankelijk zijn, snijden elkaar dan volgens een lijn, die in dat zelfde aan de richting  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  toegevoegde vlak ligt. Deze lijn is evenwijdig aan de snelheid van het zwaartepunt, zij is voor  $k = 0$  hier de gezochte meetkundige plaats.

Dit alles had men ook door mechanische beschouwingen kunnen vinden nl. door op te merken, dat een beweging, die

door een impulsie vernietigd kan worden, zoodanig is, dat zij door een zuivere impulsie kan worden voortgebracht.

IV. 3<sup>de</sup> bijzonder geval: gelijke traagheidsmomenten.

Wij stellen  $a = b = c$ . De lijn door het zwaartepunt evenwijdig aan de schroefas nemen wij aan tot Z-as, dan is  $\omega_x = 0$  en  $\omega_y = 0$ . Tot Y-as nemen wij de richting loodrecht op de translatie van het zwaartepunt en op de schroefas, m. a. w. wij laten het YZ-vlak door de schroefas gaan, dan is  $v = 0$ ;  $w$  is dan de translatie volgens de schroefas. Wij kunnen steeds de assen zoo aannemen, dat  $u$  en  $\omega_z$  positieve grootheden zijn, voor  $w > 0$  is de schroefbeweging dan linksdraaiend. Wij stellen  $\omega_z = \omega$  en kunnen in dit bijzondere geval beide leden van verg. (3) deelen door den steeds positieven factor  $x^2 + y^2 + z^2 + c^2$ . Na rangschikking wordt dan de vergelijking:

$$x^2(w^2 - K) + y^2(u^2 + w^2 - K) + z^2(u^2 + c^2w^2 - K) - 2uwxz + 2c^2u\omega y + c^4w^2 - c^2K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin  $2kT = K$  is gesteld.

De bundel 4<sup>de</sup> graadsoppervlakken bestaat nu uit een onbestaanbaar 2<sup>de</sup> graadsoppervlak en uit een bundel 2<sup>de</sup> graadsoppervlakken.

Wij zullen nu onderzoeken voor welke waarden van  $x$ ,  $y$  en  $z$  de nieuwe levende kracht en dus  $K$  maximaal is. Daartoe differentiëren wij verg. (4) achtereenvolgens naar de 3 veranderlijken, waarbij wij de differentiaal-quotienten van  $K$  nul stellen. Dit geeft:

$$(w^2 - K)x - uwx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$(u^2 + w^2 - K)y + c^2u\omega = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{en } (u^2 + c^2w^2 - K)z - uwx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Combinatie van deze vergelijkingen met verg. (4) geeft:

$$u\omega y + c^2w^2 - K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Eliminatie van  $\frac{x}{z}$  tusschen de verg. (5) en (7) en van  $y$  tusschen de verg. (6) en (8) leidt tot dezelfde vierkantsvergelijking in  $K$ , nl.

$$K^2 - (u^2 + w^2 + c^2w^2)K + c^2w^2u^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De wortels van deze vergelijking, die steeds positief en bestaanbaar zijn, geven ons de maximum- en de minimumwaarden van  $K$ , die wij  $K_1$  en  $K_2$  zullen noemen. Zoowel met  $K_1$  als met  $K_2$  correspondeert niet een enkel punt  $P$ , maar een reeks punten, die een rechte lijn vormen. Zoowel voor  $K = K_1$  als voor  $K = K_2$  reduceert zich derhalve het oppervlak tot een rechte.

Als verg. (9) gelijke wortels heeft, wat zal geschieden voor  $u = 0$ ,  $w^2 = c^2 \omega^2$  gaat de verg. van het oppervlak over in:

$$k \cdot 2w^2 (x^2 + y^2 + z^2 + c^2) = w^2 (x^2 + y^2 + z^2 + c^2).$$

Welk punt van het lichaam wij ook vasthouden, altijd wordt de levende kracht daardoor tot op de helft teruggebracht. De voorwaarde hiervoor is in woorden: de schroefas moet gaan door het zwaartepunt en de levende kracht van de translatie moet gelijk zijn aan die van de rotatie.

De verg. (5)–(7) zijn tevens de vergelijkingen, die ons voor een bepaalde waarde van  $K$  de coördinaten van het middelpunt van het 2<sup>de</sup> graadsoppervlak geven en verg. (8) is de voorwaarde, dat dit middelpunt op het oppervlak zelf ligt. Voor  $K = K_1$  en  $K = K_2$  is er een oneindig aantal middelpunten op het oppervlak, die een rechte lijn vormen, waartoe het oppervlak zich reduceert: het oppervlak bestaat dan uit twee onbestaanbare vlakken, die elkaar volgens een bestaanbare rechte snijden. Hieruit volgt, dat de basiskromme van den bundel bestaat uit een scheeven vierhoek met toegevoegd onbestaanbare zijden. In het algemeen is de meetkundige plaats van de middelpunten van een bundel 2<sup>de</sup> graadsoppervlakken een ruimtekromme van den 3<sup>den</sup> graad. De beide gevonden rechten moeten daarvan een deel uitmaken, derhalve bestaat zij hier uit 3 rechten. De derde lijn is de lijn, die wij tot  $Y$ -as hebben aangenomen, want, als het oppervlak een middelpunt heeft, zijn daarvan de coördinaten:

$$x = 0, y = -\frac{c^2 u \omega}{u^2 + w^2 - K}, z = 0.$$

De beide met  $K_1$  en  $K_2$  overeenkomende rechten kruisen elkaar rechthoekig. Zij zijn beide evenwijdig aan het  $XZ$ -vlak en de vergelijkingen van hun projecties daarop zijn  $(w^2 - K_1)x = uwz$

en  $(w^2 - K_2)x = uwz$ . Stellen wij nu  $\frac{u \omega}{w^2 - K_1} \times \frac{u \omega}{w^2 - K_2} = q$

of  $q \{w^4 - (K_1 + K_3)w^2 + K_1K_3\} = u^2w^2$ , dan volgt uit verg. (9) dat de coëfficiënt van  $q$  gelijk is aan  $-u^2w^2$ , dus  $q = -1$ , waarmede het gestelde bewezen is.

Voor het geval  $K = u^2 + w^2$  ligt het middelpunt oneindig ver. Wij stellen die waarde van  $K$  gelijk  $K_2$  en kunnen dan aantoonen:

$$K_1 > K_2 > K_3.$$

Als er een middelpunt is, kunnen wij de assen daarheen verplaatsen. Om daarna de vergelijking op de hoofdasen te verkrijgen, moeten wij de reeds evenwijdig verplaatste X- en Z-assen draaiend om een hoek  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2uw}{w^2 - u^2 - c^2w^2}, \text{ onafhankelijk van } K.$$

De Y-as is in zijn oorspronkelijken stand reeds hoofdas. Als wij nu de assen steeds een positieven hoek kleiner dan  $90^\circ$  willen draaien, neemt de getransformeerde vergelijking twee verschillende vormen aan, naarmate  $w$  positief of negatief is. Voor een gemakkeijk overzicht zullen wij dit dus niet doen, de getransformeerde vergelijking is dan:

$$(K_3 - K)x'^2 + (K_2 - K)y'^2 + (K_1 - K)z'^2 + c^2 \frac{(K_1 - K)(K_3 - K)}{K_2 - K} = 0. \quad (10)$$

Voor  $w < 0$  zijn de assen nu niet den kleinst mogelijken hoek gedraaid; was dit het geval dan waren de coëfficiënten van  $x'^2$  en  $z'^2$  verwisseld.

Voor verschillende waarden van  $K$  neemt het oppervlak nu ook verschillende vormen aan:

1<sup>de</sup> geval:  $K < K_3$ .

Er is geen bestaanbare meetkundige plaats, want de coëfficiënten van de kwadraten  $x'^2$ ,  $y'^2$ ,  $z'^2$  en  $c^2$  in verg. (10) zijn alle positief.

2<sup>de</sup> geval:  $K = K_3$ .

Uit verg. (10) volgt dan  $y' = 0$ ,  $z' = 0$  of de nieuwe X-as.

3<sup>de</sup> geval:  $K_2 > K > K_3$ .

De coëfficiënt van  $x'^2$  en de bekende term zijn negatief. Het oppervlak is een hyperboloïde met één blad. De keel-ellips is in het nieuwe YZ-vlak. Het middelpunt ligt op de negatieve Y-as en wel verder naarmate  $K$  grooter is.

4<sup>de</sup> geval:  $K = K_2$ .

Het middelpunt ligt oneindig ver op de Y-as. Verg. (4) gaat over in:

$$-u^2x^2 + (c^2\omega^2 - u^2)z^2 - 2uvrxz + 2c^2u\omega y + c^4\omega^2 - u^2 - w^2 = 0.$$

Het oppervlak is een paraboloid en wel een hyperbolische paraboloid, want het XZ-vlak wordt volgens een hyperbool gesneden.

5<sup>de</sup> geval:  $K_1 > K > K_2$ .

De coëfficiënt van  $z'^2$  en de bekende term in verg. (10) hebben het tegengestelde teeken van de coëfficiënten van  $x'^2$  en  $y'^2$ . De vergelijking stelt een hyperboloid met één blad voor, maar nu met de keelellips in het nieuwe XY-vlak, dus loodrecht op die van het 3<sup>de</sup> geval. Het middelpunt ligt nu aan den positieven kant van de Y-as en wel minder ver naarmate K grooter is.

6<sup>de</sup> geval:  $K = K_1$ .

De meetkundige plaats is de nieuwe Z-as.

7<sup>de</sup> geval:  $K > K_1$ .

Er is geen bestaanbaar oppervlak.

Om de grootte van de assen in het 3<sup>de</sup> en 5<sup>de</sup> geval te onderzoeken, schrijven wij de vergelijking aldus:

$$c^2 \frac{x'^2}{K_1 - K} + \frac{y'^2}{c^2 (K_1 - K)(K_2 - K)} + c^2 \frac{z'^2}{K_2 - K} + 1 = 0.$$

In het 3<sup>de</sup> geval nemen de drie assen toe met K en in het 5<sup>de</sup> geval af.

Wij hebben dus het volgende:

Als de beweging van een lichaam met gelijke traagheidsmomenten gegeven is, is voor de meetkundige plaats ook de richting van de hoofdassen gegeven, maar niet de plaats van het middelpunt op de Y-as of de grootte der assen. Nu is er een kleinste waarde voor  $k$ , waaronder het vraagstuk geen oplossing toelaat. Welk punt van het lichaam wij vasthouden, altijd is de nieuwe levende kracht grooter dan een bepaalde minimumwaarde. Voor die minimumwaarde is de meetkundige plaats een lijn, loodrecht op de Y-as aan den negatieven kant. Nemen we  $k$  grooter, dan gaat die lijn over in een

hyperboloïde met één blad, waarvan het middelpunt met grooter wordende  $k$  steeds verder naar den negatieven kant van de Y-as schuift en waarvan de assen steeds grooter worden. Eindelijk wordt het oppervlak een hyperbolische paraboloid, als het middelpunt oneindig ver op de negatieve zijde van de Y-as is gekomen. Deze paraboloid heeft loodrecht op het vlak van de parabool, die haar opening naar de negatieve zijde van de Y-as heeft, een andere parabool met haar opening naar de positieve zijde en denzelfden top. Als  $k$  nu verder aangroeit, komt het middelpunt van deze laatste parabool naderbij op de positieve Y-as en het oppervlak wordt dus weer een hyperboloïde met één blad, maar nu met het middelpunt op de positieve Y-as en de onbestaanbare as loodrecht op die van de vorige hyperboloïden. Naarmate  $k$  toeneemt nemen de assen af en komt het middelpunt naderbij, tot de hyperboloïde overgaat in een lijn, de onbestaanbare as, die de 1<sup>ste</sup> lijn loodrecht kruist.  $k$  heeft dan haar maximumwaarde. Welk punt wij ook vasthouden, nooit heeft  $k$  grooter waarde.

Het oppervlak is altijd een regelvlak.

V. 4<sup>de</sup> bijzonder geval:  $a = b$ ,  $c = 0$ .

Hierbij is de massa in een enkele lijn geconcentreerd, die wij tot Z-as aannemen. Wij stellen ons echter voor, dat een punt daarbuiten, tot het lichaam behoorend, kan worden vastgelegd. Omdat de momenten om alle lijnen in het XY-vlak gelijk zijn, mogen wij de loodlijn op de projectie van de schroefas op dat vlak tot Y-as aannemen, waardoor  $\omega_y$  nul wordt. De richting van de X-as kunnen wij zóó aannemen, dat  $u$  positief is. Door in verg. (3) te substitueeren:  $c = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $(1 - k) 2T = p^2$ , gaat zij over in een vergelijking, die wij aldus kunnen schrijven:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)\{w^2 - p^2\}(x^2 + y^2) + (ux + vy)^2 \times a^2 \omega_x y^2 \} = \\ = \{w(x^2 + y^2) - z(ux + vy) - a^2 \omega_x y\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

of  $PQ = R^2$ .

$\omega_x$  komt in deze vergelijking niet voor en kan dus willekeurig worden genomen, bijv.  $= 0$ , dan is de schroefas evenwijdig aan de X-as en  $u$  is de translatie.  $\omega_x > 0$  geeft een linksdraaiende schroef; de schroefas snijdt het YZ-vlak in het punt





$\frac{x}{y}$  tusschen de laatste twee vergelijkingen geëlimineerd geeft :

$$(u^2 + w^2 - p^2)(a^2\omega_s^2 + v^2 + w^2 - p^2) - u^2v^2 = 0.$$

een vierkantsvergelijking in  $p^2$ , waarvan wij de wortels, die steeds bestaanbaar zijn,  $p_1^2$  en  $p_2^2$  zullen noemen. ( $p_1^2 > p_2^2$ ). Voor beide waarden van  $p^2$  stelt  $Q = 0$  voor: twee samen vallende vlakken door de Z-as. De uit  $Q = 0$  verkregen waarde van  $\frac{x}{y}$  in  $R = 0$  gesubstitueerd, geeft de verg. van een vlak, dat de Z-as snijdt en de Z-as zelf. Met  $p^2 = p_1^2$  en met  $p^2 = p_2^2$  correspondeert als meetkundige plaats de Z-as en een lijn, die de Z-as snijdt. Deze lijnen zijn dubbellijnen. Of  $p_1^2$  en  $p_2^2$  ook maxima of minima van  $p^2$  zijn zal uit het volgende blijken :

Aan verg. (16) wordt ook voldaan door

$$ux + vy = yzw_s.$$

Dit geeft ons nog de oplossing :

$$p^2 = 0,$$

$$y\omega_s = -w,$$

$$ux + vy + wz = 0$$

of de rotatie-as.  $p^2 = 0$  is de minimumwaarde van  $p^2$ .

Uit verg. (11) blijkt, dat PQ steeds positief is en daar P positief is, kan Q niet negatief worden genomen.

$Q = 0$  is in het algemeen de vergelijking van twee vlakken

door de Z-as, het is een vierkantsvergelijking in  $\frac{x}{y}$ . De voorwaarde voor gelijke wortels is de vierkantsvergelijking in  $p^2$ , waarvan wij de wortels  $p_1^2$  en  $p_2^2$  hebben genoemd.

Is  $p^2 > p_1^2$ , dan kan Q niet van teeken veranderen, dit teeken is negatief voor alle waarden van  $\frac{x}{y}$ . Voor  $p^2 > p_1^2$  is er dus geen bestaanbare meetkundige plaats en  $p_1^2$  is de maximumwaarde van  $p^2$ . Voor  $p_1^2 > p^2 > p_2^2$  zijn er twee waarden van  $\frac{x}{y}$ , waartusschen Q positief is; het oppervlak is dus begrepen tusschen twee vlakken door de Z-as.

Voor  $p^2 < p_2^2$  heeft Q altijd hetzelfde teeken, maar dit is positief. De waarde  $p_2$  is dus geen minimumwaarde voor  $p$ .

In het algemeen geeft de combinatie van  $Q = 0$  en  $R = 0$  ons twee lijnen, die de Z-as in 2 verschillende punten snijden en die wij  $l_1$  en  $l_2$  zullen noemen en de Z-as zelf. De lijnen  $l_1$  en  $l_2$  kunnen ook onbestaanbaar worden; het zijn lijnen op het oppervlak, maar in het algemeen geen dubbellijnen.

Als wij in verg. (11)  $x$  door  $\rho \cos \phi$  en  $y$  door  $\rho \sin \phi$  vervangen, door  $\rho^2$  deelen en daarna aan  $\phi$  verschillende constante waarden geven, verkrijgen wij de vergelijkingen van doorsneden door de Z-as met  $\rho$  en  $z$  als loopende coördinaten:

$$\begin{aligned} \rho^2 \{ (u \cos \phi + v \sin \phi)^2 + a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2 \} + 2\rho zw(u \cos \phi + v \sin \phi) + \\ + z^2 \{ w^2 + a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2 \} + 2a^2 \rho \omega_x w \sin \phi - \\ - 2a^2 \omega_x \sin \phi z(u \cos \phi + v \sin \phi) + a^2 \{ w^2 + (u \cos \phi + v \sin \phi)^2 - p^2 \} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Als de kegelsnede een middelpunt heeft, zijn de coördinaten daarvan:

$$\rho = -\frac{a^2 \omega_x w \sin \phi}{a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2}, \quad z = \frac{a^2 \omega_x \sin \phi (u \cos \phi + v \sin \phi)}{a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2}.$$

Voor  $a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2 = 0$ , is de kegelsnede een parabool. Voor  $p^2 < a^2 \omega_x^2$  of  $k(a^2 \omega_x^2 + u^2 + v^2 + w^2) > u^2 + v^2 + w^2$  zijn er twee vlakken, die parabolische doorsneden geven. In woorden is de voorwaarde voor parabolische doorsneden deze: de nieuwe levende kracht moet grooter zijn dan de levende kracht van de massa, geconcentreerd in het zwaartepunt en zich bewegend als het zwaartepunt vóór de impulsie werd aangebracht. Als de oorspronkelijke beweging een rotatie was om een as door het zwaartepunt, zijn er dus altijd parabolische doorsneden. Als bij een gegeven oorspronkelijke beweging enkele oppervlakken van den bundel geen parabolische doorsnede hebben, zijn die te vinden bij de kleine waarden van  $k$ . Als de oorspronkelijke beweging een translatie was, zijn er geen parabolische doorsneden.

De vergelijking, die ons de waarde van  $\rho$  geeft voor het middelpunt, kan aldus worden geschreven:

$$p^2(x^2 + y^2) - a^2 \omega_x^2 y^2 - a^2 \omega_x w y = 0.$$

Het is de projectie op het XY-vlak van de meetkundige plaats van de middelpunten. De vergelijking stelt voor: een

kegelsnede door den oorsprong, de top. Het middelpunt ligt op de Y-as in  $y = \frac{a^2 \omega_x w}{p^2 - a^2 \omega_x^2}$ .

Deze kegelsnede is een parabool voor  $p^2 = a^2 \omega_x^2$ , dus juist voor het geval, dat één van de doorsneden door de Z-as parabolisch is. De kegelsnede is een hyperbool voor  $p^2 < a^2 \omega_x^2$ , dus als er twee parabolische doorsneden zijn. Voor de coördinaten van het middelpunt geldt ook nog de betrekking  $\rho(u \cos \phi + v \sin \phi) + zw = 0$  of  $ux + vy + wz = 0$ . Dit is de vergelijking van een vlak door den oorsprong, loodrecht op de snelheid van het zwaartepunt. De meetkundige plaats van de middelpunten is de doorsnede van dit vlak met een 2de graadscilinder, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig zijn aan de Z-as: het is dus een kegelsnede. Wij kunnen aantoonen, dat zij de lijnen  $l_1$  en  $l_2$  snijdt.

Stellen wij den hoek, dien een der hoofdassen van een doorsnede door de Z-as met het XY-vlak maakt gelijk  $\alpha$ , dan is:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2uw \cos \phi}{u^2 \cos^2 \phi - w^2},$$

dus onafhankelijk van  $p^2$  of van  $k$ : als wij de doorsneden beschouwen van den geheelen bundel oppervlakken met een bepaald vlak door de Z-as, dan verandert daarin de richting van de hoofdassen niet.

Verg. (17) wordt na assenverplaatsing en assendraaiing:

$$\frac{\rho'^2}{a^2 p^2} + \frac{z'^2}{a^2 p^2 \{ (u \cos \phi + v \sin \phi)^2 + a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi + w^2 - p^2 \}} = 1. \quad (18)$$

$$\frac{\rho'^2}{a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2} + \frac{z'^2}{(a^2 \omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2)^2} = 1.$$

Wij kunnen nu nagaan hoe de opeenvolgende doorsneden zijn, voor verschillende waarden van  $p^2$ .

1ste geval:  $p^2 > p_1^2$ .

Er is geen bestaanbare meetkundige plaats.

2de geval:  $p^2 = p_1^2$ .

De meetkundige plaats is een lijn, nl. de samengevallen lijnen  $l_1$  en  $l_2$ .

3de geval:  $p_1^2 > p^2 > p_2^2$ .

Het geheele oppervlak is begrepen tusschen de twee vlakken voorgesteld door de verg.  $Q = 0$ , die het oppervlak raken volgens de lijnen  $l_1$  en  $l_2$ . Als  $p^2$  weinig kleiner is dan  $p_1^2$ ,

blijft de noemer van  $z'^2$  in verg. (18) altijd klein en positief voor de weinige waarden van  $\phi$ , die een bestaانبare doorsnede geven,  $a^2\omega_x^2 \sin^2\phi - p^2$  is altijd negatief. Al die doorsneden zijn dus hyperbolen met een zeer kleine bestaانبare as.

De onbestaانبare as wijkt in stand weinig af van die van de lijnen  $l_1$  en  $l_2$ , die zelf onderling weinig in stand verschillen. Het geheele oppervlak heeft iets van een hyperboloïde met één blad, die men zou hebben vervormd door haar bij de keel-ellips tot één lijn (de Z-as) samen te drukken. Alle hyperbolen toch gaan door de Z-as. Wij moeten voor  $p^2 > p_2^2$  nog onderscheiden:

a)  $p^2$  is tevens  $> a^2\omega_x^2$ .

De doorsneden zijn in de opeenvolgende vlakken: de lijn  $l_1$ , hyperbolen met grooter wordende bestaانبare assen, met kleiner wordende bestaانبare assen en de lijn  $l_2$ .

b)  $p^2 = a^2\omega_x^2$ .

Op de hyperbolen met grooter wordende bestaانبare assen volgt een parabool, voor  $\sin^2\phi = 1$ , dan volgen weer de hyperbolen met afnemende bestaانبare assen.

c)  $p^2 < a^2\omega_x^2$ .

Tusschen de hyperbolen met toenemende en die met afnemende bestaانبare assen hebben wij een parabool, ellipsen en weer een parabool.

4de geval:  $p^2 = p_2^2$ .

De lijnen  $l_1$  en  $l_2$  zijn nu samengevallen, doordat zij een gestreken hoek vormen. Alle doorsneden door de Z-as geven nu bestaانبare krommen. De twee raakvlakken, die nu samengevallen zijn, raken het oppervlak volgens een dubbellijn.

Wij moeten nu weer onderscheiden:

a)  $p^2 > a^2\omega_x^2$ .

Alle doorsneden hyperbolen.

b.  $p^2 = a^2\omega_x^2$ .

Eén doorsnede is een parabool.

c)  $p^2 < a^2\omega_x^2$ .

Er zijn twee parabolen en daartusschen ellipsen.

De hyperbolen gaan nu nog niet in elkaar over, zij beginnen en eindigen met dezelfde lijn  $l_1 = l_2$ .

5de geval:  $p^2 < p_2^2$ .

De doorsneden zijn weer, al naarmate  $p^2$  grooter dan, gelijk aan of kleiner dan  $a^2\omega_x^2$  is, alleen hyperbolen, hyperbolen en

een parabool of hyperbolen, een parabool, ellipsen, een parabool en weer hyperbolen, die nu overgaan in de eerstgenomde hyperbolen, zonder lijn er tusschen. De lijnen  $l_1$  en  $l_2$  zijn imaginair. Naarmate  $p^2$  kleiner wordt, wordt het deel van de doorsnede, dat ellipsen geeft, grooter.

6de geval:  $p^2 = 0$ .

Elk vlak door de Z-as snijdt het oppervlak in een punt, dat te beschouwen is als een ellips met oneindig kleine assen. Het oppervlak is nu gereduceerd tot een lijn:

$$ux + vy + wz = 0$$

$$w + \omega_x y = 0.$$

Deze lijn, de rotatie is nu ook de meetkundige plaats van de middelpunten der doorsneden.

Wij zullen nu in verg. (17)  $z$  als constant beschouwen, dan stelt de vergelijking de doorsnede van het oppervlak met een horizontaal vlak voor. Elke doorsnede heeft, als de lijnen  $l_1$  en  $l_2$  bestaanbaar zijn, de projecties van deze lijnen tot raaklijnen en is geheel tusschen die lijnen gelegen in een van de hoeken, die zij vormen of in twee overstaande hoeken. Daar verg. (17) door  $\rho^2$  is gedeeld, is de bekende term eigenlijk de coëfficiënt van  $\rho^2$  en de oorsprong is een dubbelpunt. De bekende term of  $z^2(\omega^2 + a^2\omega_x^2 \sin^2 \phi - p^2) - 2a^2\omega_x \sin \phi z(u \cos \phi + v \sin \phi) + a^2\{w^2 + (u \cos \phi + v \sin \phi)^2 - p^2\}$  beslist over den aard van het dubbelpunt. Heeft deze vorm gelijk nul gesteld en als functie van  $\tan \phi$  beschouwd bestaanbare wortels, dan zijn de raaklijnen aan het dubbelpunt bestaanbaar. Dit geschiedt voor:

$$(p^2 - \omega^2)(a^2 + z^2)\{a^2(v - \omega_x z)^2 + (w^2 - p^2)(a^2 + z^2) + a^2 u^2\} > 0.$$

De vorm tusschen de accoladen is positief voor alle waarden van  $z$  als  $p^2$  kleiner is dan  $p_2^2$ . Voor  $p_1^2 > p^2 > p_2^2$  heeft de vorm bestaanbare wortels en is dus positief voor  $z$  tusschen twee grenzen.

Nemen wij nu in aanmerking dat  $p_2^2$  altijd grooter is dan  $\omega^2$ , dan hebben wij het volgende:

Is  $p^2 > p_2^2$  dan is voor  $z$  boven een bepaalde greus de oorsprong een geïsoleerd punt in de doorsnede. Wordt  $z$  kleiner dan verkrijgt men eerst een doorsnede, waar de oorsprong een keerpunt is, dan doorsneden waar de oorsprong een crunode

is, vervolgens weer een keerpunt en verder een geïsoleerd punt bij alle volgende doorsneden.

Is  $p_2^2 > p^2 > w^2$  dan hebben alle doorsneden in den oorsprong een crunode.

Voor  $p^2 = w^2$  hebben alle doorsneden in den oorsprong een keerpunt.

Voor  $p^2 < w^2$  is de oorsprong voor alle doorsneden een geïsoleerd punt.

Wij kunnen dus zeggen, dat voor  $p^2 < w^2$  de zware lijn het oppervlak geheel loslaat.

OVER HET KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD VAN MEER DAN  
TWEË GETALLEN.

(Uit een brief van den Heer N. L. W. A. GRAVELAAR aan de Redactie.)

---

De door den Heer E. D. J. DE JONGH Jr. behandelde eigenschap van het K. G. V. van eenige getallen (*Nieuw Archief*, V, p. 262—267) komt reeds voor:

- 1<sup>o</sup>. met een direct bewijs zonder inductie, in:  
Le Besgue, *Exercices d'analyse numérique*, Paris, 1859, pp. 31—32, XXXI;
  - 2<sup>o</sup>. met hetzelfde bewijs als bij Le Besgue, in:  
Lucas, *Théorie des nombres*, Paris, 1891, pp. 369—370, Ex. IV;
  - 3<sup>o</sup>. overgenomen uit Lucas, vermeerderd met de overeenkomstige eigenschap van den G. G. D. van eenige getallen, medegedeeld zonder bewijzen, maar onmiddellijk voorafgegaan door de toe te passen hulpstelling over binomiaalcoëfficiënten, in:  
Gravelaar, *Opgaven ter toepassing van de theorie der rekenkunde*, 1e stukje, Groningen, 1896, p. 67, nos. 719 en 720.
- 

ERRATUM.

---

In het levensbericht van J. W. Tesch, opgenomen in dit deel van het *Nieuw Archief*, blz. 310—316, is in regel 6 en 7

van blz. 323 de uitbreiding der stelling van JOACHIMSTHAL aan DE LONGCHAMPS toegeschreven. Dit is onjuist. Zoo als o.a. uit de behandeling der bedoelde stelling in DE LONGCHAMPS „*Géométrie analytique à deux dimensions*” blijkt, is de aange-  
wezen uitbreiding afkomstig van ED. LAGUERRE, over wiens leven en werken men een opstel van E. Rouché in het 56<sup>te</sup> cahier van het „Journal de l'École polytechnique” van 1887 raadplegen kan.

P. H. SCHOUTE.



## BIBLIOGRAPHIE.

---

Géométrographie ou art des constructions géométriques, par EMILE LEMOINE. Recueil „Scientia”, série phys.-math. fascicule n°. 18, 87 blz. Parijs, C. Naud, 1902.

De bewerkingen, die men verricht bij het construeeren van meetkundige figuren met behulp van passer en lineaal, brengt de schrijver terug tot de volgende:

Bewerking  $R_1$ : het brengen van de kant van de lineaal door een gegeven punt.

Bewerking  $R_2$ : het trekken van eene rechte lijn langs de in bepaalden stand gebrachte lineaal.

Bewerking  $C_1$ : het plaatsen van de passerpunt in een gegeven punt.

Bewerking  $C_2$ : het brengen van de passerpunt ergens op eene reeds getrokken rechte lijn.

Bewerking  $C_3$ : het beschrijven van een cirkel, nadat de eene passerpunt is geplaatst.

Van allerlei meetkundige constructies wordt nu nagegaan, hoeveel elementaire bewerkingen zij vereischen. Zoo komt aan elke constructie een symbool toe van den vorm:  $(l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$ . Het getal  $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$  noemt de schrijver de „eenvoudigheidscoëfficiënt”, het getal  $l_1 + m_1 + m_2$  heet de „juistheidscoëfficiënt”. Met behulp van deze getallen worden verschillende constructies van dezelfde figuur met elkander vergeleken ten aanzien van hunne eenvoudigheid en van hunne nauwkeurigheid. Het denkbeeld van eene dergelijke systematische vergelijking is men aan den schrijver verschuldigd, die reeds in 1888 onderzoekingen over dit onderwerp publiceerde. Hij heeft thans de uitkomsten zijner onderzoekingen verzameld, aangevuld en gerangschikt en op deze wijze de „Géométrographie” geschapen.

Ongetwijfeld verdient deze leer de aandacht, omdat hare beoefening kan leiden tot werkelijke, niet schijnbare, vereen-

voudiging van elementaire constructies. Als een voorbeeld hiervan wijst de schrijver op de constructie van de gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels. In 1888 vond hij voor den „eenvoudigheidscoëfficiënt” 78, er moesten 17 rechte lijnen en 20 cirkels worden getrokken. Thans wordt eene constructie medegedeeld met den coëfficiënt 35; het trekken van slechts 7 rechte lijnen van 5 cirkels is noodig. **Kl.**

C. A. LAISANT et A. BUHL. *Annuaire des mathématiciens*, 1901—1902. Een deel klein 8°. XXII en 468 blz., Parijs, C. Naud, 1902.

De heeren Laisant en Buhl hebben het de moeite waard geacht eene lijst te maken, waarin zijn opgenomen de namen, woonplaatsen en adressen van alle beoefenaars der wiskunde, voor zoover deze tot hen zijn doorgedrongen. De lijst telt meer dan 6000 namen. Zij zijn van meening, dat dit werk er toe kan bijdragen om den band tusschen de vakgenooten te versterken. In elk geval kan de raadpleging van zulk eene adreslijst groot gemak verschaffen. Menigeen is niet in staat, om zich in schriftelijke verbinding te stellen met een vakgenoot, omdat diens woonplaats of zelfs diens adres hem onbekend is. Toegevoegd is eene necrologie, eene lijst van wetenschappelijke genootschappen, voor zoover zij met de studie der wiskunde iets te maken hebben en eene lijst van de tegenwoordig verschijnende tijdschriften.

Ongetwijfeld is aan de samenstelling van dit werk veel zorg besteed, maar uit den aard der zaak is er onwillekeurig veel weggelaten en laat de homogeniteit nog veel te wenschen over. Het zou zeer onbillijk zijn, daarvan den samenstellers een verwijt te maken, evenals van de zonderlinge misvormingen, die sommige adressen hebben ondergaan. Indien de gebruikers van het boek slechts een weinig er toe medewerken, door hunne correcties aan de samenstellers op te zenden, kan in volgende uitgaven veel worden verbeterd.

Aan de lijsten gaat vooraf een levensbericht van Hermite door Émile Borel. Het werk wordt besloten met eenige wetenschappelijke mededeelingen van de heeren Appel, Petersen, Greenhill, Méray en Schoute. Vermelden wij hiervan alleen, dat Méray de voordeelen van het Esperanto als wereldtaal uiteenzet, en dat Schoute op zijne mededeeling nog doet volgen

eene korte schets van het ontstaan der Revue Semestrielle, en van de wijze, waarop dit tijdschrift tracht nut te stichten in de wiskundige wereld. Kl.

Leçons sur les séries à termes positifs professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par ROBERT D'ADHÉMAR. Een deel in 8°, 91 blz, Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

In allerlei gedeelten der functietheorie blijkt het noodzakelijk eenig inzicht te hebben in de verschillende wijzen, waarop eene of andere bestaانبare analytische functie van  $x$  oneindig groot wordt voor oneindig groote waarden van  $x$ . Dat  $x^n$ ,  $e^x$ ,  $e^{x^2}$  voor groote waarden van  $x$  zich geheel verschillend gedragen, valt onmiddellijk in het oog, de vraag is nu of aangaande de wijze, waarop eene of andere functie aangroeit algemeene verschijnselen of regels zijn waar te nemen. Borel beantwoordt die vraag bevestigend; reeds in zijne vroegere geschriften heeft hij gewaagd van eene „théorie générale de la croissance”, thans beoogt hij deze theorie volledig te schetsen. Tot goed begrip dier theorie acht hij het nuttig daaraan te laten voorafgaan eene studie van de reeksen met positieve termen, die met de leer van de aangroeiing der functiën in zulk een nauw verband staan. Het geheel vormt den inhoud van twintig door hem aan het Collège de France gegeven lessen, die hier door R. D'ADHÉMAR worden wedergegeven. Wij moeten volstaan met alleen op enkele merkwaardige uitkomsten te wijzen, waarvan in de gebruikelijke leerboeken geen gewag kan worden gemaakt. Nadat in het eerste hoofdstuk de gewone kenmerken voor convergentie en divergentie van reeksen met positieve termen zijn besproken, wordt er opgemerkt, dat bij het gebruik van de logarithmische kenmerken van Bertrand zich twee verschillende uitzonderingsgevallen kunnen voordoen.

Ten eerste kan het kenmerk zijn „inapplicable”, d. i. de gegeven reeks laat zich niet met geen enkele der reeksen van Bertrand vergelijken. Zoo men de te zoeken grenswaarde tracht te bepalen zijn „la plus grande” en „la plus petite des limites” gescheiden door het getal, waarbij de convergentie in divergentie overgaat. Ten tweede kan het kenmerk zijn „en défaut”, d. i. er wordt eene bepaalde grenswaarde gevonden, maar het

is juist die waarde, die aangaande de convergentie geen beslissing geeft. Die beslissing is nu misschien te verkrijgen, door de gegeven reeks te vergelijken met eene volgende reeks van Bertrand van hoogere rangorde. Bertrand achtte het oneindig weinig waarschijnlijk, dat in dit geval nimmer eene beslissing zou worden gevonden; hier laat Borel zien, op het voorbeeld van Paul du-Bois-Reymond, dat men reeksen kan construeeren, voor welke alle mogelijke kenmerken van Bertrand „en défaut” zijn.

Hoe zwak toch ook eene reeks convergeert of divergeert, er is altijd eens nieuwe reeks uit af te leiden, die nog zwakker convergeert of divergeert. Van de reeksen gaat Borel over tot de convergentie of divergentie van integralen, met  $\infty$  tot bovenste grens; zooals bij de reeksen kan men ook hier weder geen onder alle omstandigheden bruikbare regelen voor de convergentie der integraal aangeven. Als een „ensemble dénombrable” van positieve functies gegeven is, die steeds sneller en sneller aangroeien, is er toch nog altijd eene functie aan te wijzen, die nog sneller met  $x$  toeneemt. Voor de wijze van aangroeiing der positieve functies is geen schaal te maken, waarvan de verdeelingen te nummeren zijn.

Dergelijke beschouwingen dienen nu tot inleiding van de theorie der aangroeiingen. De „croissance irrégulière” wordt onderscheiden van de „croissance régulière”, welke laatste met behulp van de orde van oneindiggrootheid van eenvoudige functies wordt gedefinieerd. Daarna wordt de theorie der aangroeiing in verband gebracht met de machtreeksen van een en van twee veranderlijken. Voornamelijk heeft het onderzoek ten doel het verband op te sporen tusschen de wijze van aangroeiing eener geheele functie en de orde van grootheid van de coëfficiënten, welke worden gevonden, als de functie in eene overal convergente machtreeks wordt ontwikkeld.

Moge dit korte en onvolledige overzicht er toe kunnen strekken om belangstelling te wekken voor het laatst verschenen werk van Borel.

KL.

La Géométrie non Euclidienne, par P. BARBARIN.  
Recueil „Scientia”, série phys.-math. fascicule n°. 15, 79 blz.  
Parijs, C. Naud, 1902.

Het werkje vangt aan met eenige algemeene beschouwingen

ook van historischen aard. Gewezen wordt op de verschillende pogingen om het postulaat van Euclides te bewijzen. Saccheri, Lambert en Taurinus worden genoemd als te zijn de eerste onderzoekers, die trachtten na te gaan, wat er van de meetkunde werd, indien men het postulaat liet vervallen. Daarna worden de verdiensten van Lobatschewsky, Bolyai en Riemann als stichters der algemeene meetkunde in het licht gesteld. In het tweede hoofdstuk geeft de schrijver eene nauwkeurige analyse van de definities en postulaten uit het eerste boek der Elementen, welke moet dienen om den lezer langs geleidelijken weg te overtuigen van de logische bestaanbaarheid van de drie stelsels: de meetkunde van Riemann, van Euclides en van Lobatschewsky. Maar ook nog op andere wijze kan men tot dezelfde uitkomst geraken. Namelijk door het begrip „afstand van twee punten” als een fundamenteel begrip te beschouwen. Geeft men toe, dat tusschen de tien onderlinge afstanden van vijf punten in eene ruimte van drie afmetingen eene enkele betrekking moet bestaan, dat elk punt bepaald is door drie coördinaten  $x, y, z$  en dat de afstand van twee punten is eene functie hunner coördinaten, dan volgt uit de onderzoekingen van de Tilly opnieuw, dat de meetkunde van Riemann, van Euclides en die van Lobatschewsky de eenige mogelijke stelsels zijn.

Thans volgt eene uitvoerige uiteenzetting van de algemeene meetkunde, waarbij zich aansluit de trigonometrie en het meten van oppervlakken en inhoud. In de twee laatste hoofdstukken worden de tegenwerpingen besproken, die men tegen de niet-euclidische meetkunde heeft ingebracht, en worden eenige beschouwingen gegeven naar aanleiding van de vraag, welke meetkunde in onze ruimte als de ware zou gelden. De slotsom van den schrijver is, dat theoretische overwegingen hier tot niets kunnen leiden en dat elke proefneming, hoewel in theorie niet onmogelijk, waarschijnlijk voor altijd zal afstuiten op de betrekkelijke onvolmaaktheid der metingen. Het werkje bevat de portretten van Lobatschewsky en van Riemann.

Kl.

P. I. HELWIG. Over een algemeen gemiddelde en de integralen, die samenhangen met de foutenwet van het meetkundig gemiddelde. Academisch

proefschrift, in 4<sup>o</sup>, 79 blz. Amsterdam, Delsman en Nolthenius, 1901.

In de gebruikelijke foutentheorie treedt het rekenkundig gemiddelde op den voorgrond. Aanleiding daartoe geeft de eenvoudige bepaling, maar ook het streven om te kunnen geraken tot de zoo eenvoudige foutenwet van Gauss. Intusschen hoe men ook getracht heeft de keuze van het rekenkundig gemiddelde te motiveeren, er bestaat geen theoretisch bezwaar tegen het bepalen van het gemiddelde langs anderen weg. Na uitvoerige beschouwingen over het gemiddelde in het algemeen, staat de schrijver stil bij het meetkundig gemiddelde en vraagt hij zich af, hoe de foutenwet moet veranderen, indien het meetkundig gemiddelde van een aantal waarnemingen als de meest aannemelijke waarde wordt beschouwd. Dit leidt hem tot de discussie van de integraal

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{x}\right)^{bx} dx,$$

en tot die van allerlei andere integralen, die op de eene of andere wijze met de eerste samenhangen. KL

Leçons sur les séries divergentes par EMILE BOREL. Een deel in 8<sup>o</sup>, 182 blz. Parijs, Gauthier-Villars, 1901.

In dit derde deel van zijne lessen over de functietheorie komt de schrijver terug op het onderwerp, aan hetwelk zijne vroegere verhandeling „Mémoire sur les séries divergentes”, Ann. de l'École normale, 1899, p. 113, was gewijd. Het geldt de groote vraag, in hoeverre men in de analyse het rekenen met divergente reeksen zou kunnen wettigen. De schrijver wijst er op, hoe Euler en zijn tijdgenooten zich om het divergeeren hunner reeksen weinig bekommerden en desniettegenstaande toch bijna nimmer tot onjuiste uitkomsten geraakten. Eerst door Cauchy werd, geheel in overeenstemming met de denkbeelden van Abel, aan zulk eene handelwijze een einde gemaakt. Tot op den tegenwoordigen tijd heeft men de divergente reeksen voor waardeloos gehouden, ook al werd eene uitzondering gemaakt voor de reeks van Stirling en eenige andere dergelijke halfconvergente reeksen. In het bijzonder hebben de sterrekundigen zich steeds met vrucht bediend van reeksen, wier divergentie eerst sinds korten tijd door Poincaré

werd aangetoond. Thans overweegt men het denkbeeld of het oordeel van Cauchy niet al te streng is geweest, en of men niet meer in den geest van Euler met de divergente reeksen zou kunnen rekenen. Onderscheid is te maken tusschen reeksen van functies en reeksen van getallen. Ten aanzien van deze laatste valt er na te gaan, in hoeverre het mogelijk is om aan de reeks een bepaald getal toe te voegen, van dien aard, dat de substitutie van de reeks voor dit getal of omgekeerd in allerlei berekeningen juiste of ten minste bijna altijd juiste uitkomsten geeft. Het schijnt, dat tot op zekere hoogte die mogelijkheid bestaat, mits men de rangorde der termen in eene divergente getallenreeks ook als een bepalend element der reeks beschouwt. Evenals bij voorwaardelijk convergente reeksen is het niet alleen de waarde der termen, maar tevens hunne volgorde, die bij de divergente getallenreeks het getal bepaalt, dat men als de som der reeks beschouwt.

Anders is het met eene reeks van functies. Onder deze kan men in de eerste plaats noemen de half convergente, of misschien beter gezegd asymptotische, machtreeksen. Hoewel zij voor alle waarden der veranderlijke divergeeren, kunnen zij veelal onder eenige beperkende voorwaarden als het equivalent beschouwd worden van eene bepaalde functie. Allerlei analytische bewerkingen op de reeks uitgevoerd komen volkomen overeen met dezelfde bewerkingen, uitgevoerd op de functie. In zulke gevallen is dus de som der divergente asymptotische reeks onmiddellijk gedefinieerd, en zelfs kan bij gegeven  $x$  de waarde der som met meer of minder nauwkeurigheid rechtstreeks uit de begintermen der reeks worden afgeleid.

Maar behalve de asymptotische reeksen zijn er andere overal divergente machtreeksen in  $x$ . Ook hier kan in veel gevallen nog van eene som sprake zijn. En wel omdat zulk eene reeks zich dikwijls voordoet als de formeele oplossing van eene bepaalde differentiaalvergelijking, zoodat de werkelijke oplossing als som der reeks kan worden beschouwd. Betreft het machtreeksen, die naar gelang der waarde van  $x$  nu eens convergeeren, dan weer divergeeren, dan is eene bepaalde functie gegeven, en alle methoden van sommatie der divergente reeks hebben eigenlijk ten doel de analytische voortzetting dezer functie op te sporen. Inzonderheid op dit gebied bewegen

zich de hoogst verdienstelijke en zeer oorspronkelijke onderzoekingen van den schrijver. Zijne uitkomsten sluiten zich hier aan bij die van Mittag-Leffler, en hij tracht te doen uitkomen, hoe zijne denkbelden over de divergente reeksen het mogelijk maakten om aan de uitkomsten van Mittag-Leffler uitbreiding te geven. Het boek is verdeeld in vijf hoofdstukken. Het eerste bevat de theorie der asymptotische reeksen volgens de denkbelden van Poincaré. Het tweede handelt over het verband, dat er tusschen zekere divergente reeksen en oneindige kettingbreuken bestaat. Hier komen op den voorgrond de onderzoekingen van onzen vroegeren landgenoot Stieltjes over de omzetting van eene divergente reeks in eene convergente kettingbreuk.

In het derde hoofdstuk wordt gehandeld over verschillende sommatiemethoden, terwijl in de beide laatste hoofdstukken die sommatie in verband wordt gebracht met het opsporen der analytische voortzetting eener functie, en verder de theorie dezer voortzetting wordt ontwikkeld. Eene nauwgezette studie van dit belangrijke boek eischt ongetwijfeld van den lezer groote inspanning, toch zal men zonder groote moeite bij eene eerste lezing al dadelijk eenig denkbeeld verkrijgen van een gewichtig en aantrekkelijk gedeelte van de hedendaagsche functietheorie.

Kl.

*Traité de cinématique* par H. SICARD, avec des notes par A. LABROUSSE. Een deel in 8°, 179 blz, Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

Het werk is verdeeld in vijf boeken, waaraan voorafgaat eene inleiding, bevattende de eerste definities en eigenschappen ten aanzien van vectoren en van hunne momenten. Het eerste boek handelt over de beweging van een punt, over het begrip snelheid en over de raaklijnconstructies van Roberval. In het tweede boek wordt overgegaan tot het definiëren der versnelling, waarbij ook van versnellingen van hoogere orde wordt melding gemaakt. In de bekende eenvoudige gevallen wordt bij centrale versnelling uit de gegeven baan de versnelling zelve bepaald.

De beweging van een lichaam wordt in het derde boek onderzocht, en wel wordt vooreerst van meetkundige beschouwingen daarbij gebruik gemaakt. Eene analytische behandeling



wordt in het vierde boek gegeven. Eerst wordt deze toegepast op de beweging van eene vlakke figuur in haar vlak. Eenvoudige voorbeelden worden uitgewerkt. Daarna volgt het onderzoek over de beweging van een lichaam in de ruimte. Ten slotte wordt in het vijfde boek de samenstelling van translaties en draaiingen besproken. Vijf noten zijn toegevoegd. I. De formules van Olinde Rodrigues. II De verplaatsing beschouwd als homografie en als punten-transformatie. III. Het lineaire complex. IV. Stelling van Schonemann en Mannheim. V. Over stangenstelsels. Kl.

L. BOLTZMANN. *Leçons sur la théorie des gaz*. Traduites par A. GALLOTTI, avec une introduction et des notes de M. BRILLOUIN. Première partie. Een deel in groot 8°, XIX, 202 blz. Parijs, Gauthier-Villars, 1902.

In 'een zeer lezenswaardige, met overtuiging geschreven inleiding voert Brillouin de bekende, in 1895 verschenen „Vorlesungen über Gastheorie“ van Boltzmann bij het Fransche wetenschappelijk publiek in. Na enkele opmerkingen over de eischen, aan een goede hypothese te stellen, schetst hij hoo de voorstelling van de vrije beweging der gasmoleculen onmiddellijk ontleend is aan de *waarneming* van de uitzetting der aan zichzelf overgelaten gassen en dampen. Reeds Bernouilli leidde hieruit het verband tusschen druk en temperatuur af. Een aanmerkelijke vooruitgang brengt Clausius in de theorie door de beschouwingen over de gemiddelde weglengte tusschen twee botsingen. Denkt men zich eerst deze botsingen als tusschen elastische bollen, spoedig wordt ook deze voorstelling verlaten voor die van een wisselwerking van afstootende of aantrekkende krachten; de formule van Van der Waals <sup>1)</sup> verklaart in algemeene trekken de kritische verschijnselen en de continuïteit van gas en vloeistofoestand. Het eenige wat ontbreekt, om de vergelijking van theorie en waarneming in alle strengheid mogelijk te maken, is de Newton, die de wet der moleculaire aantrekking ontdekken zal! En tegenover de bezwaren der Energetiek stelle men den grooten vooruitgang, dien de kinetische theorie in den laatsten tijd gebracht heeft in de theorie der electrische verschijnselen.

<sup>1)</sup> Met verbazing ziet men in de inleiding dezen naam hardnekkig met een V gespeld!

Bij de vertaling is de oorspronkelijke tekst zeer getrouw gevolgd. Boltzmann zelf heeft slechts op één plaats, gevolg gevende aan een opmerking o.a. van onzen landgenoot Wind, dien tekst gewijzigd. We meenen daarom met een korte inhoudsopgave te kunnen volstaan.

De Inleiding verdedigt het goed recht der atomistische en mechanische theorien, en geeft een eerste afleiding van de uitdrukking voor den gasdruk. In overeenstemming met de zoo juist geschetste historische ontwikkeling wordt in Hoofdstuk I aangenomen, dat de moleculen zich gedragen als elastische bollen, en worden voorloopig uitwendige krachten en stroomingen uitgesloten. Echter wordt dadelijk een mengsel van twee gassen in behandeling genomen; er worden functies  $f$  en  $F$  opgesteld, aangevende de verdeeling en snelheden der beide molecuulsoorten, en de beschouwing van de veranderingen dezer functies tengevolge van de botsingen voert in verband met de voorwaarden voor een stationnair toestand tot de wet van Maxwell. Het bewijs, dat deze wet de eenige mogelijke snelheidsverdeeling weergeeft, voert tot de opstelling van de functie  $H$ , die bij de gegeven onderstellingen alleen kan afnemen en minimum is voor de verdeeling volgens Maxwell. De analogie met de entropie van het gas, die alleen toenemen kan, en de mathematische beteekenis der functie  $H$ , wier minimum blijkt overeen te komen met wat men de meest „waarschijnlijke” snelheidsverdeeling kan noemen, voeren Boltzmann tot de slotsom, dat de tweede wet der thermodynamica een waarschijnlijkheidstheorema blijkt te zijn. — De aldus verkregen wet van Maxwell voert nu tot de problemen van gemiddelde weglengte en al wat daarmee in verband staat, als warmtegeleiding, wrijving van gassen, diffusie enz.

Hoofdstuk II beschouwt de moleculen als krachtcentra, waarbij de wet der krachtwerking in 't midden wordt gelaten, en laat ook uitwendige krachten en stroomingen toe. Op analoge wijze worden nu hier het entropiebeginsel bewezen en de voorwaarden voor een stationnair toestand opgesteld. De verkregen resultaten worden toegepast op vragen van aërostatica en hydrodynamica, beide voor stationnaire toestanden.

Hoofdstuk III behandelt gevallen van niet-stationnaire toestanden. Bij de beschouwing van den invloed der botsingen (of ontmoetingen) voor het geval dat de werking tusschen twee mole-

culen voorgesteld kan worden door  $\frac{K}{r^{n+1}}$  stuit men dan al spoedig op integralen, die aanmerkelijk eenvoudiger in de behandeling worden indien men  $n = 4$  stelt, dus een werking omgekeerd evenredig aan de vijfde macht van den afstand aanneemt. Met deze onderstelling, waarbij met Maxwell aan een afstooting gedacht wordt, behandelt Boltzmann dan o.a. warmtegeleiding, inwendige wrijving en diffusie.

In de beide achteraan gedrukte noten ontwikkelt Brillouin enkele bedenkingen. De voornaamste betreffen de bewijsvoering over de noodzakelijkheid van de wet van Maxwell en zijn gedeeltelijk reeds vroeger, o.a. door Loschmidt, geuit. Men kan zeggen, dat deze in 't algemeen in verband staan met de moeilijkheid om, uitgaande van bewegingen, die alle omkeerbaar zijn, te komen tot de niet-omkeerbare veranderingen, die in de natuur worden waargenomen — een kwestie waarover voorloopig het laatste woord nog niet gesproken is.

E. VAN EVERDINGEN JR.

Cryoscopie par F. M. RAOULT. Recueil „Scientia”, série phys.-math., fascicule n°. 13, XIII, 106 blz. Parijs, C. Naud, 1901.

De naam *Cryoscopie* voor het bepalen van de vriespuntverlaging in oplossingen is afkomstig van den het vorig jaar overleden schrijver van dit werkje, wiens onderzoekingen die bepaling tot een zeer belangrijk hulpmiddel bij het chemisch onderzoek gemaakt hebben. De geheele inrichting van het boek doet Raoult kennen in de eerste plaats als een man van de praktijk, zoo zelfs, dat men twijfelt of dit no. wel tot het domein der „physique mathématique” behoort. Het eerste en tweede gedeelte, algemeene beginselen en waarnemingsmethoden, omvatten samen 39 blz.; men kan nagaan, dat hierin alle mogelijke fouten besproken, alle voorzorgen minutieus beschreven worden. Dan komt een derde gedeelte, de vriespuntverlaging in niet-electrolyten, dus in niet gedissocieerde oplossingen, met 42 blz. Een groot materiaal van waarnemingen leidt tot de eerste wet van Raoult: de moleculaire vriespuntverlaging in eenzelfde oplosmiddel is voor alle opgeloste stoffen dezelfde constante, — die dan nogmaals opzettelijk getoetst wordt aan andere waarnemingen. Een tweede wet, aangevende dat

deze constante evenredig zou zijn aan het moleculair gewicht van het oplosmiddel, heeft tengevolge van nauwkeuriger onderzoek moeten plaats maken voor de wet van Van 't Hoff (1886), uit thermodynamische beschouwingen afgeleid en in alle opzichten bevestigd. Nu hebben indertijd Raoult en Recoura een empirische formule gegeven voor de dampspanningsverlaging bij oplossingen. Raoult brengt deze in verband met een door hem in 1894 afgeleide „mathematische” betrekking en komt zoo tot de wet van Van 't Hoff. Gaat men na, dat de „mathematische” betrekking evenals deze wet lange thermodynamischen weg moet verkregen zijn, dan leest men met eenige verbazing de conclusie: „On voit par là que cette formule, que son auteur a déduite d'une hypothèse, n'est, en réalité, qu'une forme particulière de la loi expérimentale de Raoult et Recoura.”

Ook in de vierde afdeeling, de electrolyten, gedissocieerde oplossingen, geeft Raoult eerst een aantal empirische wetten, door hemzelf voor bijzondere gevallen gevonden, en eerst later den algemeenen regel, aan de theorie van Arrhenius ontleend. Dit gedeelte, practisch van minder, maar theoretisch van meer gewicht, omvat slechts 19 bladzijden.

Een portret van Raoult en een korte biografie door R. Lespieau gaan aan het werk vooraf.

Franges d'interférence et leurs applications métrologiques par J. MACÉ DE LÉPINAY. Recueil „Scientia”, série phys-math., fascicule n°. 14, 101 blz. Parijs, G. Naud, 1902.

„Un rayon de lumière, avec ses séries d'ondulations d'une ténuité extrême mais parfaitement régulières peut être considéré comme un micromètre naturel de la plus grande perfection, parfaitement propre à déterminer des longueurs.” Met deze woorden van Fizeau schetst Macé de Lépinay het denkbeeld, tot welks verwezenlijking hijzelf zoo veel heeft bijgedragen. In de toekomst ziet hij reeds een volledig systeem van absolute eenheden: een golflengte, een daaruit afgeleide massa eenheid en een trillingstijd als tijdseenheid; inderdaad zijn de verhoudingen van de beide eerste eenheden tot die van het metriek stelsel zoo goed als vastgesteld.

In plaats van de niet direct waarneembare golflengten zelf

treden bij de metingen steeds interferentiestrepen op bij wijze van deelstrepen. Het eerste gedeelte bevat dus algemeene beginselen voor het tot stand komen van interferentie; een van de beste hulpmiddelen hierbij zijn de door Perot en Fabry toegepaste luchtlagen begrensd door twee zwak verzilverde, evenwijdige glasplaten, die bij terugkaatsing een groot aantal interfereerende bundels met gelijke phase-verschillen leveren, zoodat zeer smalle, heldere strepen ontstaan. Bij groote phase-verschillen wordt de al of niet zichtbaarheid van interferentiestrepen door de homogeniteit der lichtbron bepaald; Michelson heeft hiervan een zeer handig gebruik gemaakt om de samenstelling van allerlei bijna homogene stralingen te onderzoeken. Als zeer homogeen dienen tegenwoordig bijna uitsluitend kwik- en cadmium-stralingen.

Een tweede gedeelte behandelt de methoden om ten behoeve der lengtemeting het aantal golfengten van het wegverschil der interfereerende stralen, de z.g.n. orde der interferentie, te bepalen. Het breukdeel in dit ordegetal wordt eenvoudig gevonden door schatting van een deel van den afstand van twee strepen. Veel moeilijker is het bepalen van het geheele deel, daar aan tellen niet gedacht kan worden. Het doel wordt hier bereikt door het gelijktijdig of achtereenvolgens bezigen van verschillende lichtsoorten; naarmate deze veel of weinig verschillen, treden op kleinere of grootere afstanden coincidenties op, welke als deelstrepen voor een collectieve eenheid kunnen dienen. Is dan, met behulp van een voorloopige ruwe meting, het ordegetal voor één lichtsoort op eenige tientallen na bepaald, dan beelissen de waargenomen breukdeelen bij de andere lichtsoorten over de keuze van het juiste getal. Men dankt deze methode vooral aan Benoit en aan Pérot en Fabry.

Van de derde afdeeling, de resultaten, vermelden we alleen een van de uitkomsten van de vergelijking der golfengten R, G, B van de roode, groene en blauwe cadmiumlijnen met den standaardmeter door Michelson en Benoit met hun uiterst nauwkeurigen interferometer:

$$1 \text{ M.} = 1.553.163,5 \text{ R.}$$

nauwkeurig minstens op 1 millioenste.

De nieuwere bepalingen van de massa van het standaardkilogram uitgedrukt in de theoretische massa-eenheid met behulp der interferentie-methoden stemmen zeer goed overeen, maar

toon en een systematisch verschil met de uitkomsten, verkregen met de methode van vergelijking door contact.

Le phénomène de Kerr et les phénomènes électro-optiques par E. NÉCULCÉA. Recueil „Scientia”, série phys-math., fascicule n°. 16, X, 91 blz. Parijs, C. Naud. 1901.

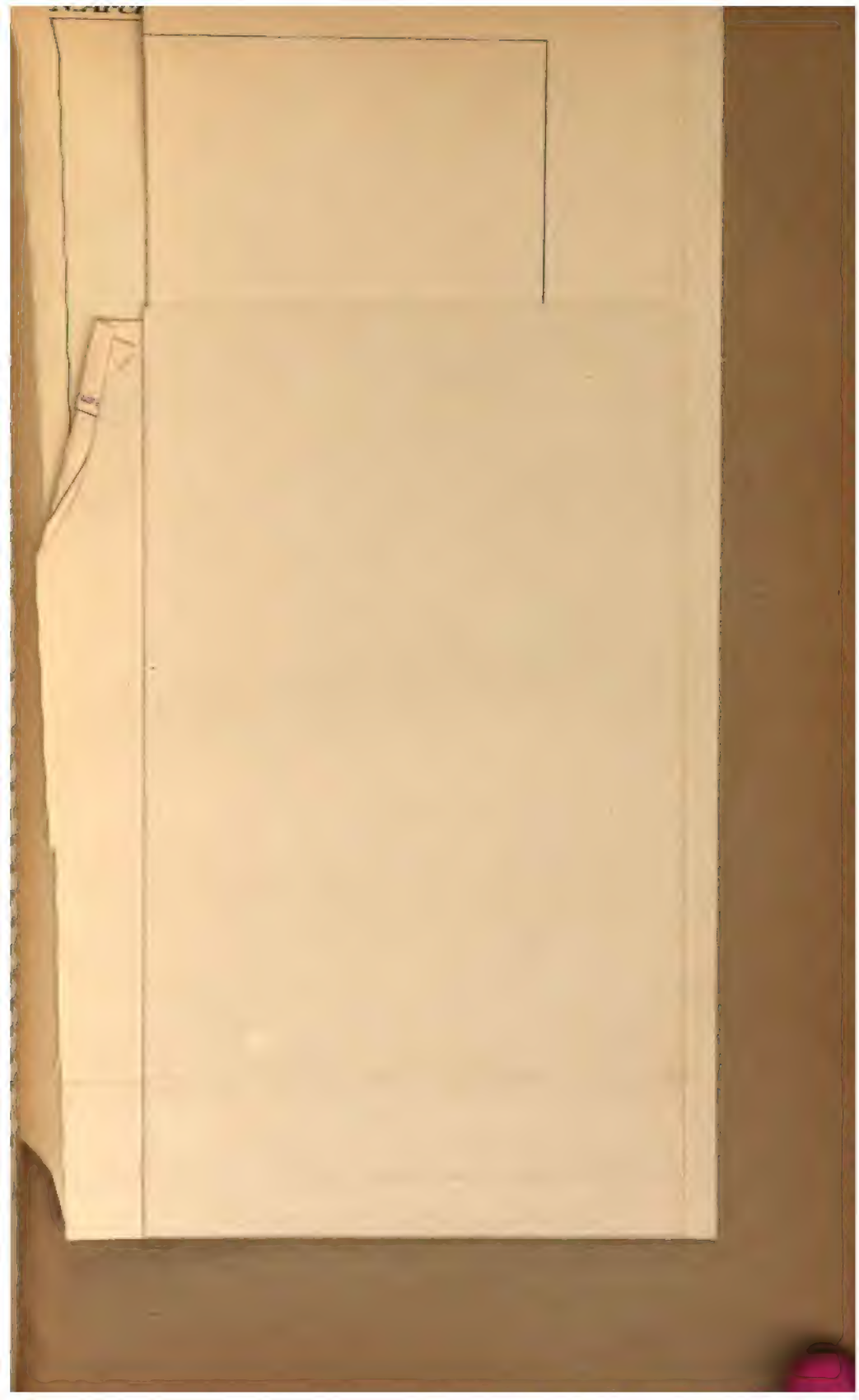
Het hier bedoelde verschijnsel van Kerr is de dubbelbreking van het licht in dielectrica veroorzaakt door een electrisch veld — niet dus de draaiing van het polarisatievlak bij terugkaatsing op een gemagnetiseerden ijzerspiegel, hier te lande o.a. door de onderzoekingen van Zeeman bekend.

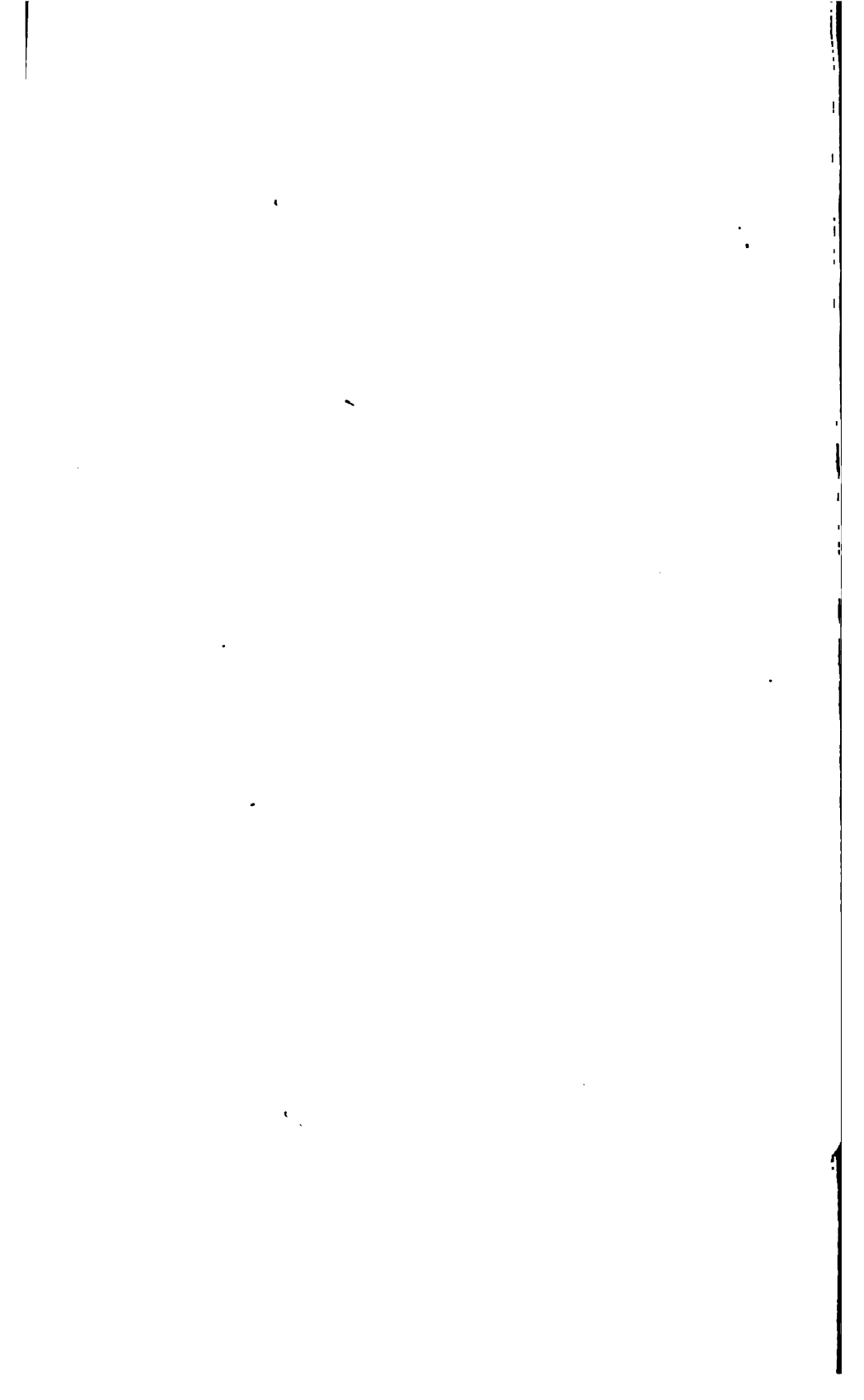
De waarnemingen, waarover het eerste gedeelte handelt, zijn hoofdzakelijk van Kerr zelf, Brongersma en Röntgen. Terwijl in vaste stoffen de dubbelbreking eerst langzaam ontstaat en nog langzamer verdwijnt, is in vloeistoffen het verschijnen momentaan; volgens Abraham en Lemoine minder dan

$\frac{1}{4 \cdot 10^8}$  seconde na het opwekken van het electrisch veld.

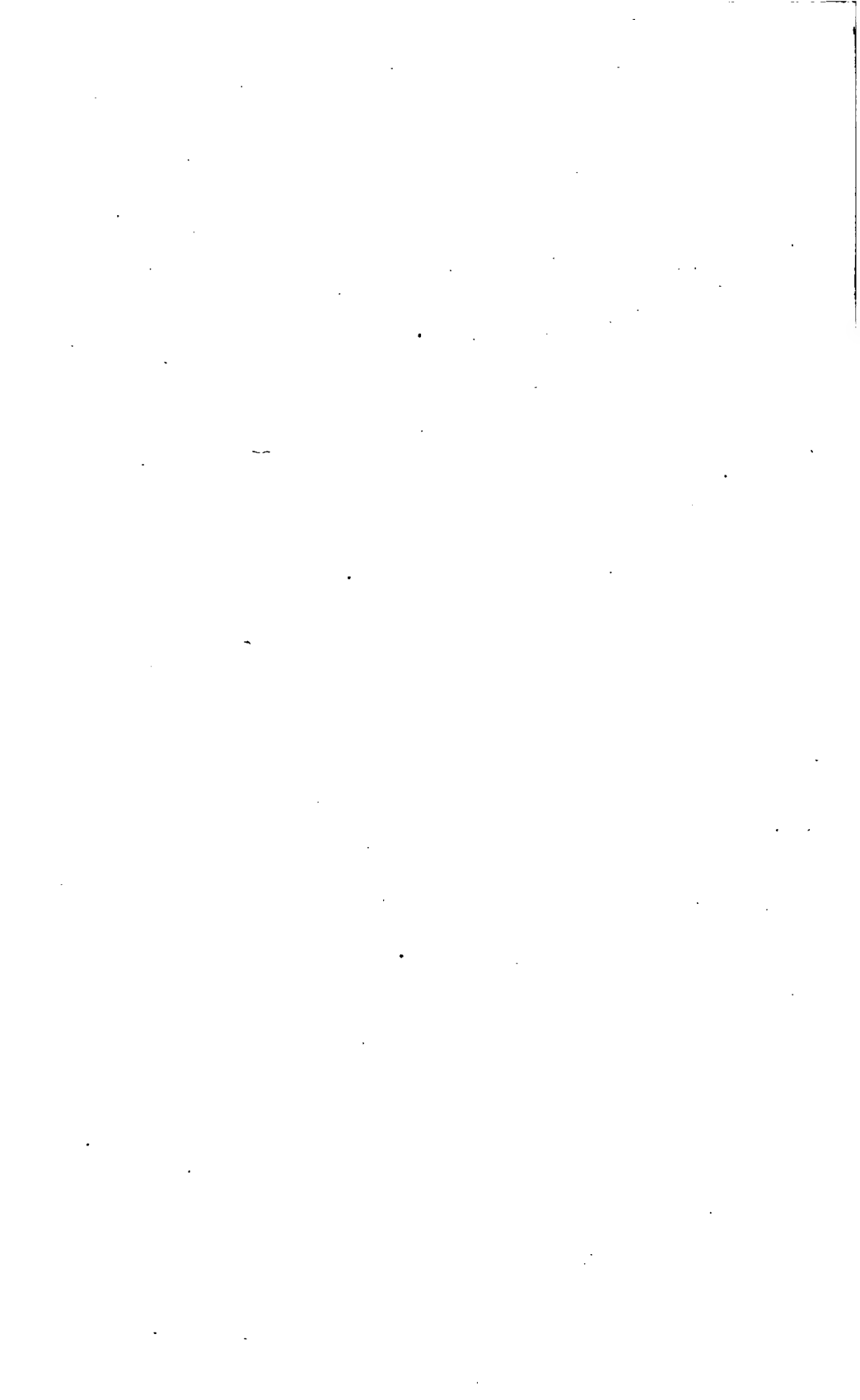
De theorieën van Pockels en Voigt vullen het tweede gedeelte. De eerste gaat uit van de onderstelling, dat er een lineair verband is tusschen de dielectrische constanten van het medium en de componenten der electrische kracht. Zijn resultaat, dat zoowel de gewone als de buitengewone straal een gewijzigde voortplantingssnelheid krijgen, de eerste het minst, is misschien slechts schijnbaar in tegenspraak met de proeven, die alleen het laatste zeker aantoonen. — Voigt behandelt het probleem door aan de algemeene bewegingsvergelijkingen der electriciteit van Hertz nieuwe termen toe te voegen, die den invloed van het electrisch veld beschrijven. We kunnen daarover niet meer meedeelen dan dat de verklaring (beschrijving?) niet alleen de waargenomen, maar ook eenige nieuwe mogelijke verschijnselen omvat. Op een van deze, een electrisch analoon van het verschijnsel van Zeeman, wordt nader de aandacht gevestigd in de derde afdeeling. Ongelukkigerwijze blijkt de te verwachten verplaatsing eener spectraallijn slechts  $\frac{1}{20000}$  van den afstand der natriumlijnen, zoodat er voorloopig niet veel kans is op experimenteele bevestiging.

E. VAN EVERDINGEN JR.







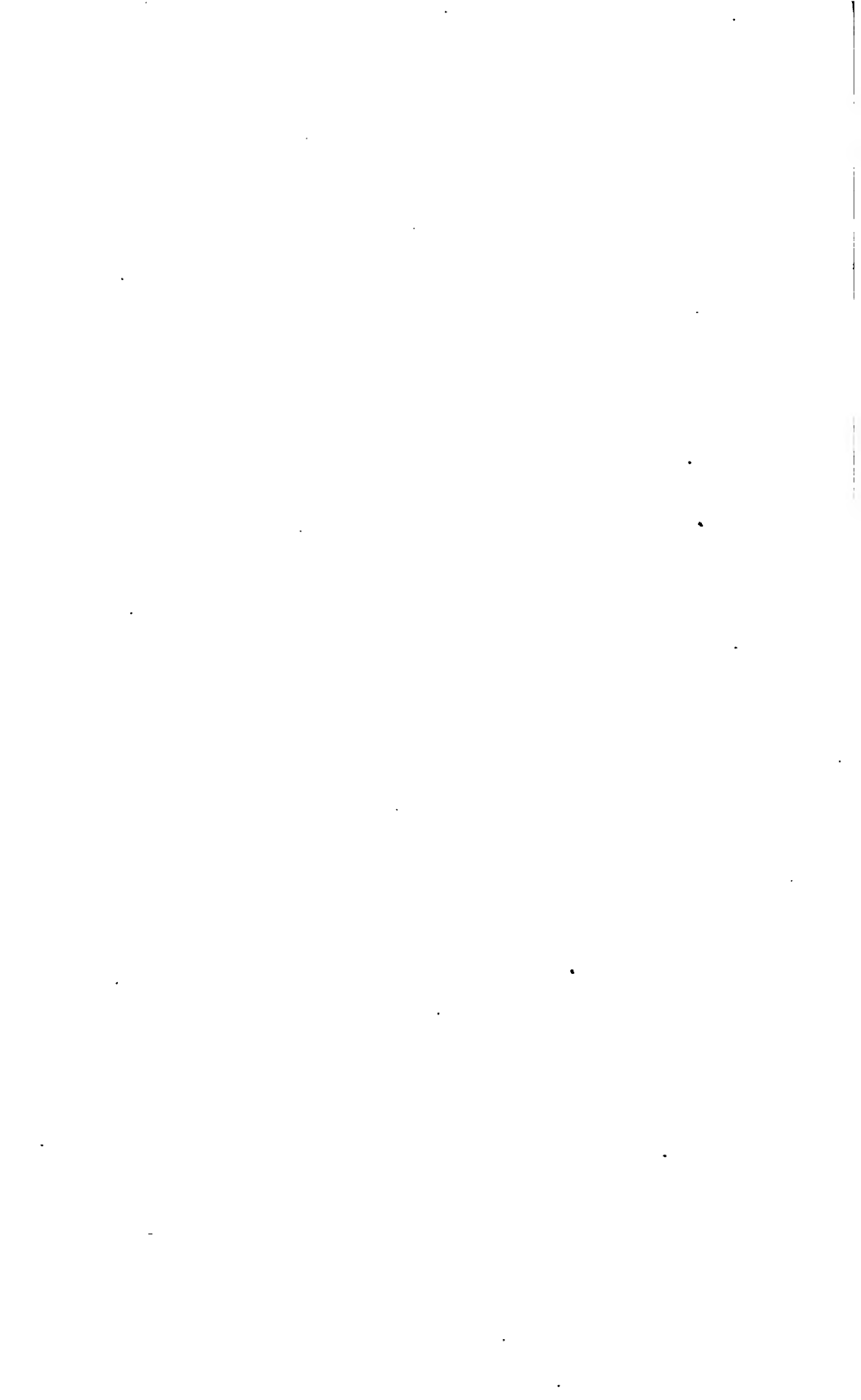


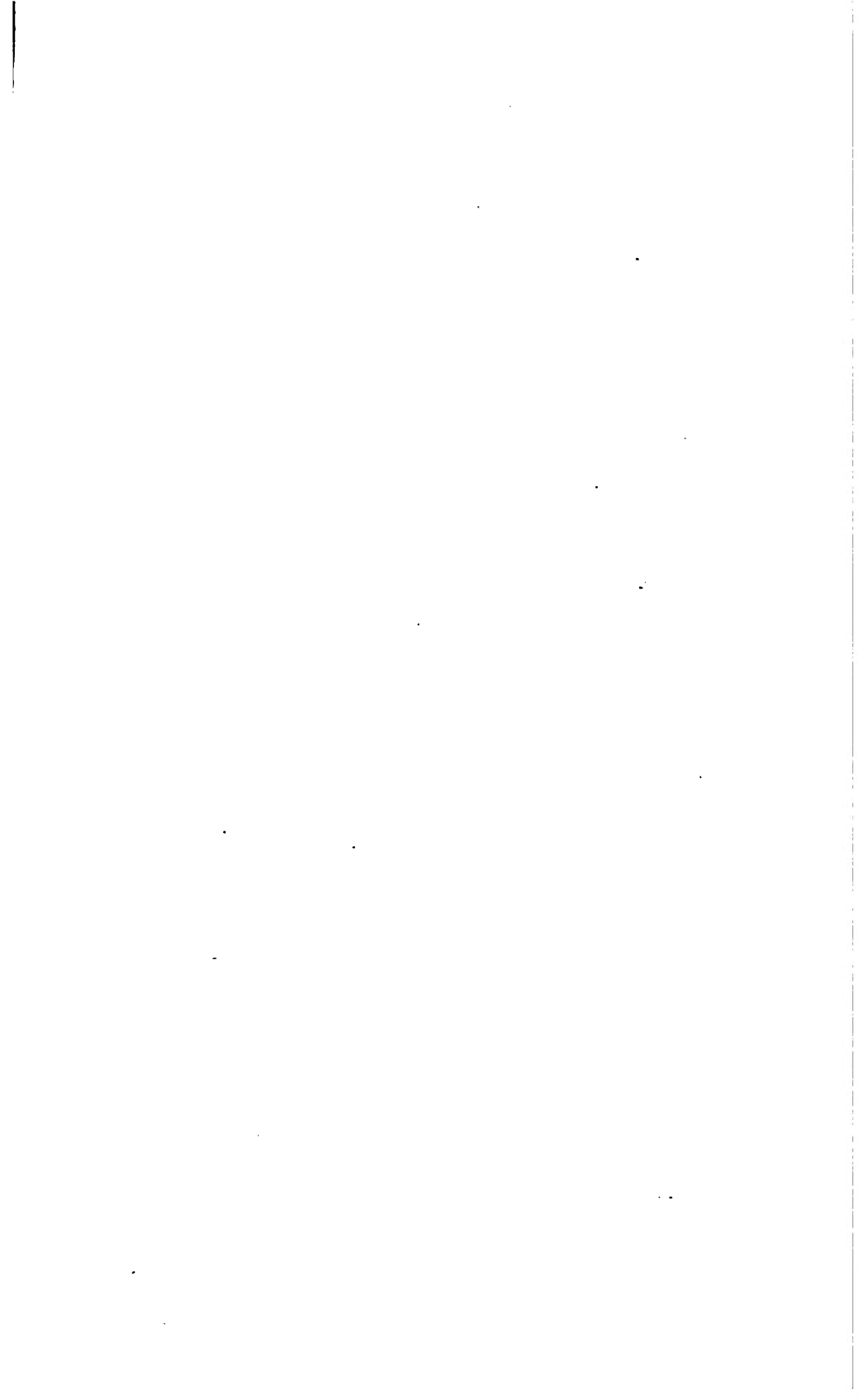
# I N H O U D.

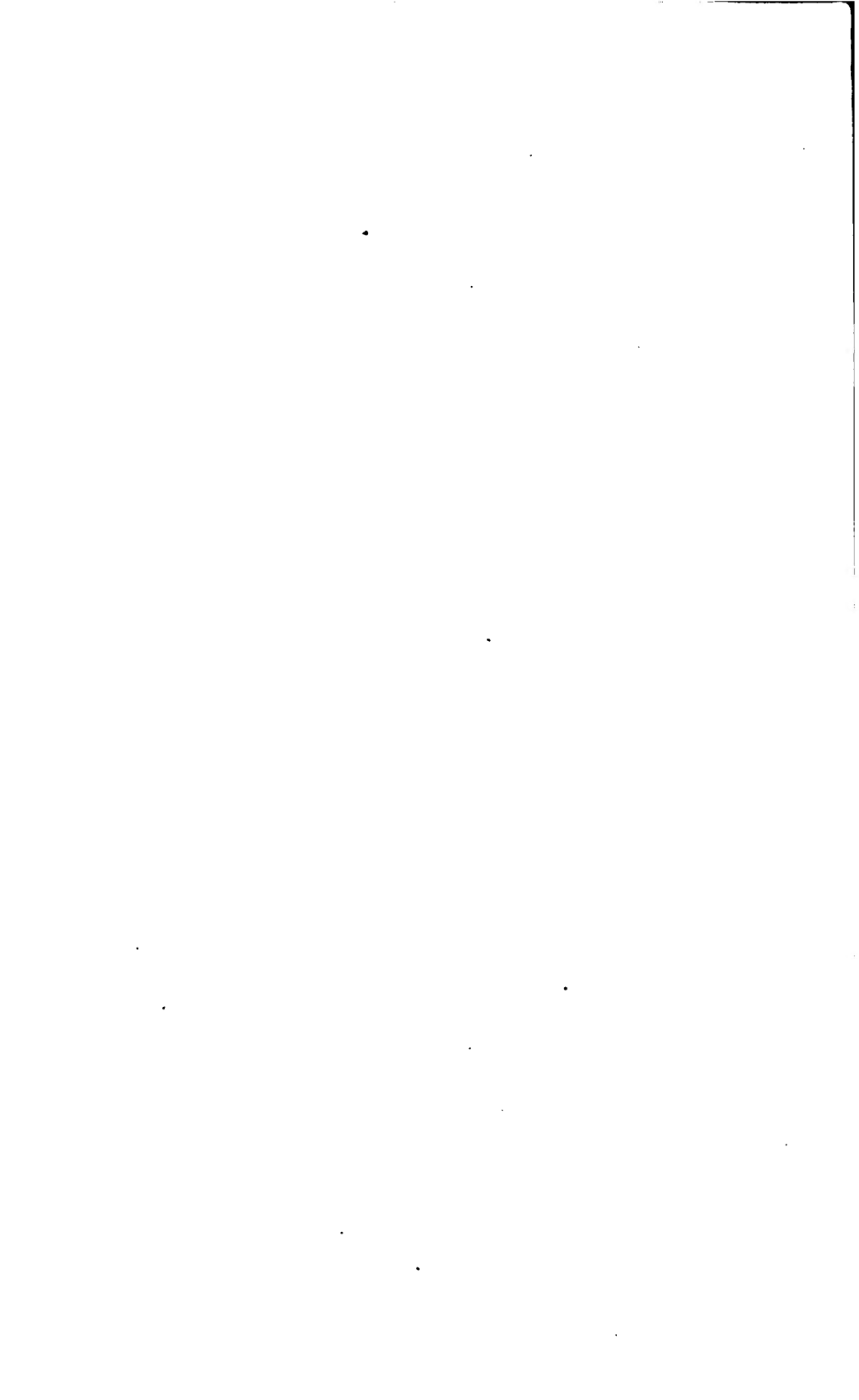
		Blz.
E 1 e.	L. U. H. C. WERNDLY. Démonstration directe de la formule de Stirling . . . . .	325.
M <sup>1</sup> 6 b a.	H. DE VRIES. Ueber eine einfache Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniscate . . . . .	329.
R 7 f, F 2 h, 8 h.	G. SCHOUTEN. De mathematische slinger en de functien van Weierstrass . . . . .	338.
R 8 b, F 2 h, 8 h γ.	G. SCHOUTEN. De wenteling van een lichaam en de functien van Weierstrass . . . . .	340.
K 9 a.	C. A. CIKOT. Iets over het bepalen van het middelpunt van evenwijdige krachten, die aangrijpen op de zijden van eenige bepaalde veelhoeken, zonder analytische meetkunde . . . . .	357.
X 7.	F. J. VAES. Enkele berekeningen met de rekenlineaal . . . . .	362.
K 2 d.	H. A. W. SPECKMAN. Een nieuwe cirkel in den modernen driehoek . . . . .	367.
R 8 a, g b a.	Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF. Over de verandering, die de leyende kracht van een zich vrij bewegend lichaam van onveranderlijke gedaante door het plotseling in rust brengen van een punt daarvan ondergaat . . . . .	374.
I 2 a.	N. L. W. A. GRAVELAAR. Over het kleinste gemeene veelvoud van meer dan twee getallen . . . . .	389.
V 9, L <sup>1</sup> 5 b.	P. H. SCHOUTE. Erratum . . . . .	389.
	Bibliographie . . . . .	391.
	E. LEMOINE. Géométrie ou art des constructions géométriques. Paris, C. Naud, 1902.	
	C. A. LAISANT et A. BUHL. Annuaire des mathématiciens, 1901—1902. Paris, C. Naud, 1902.	
	É. BOREL. Leçons sur les séries à termes positifs, rédigées par R. d'Adhémar. Paris, Gauthier-Villars, 1902.	
	P. BARBARIN. La géométrie non-euclidienne. Paris, C. Naud, 1902.	
	P. I. HELWIG. Over een algemeen gemiddelde en de integralen, die samenhangen met de foutenwet van het meetkundig gemiddelde. Academisch proefschrift. Amsterdam, Delsman en Nolthenius, 1901.	
	É. BOREL. Leçons sur les séries divergentes. Paris, Gauthier-Villars, 1901.	
	H. SICARD. Traité de cinématique théorique. Paris, Gauthier-Villars, 1902.	
	L. BOLTZMANN. Leçons sur la théorie des gaz. Traduites par A. Gallotti, etc. Paris, Gauthier-Villars, 1902.	
	F. M. RAOULT. Crioscopie. Paris, C. Naud, 1901.	
	J. MACÉ DE LÉPINAY. Franges d'interférence et leurs applications métrologiques. Paris, C. Naud, 1902.	
	E. NÉCULCÉA. Le phénomène de Kerr et les phénomènes électro-optiques. Paris, C. Naud, 1902.	

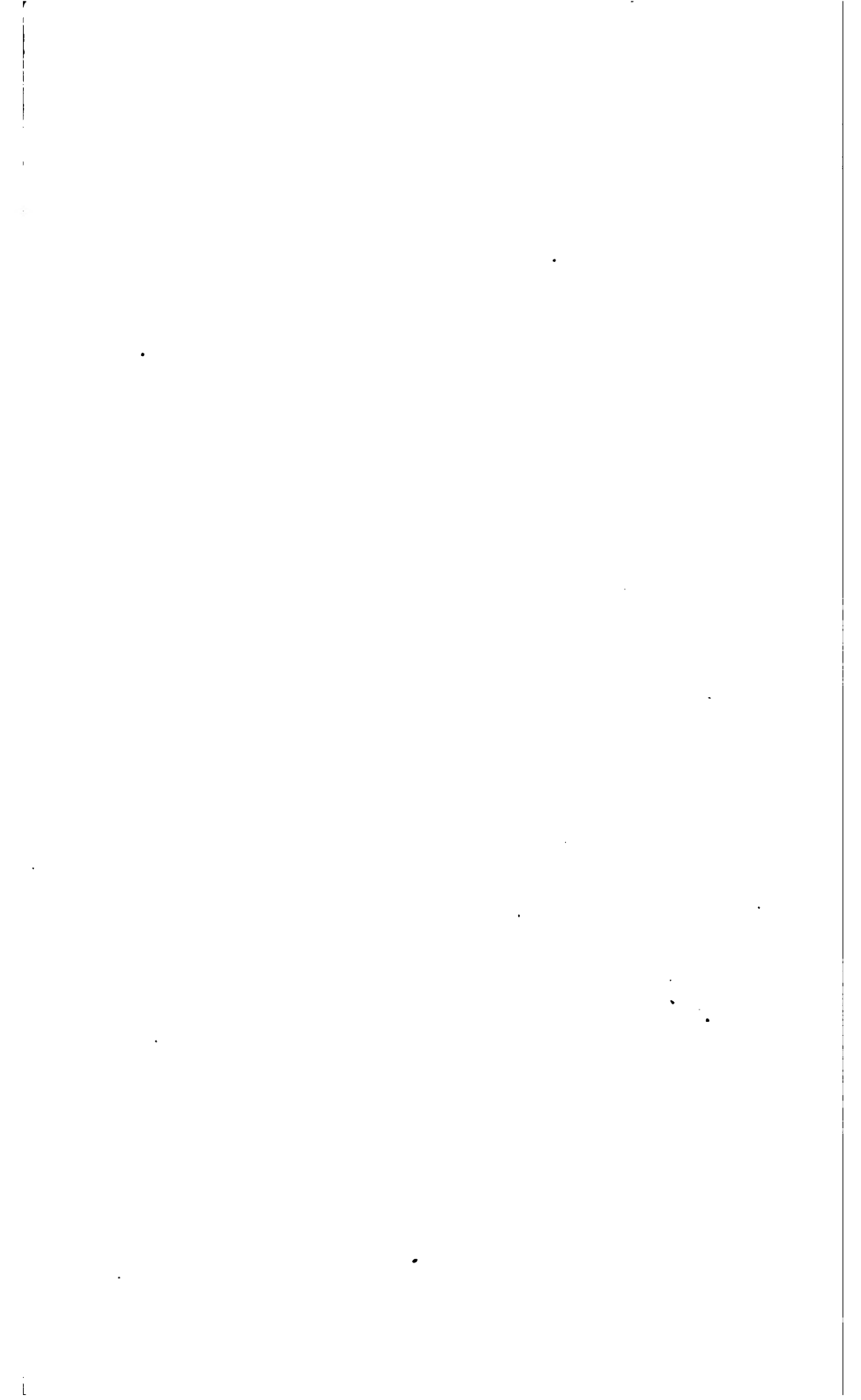
Alle bijdragen en verdere stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der redactie, Dr. J. C. KLUYVER te Leiden.

*Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEER. HOITSEMA, Groningen.*









PERIODICAL